線型空間
アフィン幾何

伊原信一郎
河田敬義 著

岩波基礎数学選書

岩波書店

線型空間・アフィン幾何

監　修

小　平　邦　彦

編　集

岩　堀　長　慶
河　田　敬　義
藤　田　　　宏
小松彦三郎
田　村　一　郎
服　部　晶　夫
飯　高　　　茂

線型空間・アフィン幾何

伊原信一郎
河田敬義 著

岩波基礎数学選書

岩 波 書 店

刊行にあたって

——数学的現象の把握を——

現代の数学は形式主義の影響を強くうけていて，数学の本にも，定義，公理，定理，証明を羅列した形式で書かれたものが多い．形式主義によれば，数学はそれ自身は意味をもたない記号を与えられたルールに従って並べて行くゲームに過ぎないということであるが，これは数学の最も本質的なものを見落しているのではなかろうか？　たとえば，公理的構成の規範となったHilbertの幾何学基礎論では，‘点’，‘直線’，等は意味のない無定義語，すなわち記号であって，‘猫’，‘雀’，等で置き換えても一向差支えないことになっているが，これは事実に反する．実際，Hadamardが指摘したように，幾何学基礎論には殆んど毎頁に図が載っている．図を描かず，頭の中で図を想像することもせずに，論理だけによってHilbertの幾何学基礎論を理解することは不可能であろう．このように 意味を考えない形式主義の立場に立つ限り，幾何学基礎論さえも理解できないのである．

私の見る所では，数学は実在する数学的現象を記述しているのであって，数学を理解するということは，窮極において，その記述する数学的現象のイメージを言わば感覚的に把握し，形式主義では捕捉できない数学の意味を理解することである．

岩波講座「基礎数学」は現代の数学の基礎部門の基本的な内容を上述の意味で感覚的にわかり易く解説することを目標として編集された．このたびのシリーズはこの講座の中から学部程度の基礎教科に相当するものを選び「岩波基礎数学選書」として編集しなおしたものである．

この機会に章末問題に対して解答・ヒントを付し，学生の勉学に供するようにした．

1990年6月

小 平 邦 彦

目　　次

アフィン幾何・射影幾何(河田敬義)

線型空間

まえがき

大学初年級(教養課程)では，数学として解析学の初歩と線型代数とを同時に学習するのが普通である．数学のすべての分野において必要な基本的方法，道具をこの間に修得しようとするわけである．教科として定着しているものだけに，線型代数の教科書は現在非常に多く出版されており，いくつかの先駆的な著作によって確立された‘線型代数学’としての形式はすでに一般的なものとなっている．本書は教科書として書かれたものではなく，大学初年級の学生，あるいは同程度以上の知識を有する者が線型代数を独習するための入門書であることを意識している．したがって教科書的類型に一応従うが，通常は時間的な制約のために講義では軽く扱われる重要な事柄にも留意した．

図形の性質を一般的な立場から究明すること，および与えられた条件をみたす量を加減乗除の四則演算によって決定するための一般論を構成することは，数学を行なう場合の基本目的であり，原始数学以来このことは不変である．17 世紀に解析幾何学が発明されたことにより図形と方程式とを同じものとして扱う思想が普遍的となり，その自在さが解析学の発達をうながし，数学の研究対象は多様に拡がった．この間最もわかりやすい方程式である 1 次方程式の解法の一般論を源泉とし，加法，乗法をすべての演算の基本として把握することにより‘線型性’の概念が次第に明確に認識されて来たのである．線型代数とは数学の研究対象そのものではなく，歴史的にみればほとんど自然に形成されてきた，したがってまたもっとも基本的な数学的方法，手段の一つであるということができる．

近年，現代数学とか数学教育の現代化等という場合，公理的方法ばかりが強調されるあまり，新しい数学とははじめに論理構成を厳密に行ない，計算はすべて計算機にまかせてしまうことによって，あらゆることが自動的に明白になるもののことであるかのように誤解される傾向がある．時代の新旧にかかわらず，数学本来の研究目的は，あくまでもある条件をみたす性質を最終的には加減乗除の計算程度の単純さに帰着させて明らかにすることにある．公理的方法は議論からあいまいさをとり除き，類似の対象については重複をさけて同一の議論ですませる

ための一つの手段にすぎないのであり，計算機は数学の立場だけからいえば，帰納的推論の糸口を把えるための一つの実験用具なのである．

線型空間の現在行なわれている定義は公理的方法の典型的なあらわれであるが，それが何の背景もなしに作り出されたものではなく，線型代数はその公理系に意味を与えるための一つの体系等という種類のものではないことを，読者は第1章において納得されるであろう．われわれは第1章のはじめに高等学校で学ぶ幾何学的ベクトルについて復習するが，そこで述べられたことのほとんどすべてが章を追って一般化されるはずである．

第2章では本書の主題である線型空間，線型写像および行列について，多数の例とともに解説する．線型代数が数学の基本的な道具である理由もそれ等の例によって感知されるであろう．

第3章では線型写像，とくに線型変換の性質を調べる原理的方法を述べる．一般に教科書では詳しく説明されることの少ない商空間について述べ，準同型定理を一つの基本的方法とみなすことにする．固有値問題についても簡単に述べる．合わせて他の代数系についての準同型定理も説明し，簡単な応用を述べる．

第4章は古典的な連立1次方程式論および行列式論である．行列式については，線型空間の一般論だけを述べるときにはやや不要の感があり，大学における授業時間の制約もあって，近年教科書では軽視される傾向にある．しかし線型代数を数学の基本的な道具とみなすとき，行列式を軽視してよい理由は何もないのである．第4章で述べる程度のことは最低限心得ておく方がよい．

このシリーズでは，行列の標準形とその応用，2次形式論等についてはそれぞれ別の著者が担当することになっている．線型代数では定数係数の常微分方程式の解法を，行列の標準形を求めることの応用として述べるのが普通である．しかし線型空間の重要な例である微分方程式の解空間について述べながら，それがあいまいなものであっては意味がないので，われわれは第2章で演算子法による解法を簡単に学び，逆にそれを利用して行列の計算に都合のよい形(標準形)を求め，他の例に転用するのである．読者がこのシリーズの該当する部分で行列の標準形について学ばれ，あらためて本書の取り扱いを省みられるであろうことを期待する．

第1章　幾何学と線型代数

§1.1　空間のベクトル

はじめに空間(3次元 Euclid 空間)のベクトルについて復習する．ここでは‘空間’とは何かということを問題にするわけではない．われわれが直観的に納得しているいわゆる空間を想定すればよく，以下ではそれを E^3 で表わすことにする．

a) 有向線分とベクトル

空間 E^3 の任意の2点 P, Q に対して P を始点，Q を終点とする有向線分を $\overrightarrow{PQ}$ で表わす．このような有向線分全体を考えて，その集合を S で表わすことにする．二つの有向線分 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{P'Q'}$ は，平行移動によって P を P' に，Q を Q' に重ね合わせることができるときに，同じベクトルを表わすという．

あるいは $\overrightarrow{PQ} \in S$ に対して，平行移動により向きもこめて $\overrightarrow{PQ}$ に重ね合わせることのできる有向線分全体からなる S の部分集合を $(\overrightarrow{PQ})$ で表わし，これをベクトルというのである．この場合記号 $(\overrightarrow{PQ})$ は，集合 S の中で考えればそのある部分集合を表わすものであるが，$(\overrightarrow{PQ})$ 自体を一つのものと考えて(あるいはその中に含まれる元を全部同一視して)ベクトルとよぶのである．

記述を簡明にするために，$\overrightarrow{PQ}$ を平行移動して $\overrightarrow{P'Q'}$ に重ね合わせることができるとき $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{P'Q'}$，そうでないとき $\overrightarrow{PQ} \not\sim \overrightarrow{P'Q'}$ で表わすことにしよう．任意の有向線分 $\overrightarrow{PQ}$ に対して集合 $(\overrightarrow{PQ})$ は $\overrightarrow{PQ}$ 自身をかならず含むから絶対に空集合ではない．つまり任意の有向線分はかならず一つのベクトルを定める．また，$\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{P'Q'}$ ならば $(\overrightarrow{PQ})$, $(\overrightarrow{P'Q'})$ のどちらに含まれる元も平行移動によって $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{P'Q'}$ いずれにも重ね合わせることができるから $(\overrightarrow{PQ}) = (\overrightarrow{P'Q'})$ であり，$\overrightarrow{PQ} \not\sim \overrightarrow{P'Q'}$ ならば平行移動によって $\overrightarrow{PQ}$ (または $\overrightarrow{P'Q'}$)に重ね合わせることのできる有向線分は $\overrightarrow{P'Q'}$ (または $\overrightarrow{PQ}$)には重ね合わせられないから $(\overrightarrow{PQ}) \cap (\overrightarrow{P'Q'}) = \phi$ (空集合)である．したがって S は $(\overrightarrow{PQ})$ と表わされるたがいに共通部分をもたない部分集合によって，すきまなく完全におおわれている．

以上の議論は有向線分の平行移動に関する幾何学的性質にもとづいているが，

本質的に次の三つの性質が基本的である：

(1)　$\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{PQ}$,

(2)　$\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{P'Q'} \Longrightarrow \overrightarrow{P'Q'} \sim \overrightarrow{PQ}$,

(3)　$\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{P'Q'}$, $\overrightarrow{P'Q'} \sim \overrightarrow{P''Q''} \Longrightarrow \overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{P''Q''}$.

数学の用語ではこのとき $\sim$ は集合 S に同値関係を定めるといい，$(\overrightarrow{PQ})$ はこの同値関係に関する一つの(同値)類であるという．上述のとおり，たがいに異なる類は共通部分をもたず，また任意の S の元はかならずある類に含まれているのであるから，類を一つの元とみなして(いいかえれば一つの類に含まれる元はすべて同じものとみなして)，何の混乱もなく新しい集合 $S/\sim$ (S の $\sim$ による商集合という)を作ることができる．今の場合われわれはこの新しい集合を $V(E^3)=S/\sim$ で表わす．$V(E^3)$ の元をベクトルというわけである．

ベクトル $\boldsymbol{a} \in V(E^3)$ に対して有向線分 $\overrightarrow{PQ} \in S$ を適当に選んで $\boldsymbol{a}=(\overrightarrow{PQ})$ で表わすとき，$\overrightarrow{PQ}$ は‘$\boldsymbol{a}$ を表わす’，あるいは‘類 $\boldsymbol{a}$ の代表元である’という．このような表わし方 $\boldsymbol{a}=(\overrightarrow{PQ})$ は一意的ではなく，$\overrightarrow{PQ}\sim\overrightarrow{P'Q'}$ でありさえすれば $\boldsymbol{a}=(\overrightarrow{P'Q'})$ とも表わせる．しかし $P \in E^3$ と $\boldsymbol{a} \in V(E^3)$ とを与えれば，$\boldsymbol{a}=(\overrightarrow{PQ})$ となる $Q \in E^3$ が必ずあり，それは一意的に定まってしまう．始点と終点とが一致する有向線分 $\overrightarrow{PP}$ (どこを向いているのかわけがわからないが，これも形式上有向線分である)によって表わされるベクトルを零ベクトルといい，$\boldsymbol{o}$ で表わす．

b）ベクトルの演算

二つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V(E^3)$ が与えられたとき，3点 $P, Q, R \in E^3$ を適当にとって $\boldsymbol{a}=(\overrightarrow{PQ})$, $\boldsymbol{b}=(\overrightarrow{QR})$ と表わすことができる．このとき $\overrightarrow{PR}$ の表わすベクトル $(\overrightarrow{PR})$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の和といい，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ で表わす．この和の定義はみかけ上3点 P, Q, R のとり方に依存しているようにみえる．しかし $\boldsymbol{a}=(PQ)=(P'Q')$, $\boldsymbol{b}=(QR)=(Q'R')$ ならば $\overrightarrow{PQ}\sim\overrightarrow{P'Q'}$, $\overrightarrow{QR}\sim\overrightarrow{Q'R'}$ であり，したがって $\overrightarrow{PR}\sim\overrightarrow{P'R'}$ であるから $(\overrightarrow{PR})=(\overrightarrow{P'R'})$ となって，実際には点のとり方には無関係に和が定義されていることがわかる．このようにして $V(E^3)$ に定義された加法 $+$ は，例えば実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ における加法の場合と同様に次の四つの性質をみたす．

I-(0)　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$,

(1)　$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$,

(2)　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{o} = \boldsymbol{a}$,

(3) $a+(-a)=o$.

ここで $a\in V(E^3)$ に対して $-a$ で表わされるベクトルとは，$a=(\overrightarrow{PQ})$ と表わしたときに，対応して $(\overrightarrow{QP})$ で表わされるもののことである．

問 上の I-(0), I-(1) を，図をかいて証明せよ．——

次に任意のベクトル $a=(\overrightarrow{PQ})$ と任意の実数 $\lambda\in\boldsymbol{R}$ に対して，a の λ 倍 $\lambda a\in V(E^3)$ を定義しよう．$a=o$ あるいは $\lambda=0$ のときには $\lambda a=o$ とする．このどちらでもないときには，P, Q を通る直線上の点 R を $\overrightarrow{PR}:\overrightarrow{PQ}=\lambda:1$ となるようにとって(すなわち線分の長さの比が $\overline{PR}:\overline{PQ}=|\lambda|:1$ であり，$\overrightarrow{PR}$ の向きが $\lambda>0$ ならば $\overrightarrow{PQ}$ と同じ，$\lambda<0$ ならば $\overrightarrow{PQ}$ と反対になるようにとって)，$\lambda a=(\overrightarrow{PR})$ とするのである．このように $\lambda\in\boldsymbol{R}$ と $a\in V(E^3)$ との間に定義された演算 $(\lambda, a)\mapsto\lambda a$ を $V(E^3)$ の $\boldsymbol{R}$ 上のスカラー乗法という．これについては次の四つの性質が基本的である：

II-(1) $1\cdot a=a$,

(2) $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$,

(3) $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$,

(4) $(\lambda\mu)a=\lambda(\mu a)$.

ただし $a, b\in V(E^3)$，$\lambda, \mu\in\boldsymbol{R}$ である．これ等の性質はいずれもスカラー乗法の幾何学的意味から容易に証明できることであるが，加法の性質 I-(0)～(3) とともに，本来図形的に定義された $V(E^3)$ における演算を実数の加法，乗法等と同様に代数的な演算として自由にとり扱う上で基本的なものである．

以上によって定義された加法とスカラー乗法をそなえたものとしての集合 $V(E^3)$ を，Euclid 空間 E^3 に付随するベクトル空間という．

c) 直交座標系と列ベクトル，内積

ベクトル $a\in V(E^3)$ を有向線分によって $a=(\overrightarrow{PQ})$ で表わしたとき，線分 PQ の長さ $\overline{PQ}$ を a の**長さ**，あるいは**ノルム**といい，$\|a\|$ で表わす．$\overrightarrow{PQ}\sim\overrightarrow{P'Q'}$ ならば明らかに $\overline{PQ}=\overline{P'Q'}$ であるから，$\|a\|$ は有向線分のとり方によらずベクトル a だけで定まるものである．とくにノルムが1のベクトルを**単位ベクトル**という．

空間 E^3 の1点 O を固定しておけば任意の $a, b\in V(E^3)$ に対してそれぞれ $a=(\overrightarrow{OP})$，$b=(\overrightarrow{OQ})$ となる点 $P, Q\in E^3$ が一意的に定まる．したがって $a\neq o$，$b\neq o$ ならば $\theta=\angle POQ$，$0\leqq\theta\leqq\pi$ によって a, b 間の角 θ を定義することができる．

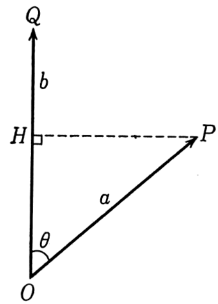


図 1.1

これが O のとり方によらないことも明らかである．このとき点 P の直線 OQ への射影(すなわち P から直線 OQ への垂線の足)を H とすれば $\overline{OH}=\|a\|\cdot|\cos\theta|$ であり，また b 方向の単位ベクトルとして $b/\|b\|$ をとることができるから

$$(1.1)\qquad (\overrightarrow{OH})=\|a\|\cos\theta\cdot b/\|b\|.$$

このベクトル $(\overrightarrow{OH})$ を a の b への射影といい，また $\|a\|\cos\theta\in\boldsymbol{R}$ を a の b 方向の(直交)**成分**という．

一般に $a,b\in V(E^3)$ に対してその**内積** $\langle a,b\rangle$ を

$$(1.2)\qquad \langle a,b\rangle=\begin{cases}\|a\|\cdot\|b\|\cos\theta & (a\neq o,\ b\neq o,\ \theta\ \text{は}\ a,b\ \text{間の角}),\\ 0 & (a=o\ \text{または}\ b=o)\end{cases}$$

によって定義する．とくに $\langle a,a\rangle=\|a\|^2$ である．内積を用いれば(1.1)は $(\overrightarrow{OH})=(\langle a,b\rangle/\langle b,b\rangle)b$ で表わされる．とくに b が単位ベクトル e に等しい $(b=e)$ ときには $(\overrightarrow{OH})=\langle a,e\rangle e$ であり，a の e 方向成分は $\langle a,e\rangle$ で与えられる．

そこでいま $V(E^3)$ の3個の単位ベクトルでたがいに直交するものを1組定め，それを e_1,e_2,e_3 とする．このとき任意の $x\in V(E^3)$ は $x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\xi_3e_3$ $(\xi_1,\xi_2,\xi_3\in\boldsymbol{R})$ と一意的に表わすことができる．実際 $\xi_i=\langle x,e_i\rangle$ である．逆に任意の $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in\boldsymbol{R}$ に対して $x=\sum_{i=1}^{3}\xi_ie_i$ によって $x\in V(E^3)$ が定まることはいうまでもない．3個の実数 ξ_1,ξ_2,ξ_3 の組を考え，これをこの順序でたてに並べたもの

$$\boldsymbol{x}={}^t(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix}^{1)}$$

---

1) 記号 ^{t} は転置行列を表わす記号(§2.3,c)参照)．ここでは横組のものを本来たてに読むべきことを示す．以下多用する．

を(実係数3次元)**列ベクトル**といい，その全体の集合を $\boldsymbol{R}^3$ で表わす．このとき上で述べたことは写像

$$(1.3)\qquad \Phi:\ V(E^3)\ni x=\sum_{i=1}^{3}\xi_i e_i \longmapsto \boldsymbol{x}={}^t(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\boldsymbol{R}^3$$

が全単射(すなわち $V(E^3)$ から $\boldsymbol{R}^3$ の上への1対1写像)であるということにほかならない．とくに Φ によって

$$e_1\longleftrightarrow {}^t(1,0,0),\qquad e_2\longleftrightarrow {}^t(0,1,0),\qquad e_3\longleftrightarrow {}^t(0,0,1)$$

と対応しているわけである．また $a=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i e_i$, $b=\sum_{i=1}^{3}\beta_i e_i$, $\lambda\in\boldsymbol{R}$ とすれば

$$a+b=\sum_{i=1}^{3}(\alpha_i+\beta_i)e_i,\qquad \lambda a=\sum_{i=1}^{3}(\lambda\alpha_i)e_i$$

であるから，Φ によって

$$a+b\longleftrightarrow {}^t(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\alpha_3+\beta_3),\qquad \lambda a\longleftrightarrow {}^t(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,\lambda\alpha_3)$$

の対応が与えられる．したがって $\boldsymbol{R}^3$ を写像 Φ による $V(E^3)$ の数的な表現と考えるならば，$\boldsymbol{R}^3$ の中では加法およびスカラー乗法は $\boldsymbol{a}=\Phi(a)$, $\boldsymbol{b}=\Phi(b)$ として

$$(1.4)\qquad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}={}^t(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\alpha_3+\beta_3),\qquad \lambda\boldsymbol{a}={}^t(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,\lambda\alpha_3)$$

のように表現されるわけである．そこで(1.4)をはじめから $\boldsymbol{R}^3$ の演算の定義として与えられたものと考え，$\boldsymbol{R}^3$ を $\boldsymbol{R}$ 上の3次元列ベクトル空間ということにする．このとき演算の基本的な性質 I-(0)～(3) および II-(1)～(4) は，図形的な意味をまったくはなれて，定義式(1.4)と実数の加法および乗法に関する性質からも証明できることに注意しよう．とくに

$$\boldsymbol{o}={}^t(0,0,0),\qquad -\boldsymbol{a}={}^t(-a_1,-a_2,-a_3).$$

もう少し形式的に，以下のように考えることもできる．(1.3)によって定義された全単射 Φ は加法およびスカラー乗法を保つ：

$$\Phi(x+y)=\Phi(x)+\Phi(y),\qquad \Phi(\lambda x)=\lambda\Phi(x).$$

一方 Φ の逆写像 Φ^{-1} は

$$\Phi^{-1}:\boldsymbol{R}^3\ni {}^t(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\longmapsto\sum_{i=1}^{3}\xi_i e_i\in V(E^3)$$

で与えられるが，これがまた加法およびスカラー乗法を保っていることは容易にわかる．すなわちベクトル空間 $V(E^3)$ と列ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ とは，I-(0)～(3), II-(1)～(4) だけに基づく代数的な取り扱いに関するかぎり，Φ,Φ^{-1} を通して全

く同じものとして考察できるのである．このことを，$V(E^3)$ と $\boldsymbol{R}^3$ とは実係数のベクトル空間として同型であり，$\Phi: V(E^3)\to\boldsymbol{R}^3$ は一つの同型写像を与えるというのである．

ベクトル空間 $V(E^3)$ におけるベクトルの長さ，内積の概念を Φ によって $\boldsymbol{R}^3$ にうつして考えることもできる．まず $a=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i e_i$ のとき，$\|a\|=\sqrt{\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2+\alpha_3{}^2}$ である．もう一つのベクトルを $b=\sum_{i=1}^{3}\beta_i e_i$ として，a, b の間の角を θ とすれば，次の式は余弦定理として知られている：

$$\|a\|\|b\|\cos\theta=\frac{1}{2}(\|a\|^2+\|b\|^2-\|b-a\|^2).$$

この左辺は a, b の内積であり，右辺は $\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$ に等しい．すなわち $\langle a, b\rangle=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$．そこで $\boldsymbol{a}={}^t(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，$\boldsymbol{b}={}^t(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ に対しても

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3 \tag{1.5}$$

とおいて，これを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^3$ の(自然な)内積ということにする．次の三つの性質は(1.5)から容易に証明できる：

(1)　$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle$,

(2)　$\langle \boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}\rangle=\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}\rangle+\langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}\rangle$,　$\langle \lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\lambda\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$,

(3)　$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle\geqq 0$,　ただし　等号 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$.

また(1)，(2)により $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2\rangle=\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1\rangle+\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_2\rangle$ および $\langle \boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}\rangle=\lambda\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ が成立することも明らかである．とくに(3)により，任意の $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{R}^3$ に対して実数 $\sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle}$ を対応させることができるが，これを $\boldsymbol{a}$ の長さ，あるいはノルムといい，$\|\boldsymbol{a}\|$ で表わす．すなわち $\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle}$．このように $\boldsymbol{R}^3$ に内積とノルムを定義すれば，$a, b\in V(E^3)$ に対して $\langle \Phi(a), \Phi(b)\rangle=\langle a, b\rangle$，とくに $\|\Phi(a)\|=\|a\|$ であることがわかる．すなわちベクトル空間の同型写像 $\Phi: V(E^3)\to\boldsymbol{R}^3$ は，ベクトルの長さの概念も保っているのである．

以上のように，はじめに $V(E^3)$ の中にたがいに直交する3個の単位ベクトル e_1, e_2, e_3 を定めておくことによって，$V(E^3)$ から $\boldsymbol{R}^3$ への全単射 Φ が定まり，それを通して本来自然な幾何学的意味をもつベクトル空間 $V(E^3)$ とやや人工的な列ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ とは，長さの概念までこめてもまったく同じ構造をもっていることがわかる．そこで以下簡単のために，$a=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i e_i$ と $\boldsymbol{a}={}^t(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ とを同一視して，つまり $a=\Phi(a)=\boldsymbol{a}$ とみなして，$V(E^3)=\boldsymbol{R}^3$ と思うことにする．

次に E^3 の点 O を任意に一つ固定しよう．このとき E^3 の任意の点 P に対してベクトル $(\overrightarrow{OP})$ を対応させることができる．このとき $(\overrightarrow{OP})$ を P の位置ベクトルという．上述のとおり，$(\overrightarrow{OP})={}^t(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \boldsymbol{R}^3$ と表わされるから，点 P に対して 3 個の実数からなる組 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) が対応する．逆に任意の 3 個の実数 ξ_1, ξ_2, ξ_3 に対して $P \in E^3$ が $(\overrightarrow{OP})={}^t(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ となるように一意的に定まる．つまり $V(E^3)$ のたがいに直交する 3 個の単位ベクトル e_1, e_2, e_3 と E^3 の 1 点 O とを固定しておくことにより，

$$E^3 \ni P \overset{1対1}{\longleftrightarrow} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$$

の対応によって E^3 の点が数的に表現されるのである．このときやはり $P=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ と同一視してしまう．はじめに固定しておいたものの組 $\Sigma=\{O\,; e_1, e_2, e_3\}$ を E^3 の一つの**直交座標系**，O をこの座標系の**原点**，ξ_i を座標系 Σ に関する P の**第 i 座標**という．

問 $P=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$，$Q=(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ ならば $(\overrightarrow{PQ})={}^t(\eta_1-\xi_1, \eta_2-\xi_2, \eta_3-\xi_3)$ であることを示せ．——

ここで O, e_1, e_2, e_3 は本来人為的に固定したものであることに注意しよう．空間には座標系が絶対的な秩序としてはじめから存在しているわけではなく，$\Sigma=\{O\,; e_1, e_2, e_3\}$ を固定してそれを座標系とよぶのは一つの約束である．原点，座標等の言葉もこの約束にしたがってはじめて意味をもつ．原点にかえる等と表現すれば，それだけで絶対的な意味をもつというものではないのである．

ここまでの議論は平面(2 次元 Euclid 空間)E^2 に対してもまったく同様に行なうことができる．つまり，まず E^2 に付随するベクトル空間 $V(E^2)$ を定義することができ，E^2 の 1 点 O と $V(E^2)$ のたがいに直交する 2 個の単位ベクトル e_1, e_2 の組 $\Sigma=\{O\,; e_1, e_2\}$ を一つ固定すれば，$V(E^2)$ は実係数 2 次元列ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^2$ と同一視できるのであり，したがってまた E^2 の点 P は座標 (ξ_1, ξ_2) によって表わすことができる．

d) 平面および直線の方程式，ベクトル積

以下 E^3 に直交座標系 Σ を一つ固定しておき，$V(E^3)=\boldsymbol{R}^3$，$P=(x_1, x_2, x_3)$ $(x_i \in \boldsymbol{R})$ 等のように同一視する．

定点 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{a}={}^t(a_1, a_2, a_3)$ に直交する平面を Π とする．このとき

$$
\begin{aligned}
&P=(x_1,x_2,x_3)\in\Pi\\
&\quad\Longleftrightarrow \text{線分 } AP\subset\Pi\\
&\quad\Longleftrightarrow (\overrightarrow{AP})={}^t(x_1-\alpha_1,x_2-\alpha_2,x_3-\alpha_3)\text{ が } \boldsymbol{a} \text{ と直交}\\
&\quad\Longleftrightarrow a_1(x_1-\alpha_1)+a_2(x_2-\alpha_2)+a_3(x_3-\alpha_3)=0.
\end{aligned}
$$

したがって $b=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3$ とおけば，$P=(x_1,x_2,x_3)\in\Pi$ であるための必要十分条件は

(1.6)　　$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=b.$$

問　点 A,P の位置ベクトル $(\overrightarrow{OA}),(\overrightarrow{OP})$ をそれぞれ $\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}$ として，$b=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}_0\rangle$ とおけば(1.6)はまた $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle=b$ で表わされる．この図形的意味を説明せよ．——

点 P を平面 Π 上の一般的な点と考えて，いいかえれば P の座標 x_1,x_2,x_3 を未知数と考えて，1次方程式(1.6)を平面 Π の方程式というのである．空間 E^3 のどのような平面もその上の一つの点と，その平面に直交する一つのベクトルとを適当に固定すれば，方程式(1.6)の形で表わされるわけであるが，逆に実数 a_1,a_2,a_3,b (a_1,a_2,a_3 の少なくとも一つは $\neq 0$) に対して1次方程式(1.6)を考えると，その解全体はベクトル ${}^t(a_1,a_2,a_3)$ に直交する一つの平面をなしている．

一方 E^3 の3点 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，$C=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ が同一直線上にないものとすれば，この3点を含む平面が一意的にきまってしまう．そこでこの平面を Π とし，Π 上の任意の点を $P=(x_1,x_2,x_3)$ とする．さらに

$$
\begin{aligned}
&(\overrightarrow{AB})=\boldsymbol{b}={}^t(b_1,b_2,b_3)={}^t(\beta_1-\alpha_1,\beta_2-\alpha_2,\beta_3-\alpha_3),\\
&(\overrightarrow{AC})=\boldsymbol{c}={}^t(c_1,c_2,c_3)={}^t(\gamma_1-\alpha_1,\gamma_2-\alpha_2,\gamma_3-\alpha_3),\\
&(\overrightarrow{OA})=\boldsymbol{x}_0={}^t(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\qquad(A\text{ の位置ベクトル}),\\
&(\overrightarrow{OP})=\boldsymbol{x}={}^t(x_1,x_2,x_3)\qquad(P\text{ の位置ベクトル})
\end{aligned}
$$

とすれば，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+(\overrightarrow{AP})$ であり，$\lambda_1,\lambda_2\in\boldsymbol{R}$ を適当にとれば $(\overrightarrow{AP})=\lambda_1\boldsymbol{b}+\lambda_2\boldsymbol{c}$．したがって

(1.7)　　$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+\lambda_1\boldsymbol{b}+\lambda_2\boldsymbol{c}\qquad(\lambda_1,\lambda_2\in\boldsymbol{R}).$$

逆に λ_1,λ_2 を任意の実数とすれば(1.7)で与えられる $\boldsymbol{x}$ は Π 上のある点 P の位置ベクトルを与えている．そこで λ_1,λ_2 をパラメータ(助変数)といい，(1.7)を**平面 Π のパラメータ表示**というのである．さらに B,C の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ とし，$\lambda_0=1-\lambda_1-\lambda_2$ とおけば，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_0$ に注意して

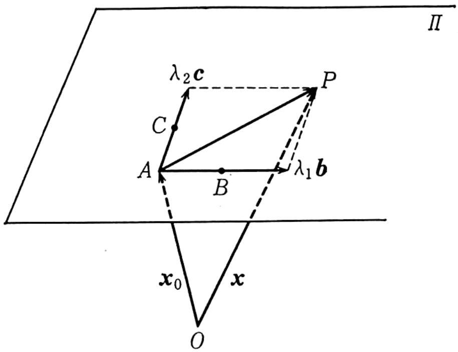


図 1.2

(1.7)′ $$\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{x}_0+\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2,\qquad \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1$$

とかきかえることもできる．このとき$(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$を$P\in \Pi$の$A, B, C$に関する**重心座標**という．とくに$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$がすべて正(したがってまたすべて1より小)のとき(1.7)′は$\triangle ABC$の内部の点の位置ベクトルを表わし，$\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=1/3$に対応する点が$\triangle ABC$の重心を与えているのである．

パラメータ表示(1.7)からλ_1, λ_2を消去すれば

$$(b_2c_3-b_3c_2)(x_1-\alpha_1)+(b_3c_1-b_1c_3)(x_2-\alpha_2)+(b_1c_2-b_2c_1)(x_3-\alpha_3)=0$$

が得られる．これは$a_1=b_2c_3-b_3c_2$, $a_2=b_3c_1-b_1c_3$, $a_3=b_1c_2-b_2c_1$, $b=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3$とおけば，たしかに1次方程式(1.6)の形である．すなわちベクトル

(1.8) $$\boldsymbol{a}={}^t(b_2c_3-b_3c_2,\ b_3c_1-b_1c_3,\ b_1c_2-b_2c_1)$$

が平面Πに直交する一つのベクトルを与えているわけである．このことは$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\rangle=0$を直接計算によって試してみてもわかる．

したがって3点を通るという条件で与えられた平面については，まず(1.8)によってベクトル$\boldsymbol{a}$を求めてしまえば，ただちに(1.6)の形の1次方程式が得られるわけである．

一般に$\boldsymbol{R}^3$の二つのベクトル$\boldsymbol{b}={}^t(b_1, b_2, b_3)$, $\boldsymbol{c}={}^t(c_1, c_2, c_3)$に対して

(1.9) $$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix} b_2c_3-b_3c_2 \\ b_3c_1-b_1c_3 \\ b_1c_2-b_2c_1 \end{bmatrix}\in \boldsymbol{R}^3$$

とおき，これを$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$の**ベクトル積**という．(1.8)は$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$で表わされるのである．定義の式から容易に

$$(1.10)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}, \quad \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}, \\ (\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{c}, \\ (\lambda\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times(\lambda\boldsymbol{c})=\lambda(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \qquad (\lambda\in\boldsymbol{R}), \\ \langle\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\rangle=0 \end{cases}$$

が証明できる．

ところで $V(E^3)=\boldsymbol{R}^3$ と同一視できたのは，座標系 Σ をはじめに固定して考えているからである．しかしベクトル積の定義(1.9)は $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の成分を用いて表わされている．つまり直交座標系 Σ のとり方に依存しているように思われる．座標系を考えない場合にはベクトル積は $V(E^3)$ の元としての幾何学的意味をもたないであろうか．

じつは直交座標系 Σ のとり方にまったく無関係であるとはいえないのである．しかし Σ それ自体に依存しているわけではなく，いわば座標系のある種の分類にだけ関係していることがわかる．簡単な計算により $\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\|^2=\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2-\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle^2$ が得られるが，この右辺は Σ のとり方には依存しない量を表わしている．いま $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の間の角を θ とすれば $\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\|\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{c}\|\cos\theta$ であるから

$$\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\|^2=\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2(1-\cos^2\theta)=(\|\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{c}\|\sin\theta)^2.$$

したがって $\boldsymbol{b}=(\overrightarrow{AB})$，$\boldsymbol{c}=(\overrightarrow{AC})$ とすれば，$\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\|$ は線分 AB, AC を2辺とする平行四辺形の面積という明瞭な幾何学的量と一致している．さらにベクトル $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ が E^3 の中でこの平行四辺形と直交していることも(1.10)から明らかである．問題はその向きであるが，結果だけを先に述べると，もし $\boldsymbol{e}_1={}^t(1,0,0)$，$\boldsymbol{e}_2={}^t(0,1,0)$，$\boldsymbol{e}_3={}^t(0,0,1)$ が右手系をなすならば，すなわち右手の親指，人さし指にそれぞれ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ の向きを対応させると中指の向きが $\boldsymbol{e}_3$ の向きに対応しているならば，$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ もこの順序で右手系をなし，同様に，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ が左手系をなすならば，$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ も左手系をなしているのである．したがって座標系として右手系，左手系のどちらか一方だけを考えることにすれば，ベクトル積は直交座標系 Σ のとり方によらないといえる．このように座標系として右手系，左手系のどちらか一方だけを指定して考えることを，E^3 を**向きづけ**るという．ベクトル積は向きづけの定められた空間 E^3 における幾何学的概念なのである．このことは後に g) において明らかになるであろう．

次に二つの平面 Π_1, Π_2 がそれぞれ1次方程式

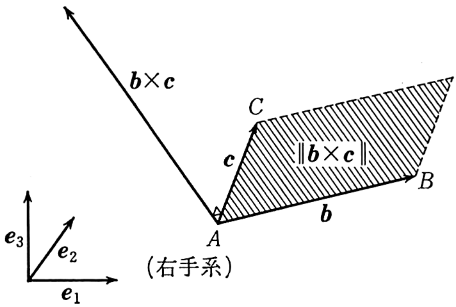


図 1.3

$$(1.11)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 = b_1 & \cdots\cdots \Pi_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 = b_2 & \cdots\cdots \Pi_2 \end{cases}$$

で与えられているものとする．ベクトル $\boldsymbol{a}_1={}^t(a_{11}, a_{12}, a_{13})$，$\boldsymbol{a}_2={}^t(a_{21}, a_{22}, a_{23})$ が平行ならば，すなわち $\boldsymbol{a}_2=\alpha\boldsymbol{a}_1$ ($\alpha\in\boldsymbol{R}$, $\alpha\neq 0$) ならば，これらにそれぞれ垂直な平面として Π_1, Π_2 は平行であり，したがってさらにこのとき $b_2=\alpha b_1$ であれば Π_1, Π_2 はじつは同じ平面を表わしている．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が平行でなければ Π_1, Π_2 は交わり，その共通部分 Λ は直線である．この直線は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ のどちらとも直交しているから，$\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2$ ($\neq\boldsymbol{o}$) に平行である．すなわち連立1次方程式(1.11)は，$\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2\neq\boldsymbol{o}$ のとき，またそのときに限り，直線の方程式であるということができる．

一般に点 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ とベクトル $\boldsymbol{a}={}^t(a_1, a_2, a_3)\neq\boldsymbol{o}$ を指定すれば，A を通り $\boldsymbol{a}$ に平行な直線 Λ が一意的に定まる．任意の点 $P\in\Lambda$ の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$, A の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}_0$ で表わせば明らかに

$$(1.12)\qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0+\lambda\boldsymbol{a} \qquad (\lambda\in\boldsymbol{R}).$$

これを**直線 Λ のパラメータ表示**という．$\boldsymbol{x}={}^t(x_1, x_2, x_3)$ として(1.12)から λ を

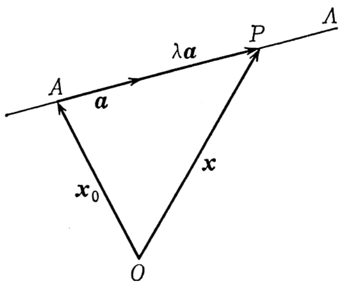


図 1.4

消去すれば

$$(x_1-\alpha_1)/a_1=(x_2-\alpha_2)/a_2=(x_3-\alpha_3)/a_3$$

とかける.（ただし $a_i=0$ のときは $x_i=\alpha_i$ とする.）この3個の1次式を適当に2個ずつ等置して変形すれば，容易に(1.11)の形の連立1次方程式が得られる.

逆に(1.11)において $\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{o}$ であるとき，(1.11)の一つの解を $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2$, $x_3=\alpha_3$ とし，$\boldsymbol{x}_0={}^t(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ とおけば，Π_1,Π_2 の共通部分 Λ のパラメータ表示が(1.12)の形で与えられる．また $\alpha\in\boldsymbol{R}$, $\alpha\neq0$ を適当にとれば $\boldsymbol{a}_2=\alpha\boldsymbol{a}_1$, $b_2=\alpha b_1$（したがってとくに $\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{o}$）となる場合には，(1.11)は結局一つの1次方程式に帰着され，したがって(1.7)の形のパラメータ表示と同じ図形(平面)を表わしているわけである．このように(1.11)をそれと同じ内容を表わすパラメータ表示(1.7)あるいは(1.12)の形にかきかえることを，連立1次方程式(1.11)を解くというのであり，その際(1.7)あるいは(1.12)をその解というのである．このようなパラメータ表示が得られないときは連立1次方程式(1.11)は解をもたないという.

一般に $V(E^3)=\boldsymbol{R}^3$ の二つのベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ が平行でないとき，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ は**線型独立**であるという．また三つのベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ が線型独立であるとは，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ が同一平面に平行ではないことをいう．ただ一つのベクトル $\boldsymbol{a}$ についても，$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{o}$ ならば $\boldsymbol{a}$ は線型独立であるというのである．つまり，一般的な表現をするならば，有限個のベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ が線型独立であるというのは，このうちのどの一つも他の $(k-1)$ 個のベクトルのスカラー倍の和としては表わされないことである．$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ が線型独立ではないとき，これらは**線型従属**であるという．（ただ一つのベクトル $\boldsymbol{a}$ が線型従属であるとは，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$ を意味する.）したがってとくに $k\geqq4$ ならば $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ はかならず線型従属となる．$V(E^2)=\boldsymbol{R}^2$ の場合にも線型独立，線型従属の概念は同様に定義される．この場合 $k\geqq3$ ならば $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ はかならず線型従属である.

これらの言葉を用いれば連立1次方程式(1.11)についての上述の議論は次のように整理することができる:

$\boldsymbol{a}_1={}^t(a_{11},a_{12},a_{13})$, $\boldsymbol{a}_2={}^t(a_{21},a_{22},a_{23})$ とする.

(1) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ が線型従属 $(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{o})$ のとき，(1.11)は解をもつ場合ともたない場合があり，解をもつ場合にはそれは(1.7)の形に表わされる.

(2)　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が線型独立 $(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2\neq\boldsymbol{o})$ のとき，(1.11)はかならず解をもち，それは(1.12)の形で表わされる．

最後に 3 平面 Π_1, Π_2, Π_3 の共通部分について考える．それぞれが 1 次方程式

$$(1.13)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 & \cdots\cdots \Pi_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 & \cdots\cdots \Pi_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 & \cdots\cdots \Pi_3 \end{cases}$$

で表わされているものとすれば，問題は連立 1 次方程式(1.13)の解について調べることと同じである．結果は次のように述べることができる：

$\boldsymbol{a}_i={}^t(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$ $(i=1, 2, 3)$ とおく．

(1)　ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が線型従属ならば，連立 1 次方程式(1.13)は解をもたない場合と解をもつ場合とがあり，解をもつ場合はさらに次の二つの場合にわかれる．

(i) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ のうち一つを適当にとれば，他はそのスカラー倍になっているとき，任意の解は一つの解 $\boldsymbol{x}_0$ と線型独立なベクトル $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ とによって(1.7)の形に表わされる．

(ii) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ のうち適当な二つが線型独立であるとき，解は一つの解 $\boldsymbol{x}_0$ と一つのベクトル $\boldsymbol{a}$ $(\neq\boldsymbol{o})$ とによって(1.12)の形に表わされる．

(2)　ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が線型独立ならば，(1.13)は必ず解をもち，それは一意的に定まる．

問　連立 1 次方程式(1.13)に関する上記の結果について，その図形的な意味を述べよ．——

なお連立 1 次方程式(1.13)は

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

とおいて

$$(1.13)'\qquad A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

で表わすこともできる．左辺の積 $A\boldsymbol{x}$ は第 i 成分 $(1\leqq i\leqq 3)$ が $\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j$ の 3 次元列ベクトルを表わすと考えるわけである．一般に 3^2 個の実数 a_{ij} $(1\leqq i, j\leqq 3)$ を上のように並べたもの $A=(a_{ij})$ を 3 次正方行列という．このとき上述の(1)-(i),

(1)-(ii)，および(2)の場合に A の**階数**はそれぞれ1, 2および3であるという.

e）2次および3次の行列式

行列式の一般的な定義と性質については後に第4章で述べるが，ここではとくに2次および3次の行列式の定義を与え，その幾何的意味を考える.

まず2次の**行列式**(determinant)とは，4変数 x_{ij} $(i=1,2,\ j=1,2)$ の整係数多項式

$$\det(x_{ij}) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} \tag{1.14}$$

のことである．とくに2次元列ベクトル $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(a_{11}, a_{21})$，$\boldsymbol{a}_2 = {}^t(a_{12}, a_{22})$，あるいは2次正方行列

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

が与えられたとき，(1.14)において $x_{ij} = a_{ij}$ $(i, j=1, 2)$ とおいたものを行列 A の行列式といい，$\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$，$\det A$，$|A|$ 等で表わす．ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を $V(E^2)$ の元と考えて $\boldsymbol{a}_1 = (\overrightarrow{OP})$，$\boldsymbol{a}_2 = (\overrightarrow{OQ})$ と表わしたとき，行列式の絶対値 $|\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)|$ は OP, OQ を2辺とする平行四辺形の面積 S を表わしている．実際，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の間の角を θ とすれば

$$\begin{aligned} S^2 &= \|\boldsymbol{a}_1\|^2\|\boldsymbol{a}_2\|^2 \sin^2\theta = \|\boldsymbol{a}_1\|^2\|\boldsymbol{a}_2\|^2(1-\cos^2\theta) \\ &= \|\boldsymbol{a}_1\|^2\|\boldsymbol{a}_2\|^2 - \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle^2 = (\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2))^2. \end{aligned}$$

また $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が線型独立であるためにはこの平行四辺形がつぶれないことが必要十分であるから，

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \text{ が線型独立} \iff \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \neq 0$$

がわかる.

行列式を用いれば，ベクトル積の定義(1.9)は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} &= {}^t\left[\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right] \\ &= {}^t\left[\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right] \end{aligned} \tag{1.9$'$}$$

と表わされるわけである.

次に3次の行列式とは9変数 x_{ij} $(1 \leqq i \leqq 3,\ 1 \leqq j \leqq 3)$ の整係数多項式

$$(1.15)\qquad \det(x_{ij}) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}$$
$$= x_{11}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} - x_{21}\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} + x_{31}\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{22} & x_{23} \end{vmatrix}$$

のことである．また列ベクトル $\boldsymbol{a}_j={}^t(a_{1j}, a_{2j}, a_{3j})$ $(1\leqq j\leqq 3)$，あるいはこの3個の列ベクトルをこの順序で横に並べて得られる3次正方行列 $A=(a_{ij})=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ に対して，3次行列式(1.15)の $x_{ij}=a_{ij}$ $(1\leqq i, j\leqq 3)$ のときの値を A の行列式といい，$\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$，$\det A$，$|A|$ 等で表わす．定義の式(1.15)とベクトル積の式(1.9)′とから容易にわかるように

$$(1.16)\qquad \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3\rangle.$$

したがって $\boldsymbol{a}_j\in V(E^3)$ と考えて $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3$ 間の角を θ とすれば $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=\|\boldsymbol{a}_1\|\|\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3\|\cos\theta$ である．すなわち，$\boldsymbol{a}_i=(\overrightarrow{OP_i})$ $(1\leqq i\leqq 3)$ とすれば $|\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)|$ は OP_1, OP_2, OP_3 を3辺とする平行六面体の体積と一致していることがわかる($\|\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3\|$=底面積，$\|\boldsymbol{a}_1\||\cos\theta|$=高さ)．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が線型独立であることは，この平行六面体がつぶれていないことと同じである．したがってまた

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \text{ が線型独立} \iff \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \neq 0.$$

行列式 $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ についての次の性質(1),(2)は，定義の式(1.15)，あるいは(1.16)を用いて簡単な計算によって試すことができるが，上述のように平行六面体の体積を考えても図形的に明らかである：

(1)　第 j 列だけに着目して $D(\boldsymbol{a}_j)=\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ とおくと

$$D(\boldsymbol{a}_j'+\boldsymbol{a}_j'') = D(\boldsymbol{a}_j')+D(\boldsymbol{a}_j''),\qquad D(\lambda\boldsymbol{a}_j) = \lambda D(\boldsymbol{a}_j).$$

(2)　$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j$ $(i\neq j)$　ならば　$\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = 0$.

性質(1)のもとで，(2)はさらに次のことを意味する：

(2)′　行列式の2列 $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j$ を入れかえると行列式の符号がかわる．たとえば $\det(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3)=-\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$.

実際，(2)によって $\det(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=0$ であるが，これに対して(1),(2)をくりかえし用いれば(2)′の結果が得られる．逆に(2)′から(2)が導かれることも容易にわかる．

一般に行列 $A=(a_{ij})$ の第 i 行 (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}) をたてに並べかえて第 i 番目の列

ベクトルとして作った行列を ${}^tA$ で表わし，A の**転置行列**という．すなわち，${}^tA=(c_{ij})$ とすると $c_{ij}=a_{ji}$ である．このとき(1.14)および(1.15)を用いて

$$\det {}^tA = \det A. \tag{1.17}$$

したがって A の列ベクトルについて成立する性質(1), (2), (2)′ は，すべて A の‘行ベクトル’についても同様に成立することがわかる．

行列式 $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in \boldsymbol{R}^2)$ についても(1), (2), (2)′ が成立することは容易にわかるであろう．それらの幾何学的意味も明らかである．さらに(1.17)が成立することはいうまでもない．

f）アフィン座標系

ベクトル空間 $V(E^3)$ の元を $\boldsymbol{R}^3$ の元と同一視したとき，われわれはたがいに直交する3個の単位ベクトルを1組固定して考えていた．このようなベクトルの組を $V(E^3)$ の**正規直交底**という．

一般に3個のベクトル $a_1, a_2, a_3 \in V(E^3)$ が線型独立であれば，任意のベクトル x はこれらのスカラー倍の和(**線型結合**という)として一意的に表わされる:

$$x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3 \qquad (\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \boldsymbol{R}).$$

その意味で a_1, a_2, a_3 は $V(E^3)$ の底をなすといい，並べ方の順序も考えた組 (a_1, a_2, a_3) を $V(E^3)$ の一つの**底**という．ここで a_1, a_2, a_3 は単位ベクトルとは限らないし，たがいに直交するとも仮定していない．それでも写像

$$\Psi : V(E^3) \ni x = \sum_{i=1}^{3} \xi_i a_i \longmapsto {}^t(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \boldsymbol{R}^3$$

は前に述べたのと同じ意味で同型写像になっている．すなわち全単射(任意の

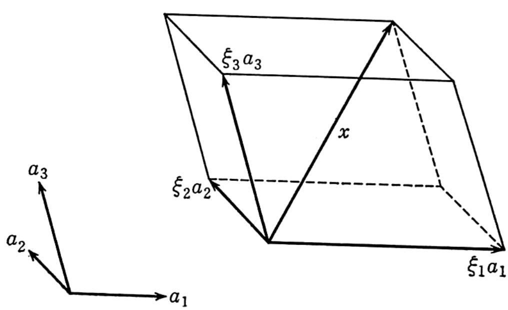


図1.5

$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3$ に対して $\boldsymbol{x}=\Psi(x)$ となる $x\in V(E^3)$ が一意的に定まる)であり，演算を保っている：

$$\Psi(x+y)=\Psi(x)+\Psi(y),\qquad \Psi(\lambda x)=\lambda\Psi(x).$$

したがって演算の基本的性質 I-(0)～(3)，II-(1)～(4) だけにもとづく $V(E^3)$ の性質を考察の対象とする限りでは，前と同じように $\boldsymbol{x}=\Psi(x)$ と同一視して $V(E^3)=\boldsymbol{R}^3$ と思ってもよい．

一方この同型写像 Ψ は，前に考えた Φ とは異なり，ベクトルの長さを保つとは限らない．もし $\|\Psi(x)\|=\|x\|$ が任意の $x\in V(E^3)$ に対して成立するものとすれば，任意の $x,y\in V(E^3)$ に対して $\langle\Psi(x+y),\Psi(x+y)\rangle=\langle x+y,x+y\rangle$ であることから，$\langle\Psi(x),\Psi(y)\rangle=\langle x,y\rangle$ でなければならないことが容易にわかる．したがってとくに $\langle\Psi(a_i),\Psi(a_j)\rangle=\langle a_i,a_j\rangle$ $(1\leqq i,j\leqq 3)$ でなければならない．ところが

$$\Psi(a_1)={}^t(1,0,0),\qquad \Psi(a_2)={}^t(0,1,0),\qquad \Psi(a_3)={}^t(0,0,1)$$

であるから，けっきょく $\langle a_i,a_j\rangle=0$ $(i\neq j)$，$=1$ $(i=j)$．したがって Ψ がベクトルの長さを保つためには (a_1,a_2,a_3) が正規直交底であることが必要十分条件なのである．

空間 E^3 の1点 O と $V(E^3)$ の一つの底 (a_1,a_2,a_3) (正規直交底とはかぎらない)との組 $\Sigma=\{O;a_1,a_2,a_3\}$ を E^3 の**アフィン**(affine)**座標系**という．このような座標系をとっても，上述の Ψ によって $V(E^3)$ の元は列ベクトルとして表わすことができるのであるから，とくに任意の点 $P\in E^3$ に対してその位置ベクトル $(\overrightarrow{OP})$ を考えることによって，P の座標を定義することができる．すなわち $A^3=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}=\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\mid\xi_i\in\boldsymbol{R}\}$ とすれば

$$(1.18)\qquad \begin{cases} V(E^3)\ni(\overrightarrow{OP})\xrightarrow{\Psi}{}^t(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\boldsymbol{R}^3,\\ E^3\ni P\underset{\Sigma}{\longleftrightarrow}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in A^3.\end{cases}$$

この対応では一般に $V(E^3)$ の内積と $\boldsymbol{R}^3$ の自然な内積とは，上で注意したとおり対応していないから，いまは $\boldsymbol{R}^3$ の内積，A^3 の距離という概念は考えないことにする．

たとえば E^3 の同一直線上にない3点を通る平面は，対応(1.18)に関してパラメータ表示(1.7)をつくり，それからパラメータを消去することにより，ある1

次方程式 $\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\alpha_3\xi_3=\beta\ (\alpha_i, \beta\in\boldsymbol{R})$ をみたす A^3 の点 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) の集合として表わされることがわかる．つまり E^3 の平面が座標系に関して1次方程式で表わされるという性質は，実は E^3 の距離の概念とは無関係であることがわかる．同様にベクトルの線型独立性，平行性，直線の方程式等に関する議論は，内積を考えない $\boldsymbol{R}^3$，距離を考えない A^3 の中で完全に行なうことができる．このように E^3 の図形の性質のうちで距離に無関係なものを扱う場所という立場から考えた A^3 を($\boldsymbol{R}$ 上3次元の)**アフィン空間**という．

g) 底の変換と座標変換，空間の向きづけ

空間 E^3 のアフィン座標系を2組とり，それぞれ

$$\Sigma_1=\{O\,;a_1, a_2, a_3\},\qquad \Sigma_2=\{O'\,;a_1', a_2', a_3'\}$$

とする．各 $a_j'\in V(E^3)\ (1\leqq j\leqq 3)$ を底 (a_1, a_2, a_3) の線型結合として

$$a_j'=\sum_{i=1}^{3}\alpha_{ij}a_i\qquad (\alpha_{ij}\in\boldsymbol{R},\ 1\leqq j\leqq 3) \tag{1.19}$$

と表わすことができる．このとき行列 $A=(\alpha_{ij})$ を**底の変換** $(a_1, a_2, a_3)\to(a_1', a_2', a_3')$ の行列という．この行列の列ベクトル $\boldsymbol{a}_j={}^t(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \alpha_{3j})\ (1\leqq j\leqq 3)$ は，底 (a_1, a_2, a_3) によって定まる同型写像 $\Psi: V(E^3)\to\boldsymbol{R}^3$ による a_j' の像であり，a_1', a_2', a_3' は線型独立であるから $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ も線型独立で，したがって $\det A\neq 0$ である．

一方 $y\in V(E^3)$ を $y=\sum_{i=1}^{3}\eta_i a_i=\sum_{j=1}^{3}\eta_j' a_j'$ と表わし，この右辺に(1.19)を代入して各 a_i の係数を比較すれば，底の変換(1.19)とは双対的に**成分の変換**の式

$$\eta_i=\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij}\eta_j'\qquad (1\leqq i\leqq 3) \tag{1.20}$$

が得られる．あるいは底 (a_1, a_2, a_3) で定まる同型写像 $\Psi: V(E^3)\to\boldsymbol{R}^3$ によって $\boldsymbol{y}=\Psi(y)$，また底 (a_1', a_2', a_3') で定まる同型写像 $\Psi': V(E^3)\to\boldsymbol{R}^3$ によって $\boldsymbol{y}'=\Psi'(y)$ であるものとすれば(1.20)はまとめて

$$\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{y}' \tag{1.20$'$}$$

と表わすことができる．右辺の $A, \boldsymbol{y}'$ の積は第 i 成分が(1.20)の右辺で与えられる3次元列ベクトルを表わす．

そこで $P\in E^3$ の Σ_1 に関する座標を (ξ_1, ξ_2, ξ_3)，Σ_2 に関する座標を (ξ_1', ξ_2', ξ_3') とすれば

$$\Psi'(\overrightarrow{O'P}) = \boldsymbol{x}' = {}^t(\xi_1', \xi_2', \xi_3'), \qquad \Psi(\overrightarrow{O'P}) = A\boldsymbol{x}'.$$

したがって O' の Σ_1 に関する座標を $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ とすれば $(\overrightarrow{OP}) = (\overrightarrow{OO'}) + (\overrightarrow{O'P})$ であるから

$$\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}\xi_1'\\ \xi_2'\\ \xi_3'\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}, \tag{1.21}$$

すなわち $\xi_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\xi_j' + \beta_i \ (1 \leqq i \leqq 3)$ が得られる．これが座標系を Σ_1 から Σ_2 にかえたときに，同一点の 2 通りの座標の間の関係を表わす**座標変換**の式である．

例 1.1　座標系 Σ_1 に関して方程式 $F(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ で表わされる E^3 の図形は，(1.21)をこの方程式に代入することにより，Σ_2 に関しては $F'(\xi_1', \xi_2', \xi_3') = 0$ の形に表わされるわけであるが，とくに F を n 次の多項式であるとすれば(1.21)の右辺が ξ_1', ξ_2', ξ_3' の 1 次式であることにより，F' は n 次以下の，実はちょうど n 次の多項式となるのである．同じことであるから簡単のために，E^2 における 2 次曲線の例を考えよう．直交座標系 $\Sigma_1 = \{O; e_1, e_2\}$ に関して 2 次方程式

$$(\xi_1 - 1)(\xi_2 + 1) = \frac{1}{2} \tag{$*$}$$

で表わされる曲線は周知のとおり双曲線である．いま

$$O' \underset{\Sigma_1}{\longleftrightarrow} (1, -1), \qquad e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \qquad e_2' = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2$$

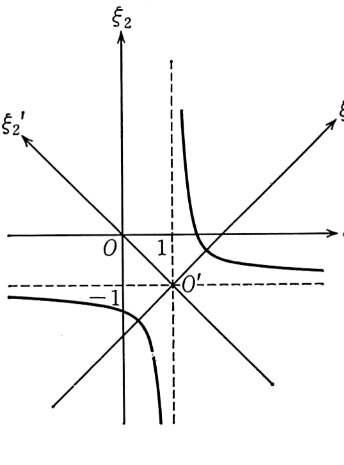


図 1.6

とすれば，e_1', e_2' は線型独立であるから $\Sigma_2=\{O';e_1',e_2'\}$ はまた E^2 の一つの座標系と考えられる．幾何的にいえば，$V(E^2)$ の底 (e_1,e_2) を左に $\pi/4$ だけ回転したものが (e_1',e_2') であるから Σ_2 はまた直交座標系である．Σ_1, Σ_2 に関する座標変換の式はいまの場合

(♯)
$$\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1'\\ \xi_2'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

で与えられる．(♯)を(＊)に代入すれば簡単な計算により

(＊＊)
$$(\xi_1')^2-(\xi_2')^2=1.$$

すなわち座標系 Σ_1 に関して(＊)で表わされる双曲線は，Σ_2 に関しては(＊＊)で表わされるのである．——

一般に任意の二つの3次正方行列 $A=(\alpha_{ij})$, $B=(\beta_{ij})$ が与えられたとき，これらに対して

(1.22)
$$\gamma_{ij}=\sum_{k=1}^{3}\alpha_{ik}\beta_{kj}\qquad(1\leqq i,j\leqq 3)$$

とおいて，新しい行列 $C=(\gamma_{ij})$ が得られる．この行列 C を A,B の積といい，$C=AB$ で表わす．このように定義された3次正方行列の間の乗法は‘可換性’をもたない．すなわち一般には $AB=BA$ であるとは限らない．

例 1.2
$$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$
——

3次正方行列 $I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ を(3次の)**単位行列**というが，この行列は任意の3次正方行列 A に対して $AI=IA=A$ をみたす．

行列の積の行列式に関する次の性質は重要である：

(1.23)
$$\det(AB)=\det A\cdot\det B.$$

これは後に第4章で一般的に証明するが，いまの場合3次行列式の定義と(1.22)とを用いて直接計算によって示すことも容易である．

2次正方行列 $A=(\alpha_{ij})$, $B=(\beta_{ij})$ に対してもその積 $C=(\gamma_{ij})=AB$ を(1.22)と同様に $\gamma_{ij}=\sum_{k=1}^{2}\alpha_{ik}\beta_{kj}\ (i,j=1,2)$ によって定義する．この場合にも(1.23)を直

接計算によって確かめることができる.

問 2次および3次の行列式について(1.23)を証明せよ. ——

さてベクトル空間 $V(E^3)$ の底 (a_1, a_2, a_3) によって定まる同型写像を $\Psi: V(E^3) \to \boldsymbol{R}^3$ とする. 3次正方行列 $A=(\alpha_{ij})$ が与えられたとき, $a_j'=\sum_{i=1}^{3}\alpha_{ij}a_i\ (1\leqq j\leqq 3)$ とおいて三つのベクトル a_1', a_2', a_3' が得られるが, これらの Ψ による像 $\boldsymbol{a}_j=\Psi(a_j')\ (1\leqq j\leqq 3)$ が A の列ベクトルと一致している. したがって, (a_1', a_2', a_3') がまた $V(E^3)$ の底であること, すなわち, a_1', a_2', a_3' が $V(E^3)$ の中で線型独立であることと, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が $\boldsymbol{R}^3$ の中で線型独立であることとは同値である. ゆえに A がある底の変換 $(a_1, a_2, a_3)\to(a_1', a_2', a_3')$ の行列であるための必要十分条件は A の行列式が0ではないこと ($\det A\neq 0$) である.

次に $A=(\alpha_{ij})$ を底の変換 $(a_1, a_2, a_3)\to(a_1', a_2', a_3')$ の行列, $B=(\beta_{ij})$ を底の変換 $(a_1', a_2', a_3')\to(a_1'', a_2'', a_3'')$ の行列とすれば, $a_j''=\sum_{k=1}^{3}\beta_{kj}a_k'$, $a_k'=\sum_{i=1}^{3}\alpha_{ik}a_i$. したがって $a_j''=\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3}\alpha_{ik}\beta_{kj}\right)a_i$ となって, 底の変換 $(a_1, a_2, a_3)\to(a_1'', a_2'', a_3'')$ の行列がちょうど A, B の積 AB で与えられることがわかる. とくに A の逆変換 $(a_1', a_2', a_3')\to(a_1, a_2, a_3)$ の行列を A' とすれば

$$AA' = A'A = I. \tag{1.24}$$

一般に行列 A に対して(1.24)をみたす行列 A' が存在するとき, A を正則行列といい, A' を A の逆行列といって $A'=A^{-1}$ で表わす. $\det A\neq 0$ ならば A はある底の変換の行列であるから当然(1.24)をみたす A' があり, したがって正則行列である. 逆に A が正則行列ならば(1.24)の行列式を考えて

$$\det(AA') = \det A\cdot\det A' = \det I = 1,$$

したがって $\det A\neq 0$ であることがわかる. すなわち

$$\begin{aligned} A\ \text{は正則行列} &\iff \det A \neq 0, \\ &\iff A\ \text{の列ベクトルは線型独立}, \\ &\iff A\ \text{はある底の変換の行列}. \end{aligned}$$

実係数の3次正則行列全体の集合を $GL(3, \boldsymbol{R})$ で表わせば, $A, B\in GL(3, \boldsymbol{R})$ ならば $AB\in GL(3, \boldsymbol{R})$ であったから, 行列の乗法を $GL(3, \boldsymbol{R})$ の中だけに制限して考えることができる. このとき次の三つの性質が基本的である:

(1) $A(BC)=(AB)C$ (結合則),

(2) $I\in GL(3, \boldsymbol{R})$ $(AI=IA=A)$,

(3)　$A \in GL(3, \boldsymbol{R}) \Longrightarrow A^{-1} \in GL(3, \boldsymbol{R}) \quad (AA^{-1}=A^{-1}A=I)$.

性質(1)は底の変換を3回行なう場合のことを考えれば明らかであるが，実数の乗法における結合則と行列の乗法の定義とから直接証明することもできる．一般にある演算の定義された集合は，その演算に関してこの(1), (2), (3)に相当する性質をもっているときに，群とよばれるが，その意味で $GL(3, \boldsymbol{R})$ を $\boldsymbol{R}$ 上の3次の**一般線型群**という．

次に空間 E^3 の向きづけを明確な形で定義しよう．いまの場合もともと直観的に右手系，左手系どちらか一方の座標系を指定するというだけでも，E^3 の向きづけは得られるわけであるが，たとえば(1.9)によって定義されたベクトル $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ のベクトル積 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ の向きを明確に述べる判定規準が容易に得られる形にしたいのである．

そこで $V(E^3)$ の一つの底 (a_1, a_2, a_3) を一つ固定しておき，これをたとえば右手系であるものとしよう．任意の3次正方行列 $A=(\alpha_{ij})$ に対して $a_j'=\sum_{i=1}^{3} \alpha_{ij} a_i$ $(1 \leqq j \leqq 3)$ とおいて α_{ij} $(1 \leqq i, j \leqq 3)$ を変数と考えれば，ベクトル a_j' $(1 \leqq j \leqq 3)$ は α_{ij} $(1 \leqq i \leqq 3)$ の変化にしたがって連続的に変化する．また行列式 $\det A$ は α_{ij} $(1 \leqq i, j \leqq 3)$ の連続関数であり，とくに単位行列 $A=I$ のとき $\det I=1>0$ である．これ等のことから $(a_1, a_2, a_3) \to (a_1', a_2', a_3')$ と連続的に変化する過程で $\det A>0$ である間は (a_1', a_2', a_3') は右手系であり続けることがわかる．実際，左手系にうつるときには a_1', a_2', a_3' は一度線型従属になり，そのとき $\det A=0$ となってしまうからである．

またたとえば底の変換 $(a_1, a_2, a_3) \to (a_1, a_3, a_2)$ の行列を A_0 とすれば

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

明らかに (a_1, a_3, a_2) は左手系である．$\det A_0=-1<0$ であるから，$\det A<0$ のとき $A_1=A_0^{-1}A$ とおけば(1.23)によって $\det A_1>0$．したがって $\det A<0$ のときには，A による底の変換 $(a_1, a_2, a_3) \to (a_1', a_2', a_3')$ を考えるかわりに A_1 による底の変換 $(a_1, a_3, a_2) \to (a_1', a_2', a_3')$ を考えれば，上と同様にして (a_1', a_2', a_3') は左手系であることがわかる．

これらのことを考慮して，$V(E^3)$ の二つの底 $\mathfrak{A}=(a_1, a_2, a_3)$，$\mathfrak{A}'=(a_1', a_2', a_3')$

に対して底の変換 $\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}'$ の行列 A の行列式が正 $(\det A>0)$ であるとき $\mathfrak{A}\sim\mathfrak{A}'$ で表わすことにすれば，この関係 $\sim$ は次の三つの性質をみたす：

(1) $\mathfrak{A}\sim\mathfrak{A}$ $\quad(\because\ \det I=1>0)$,

(2) $\mathfrak{A}\sim\mathfrak{A}'\Longrightarrow\mathfrak{A}'\sim\mathfrak{A}$ $\quad(\because\ \det A>0\Longrightarrow\det A^{-1}=(\det A)^{-1}>0)$,

(3) $\mathfrak{A}\sim\mathfrak{A}',\ \mathfrak{A}'\sim\mathfrak{A}''\Longrightarrow\mathfrak{A}\sim\mathfrak{A}''$ $\quad(\because\ (1.23))$.

したがって $V(E^3)$ の底全体の集合を S とすれば，(有向線分全体の集合から $V(E^3)$ をつくったときと同様の意味で) $\sim$ は S に一つの同値関係を定めている．上で考慮したことは，S がちょうど右手系，左手系の二つの類に分けられることを示している．この二つの類のことを E^3 の**向き**といい，向きをどちらか一つに指定してその類に含まれる底だけによって E^3 の座標系を考えることを，E^3 を**向きづける**というわけである．

例 1.3 $V(E^3)$ に正規直交底 (e_1,e_2,e_3) を一つ固定しておき，同型写像 Φ: $V(E^3)\ni x=\sum_{i=1}^{3}\xi_ie_i\to{}^t(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\boldsymbol{R}^3$ によって $V(E^3)=\boldsymbol{R}^3$ と同一視する．このときベクトル $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\boldsymbol{R}^3$ のベクトル積を(1.9)によって定義すれば，$(e_1,e_2,e_3)\to(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ の行列は，$\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ を列ベクトルとする行列 $A=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ で与えられる．行列式の性質(2)$'$と(1.16)とを用いて

$$\det(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\det(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\langle\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\rangle\geqq 0.$$

したがって e_1,e_2,e_3 が右手系(または左手系)をなすならば $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ もこの順序で右手系(または左手系)をなす．——

h) 線型変換とアフィン変換

座標変換の式(1.21)はそれ自体だけをみるならば，もう一つ別の解釈をすることができる．座標系を一つだけ考えているものとし，それを Σ とする．Σ に関する座標が (ξ_1',ξ_2',ξ_3') で表わされる E^3 の点を P'，P' の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}'={}^t(\xi_1',\xi_2',\xi_3')$ とすれば $A\boldsymbol{x}'\in\boldsymbol{R}^3$ であるから，$A\boldsymbol{x}'$ を位置ベクトルとする点 $Q\in E^3$ が一意的に定まる．この Q をさらにベクトル $\boldsymbol{b}={}^t(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ に沿って平行移動して得られる点を P とし，P の座標を (ξ_1,ξ_2,ξ_3)，P の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}={}^t(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ とすれば明らかに $\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{b}$ であり，(1.21)と同じ式が得られる．すなわち(1.21)は $P'=(\xi_1',\xi_2',\xi_3')$ から $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ への移動を表わす式と考えることもできるのである．

例 1.4 平面 E^2 に直交座標系 $\Sigma=\{O;e_1,e_2\}$ を一つだけ固定して考えるとき，

例1.1の変数変換

$$(\sharp)\qquad \begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1'\\ \xi_2'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

は点(ξ_1', ξ_2')をまず原点Oのまわりに$\pi/4$だけ左に回転させ，つぎにe_1方向に沿って1，e_2方向にそって-1だけ平行移動させるE^2上の点の移動$(\xi_1', \xi_2')\to(\xi_1, \xi_2)$を表わす式と考えられる．すなわち，$E^2$上の‘変換’$\varphi: E^2\ni(\xi_1', \xi_2')\mapsto(\xi_1, \xi_2)\in E^2$を与えている．このとき曲線

$$(\xi_1')^2-(\xi_2')^2=1 \quad \cdots\cdots C_2$$

は全体として曲線

$$(\xi_1-1)(\xi_2+1)=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots C_1$$

にうつる：$C_1=\varphi(C_2)$．実際C_1に(#)を代入してC_2が得られることは，φによってC_1にうつるE^2の点全体の集合がC_2であることを示している：$\varphi^{-1}(C_1)=C_2$．いまの場合とくにφが回転と平行移動だけで定まっているために，曲線C_2のφによる像$C_1=\varphi(C_2)$はC_2と合同な曲線であることがわかる．——

一般に$V(E^3)$から$V(E^3)$自身への写像Fが

$$(1.25)\qquad F(x_1+x_2)=F(x_1)+F(x_2), \qquad F(\lambda x)=\lambda F(x) \quad (\lambda\in \boldsymbol{R})$$

をみたすとき，Fを$V(E^3)$の線型変換という．$V(E^3)$の底(a_1, a_2, a_3)を一つ固定しておき，$A=(\alpha_{ij})$を一つの3次正方行列(正則とは限らない)とする．この底に関して

$$V(E^3)\ni x=\sum_{j=1}^{3}\xi_j a_j \longleftrightarrow \boldsymbol{x}={}^t(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\in \boldsymbol{R}^3,$$

$$V(E^3)\ni y=\sum_{i=1}^{3}\eta_i a_i \longleftrightarrow \boldsymbol{y}={}^t(\eta_1, \eta_2, \eta_3)=A\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^3$$

であるときに$y=F_A(x)$とおけば，F_Aは$V(E^3)$の線型変換である．実際$A(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=A\boldsymbol{x}_1+A\boldsymbol{x}_2$，$A(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda A\boldsymbol{x}$は単純な計算によって確かめられる．この$F_A$を底$(a_1, a_2, a_3)$に関して$A$に対応する線型変換という．逆に$F$を$V(E^3)$の任意の線型変換として，$F(a_j)=\sum_{i=1}^{3}\alpha_{ij}a_i$ $(\alpha_{ij}\in \boldsymbol{R},\ 1\leqq j\leqq 3)$とおけば$F=F_A$である．実際$x=\sum_{j=1}^{3}\xi_j a_j\in V(E^3)$とすれば

$$F(x) = \sum_{j=1}^{3} \xi_j F(a_j) = \sum_{j=1}^{3} \xi_j \left(\sum_{i=1}^{3} \alpha_{ij} a_i \right) = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} \xi_j \right) a_i = F_A(x).$$

この行列 A を F の底 (a_1, a_2, a_3) に関する行列という．このようにして，$V(E^3)$ に底を一つ固定しておけば，$V(E^3)$ の線型変換 $F=F_A$ を考えることと，$\boldsymbol{R}^3$ 上の線型変換 $\boldsymbol{R}^3 \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ を考えることとは同じであることがわかる．

問 $F_A = F_B$ ならば $A=B$ であることを証明せよ．——

とくに単位行列 I に対応する線型変換 F_I は $V(E^3)$ 上の恒等変換(任意の $x \in V(E^3)$ を x 自身に写す変換)である．また，二つの線型変換 F_1, F_2 に対して $F_1 \circ F_2(x) = F_1(F_2(x))$ $(x \in V(E^3))$ とおくことにより新しい変換をつくれば，これはまた線型変換であり，とくに $F_A \circ F_B = F_{AB}$ であることは容易に証明できる．さらに線型変換 F が全単射ならば，その逆変換 F^{-1} が定義できる($F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F$ ＝恒等変換)．このとき逆変換 F^{-1} はまた線型変換である．実際 $F=F_A$ が全単射であることは，いまの場合任意の $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して連立1次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ の解が一意的に定まるということと同じであるが，d)でみたとおり，そのためには ${}^tA$ の列ベクトルが線型独立であること，したがってまた $\det A = \det {}^tA \neq 0$ であること，すなわち A が正則行列であることが必要十分である．$F_A \circ F_{A^{-1}} = F_{A^{-1}} \circ F_A = F_I$ であるから $F_A^{-1} = F_{A^{-1}}$ となり，F_A^{-1} はたしかに線型変換である．全単射である線型変換(したがって正則行列 A に対応する線型変換)を**正則線型変換**という．

次に空間 E^3 にアフィン座標系 $\Sigma = \{O; a_1, a_2, a_3\}$ を一つ固定してあるものとする．変換 $\varphi: E^3 \to E^3$ に対して線型変換 $F: V(E^3) \to V(E^3)$ を適当にとれば，任意の $P \in E^3$ について

$$(\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}) = F((\overrightarrow{OP})) \tag{1.26}$$

が成立するとき，φ を E^3 の**アフィン変換**という．これはまた $(\overrightarrow{O\varphi(P)}) = F((\overrightarrow{OP})) + (\overrightarrow{O\varphi(O)})$ と変形できるから，Σ に関する座標が

$$\varphi(O) \longleftrightarrow (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \qquad P \longleftrightarrow (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \qquad \varphi(P) \longleftrightarrow (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$$

であるものとし，F の底 (a_1, a_2, a_3) に関する行列が A であるとすれば(1.26)は

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \tag{1.26$'$}$$

で表わされる．つまり座標系 Σ に関して(1.26)′ によって定まる E^3 の変換 φ: $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mapsto (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ を，E^3 のアフィン変換というのである．

問　アフィン変換 $\varphi: E^3 \to E^3$ は，座標系をまったく用いないで，'有向線分比を不変に保つ変換'，すなわち任意の $P, Q \in E^3$，$\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$(\overrightarrow{P_1Q_1}) = \lambda(\overrightarrow{PQ}) \implies (\overrightarrow{\varphi(P_1)\varphi(Q_1)}) = \lambda(\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)})$$

をみたすもの，として定義しても上の定義と同値になることを証明せよ．——

とくに(1.26)の F が正則線型変換であるとき，すなわち(1.26)′ の A が正則行列であるとき，φ を**正則アフィン変換**という．

問　正則アフィン変換 φ は全単射であり，φ^{-1} もまたアフィン変換であることを証明せよ．——

また Σ を直交座標系とし，F は $V(E^3)$ の内積を不変に保つ変換であるとしよう．Σ に関して

$$V(E^3) \ni x \longleftrightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3, \quad x' \longleftrightarrow \boldsymbol{x}', \quad F \longleftrightarrow A$$

であるものとすれば

$$\langle x, x' \rangle = \langle F(x), F(x') \rangle = \langle A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}' \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \rangle.$$

このような線型変換 F を $V(E^3)$ の**直交変換**，また行列 A を**直交行列**という．このとき(1.26)，あるいは(1.26)′ で定義される φ は E^3 における線分の長さ，線分の間の角を不変にする変換であるから，E^3 の**合同変換**とよばれる．空間 E^3 の図形について，任意の合同変換によって不変な性質を調べる幾何学が(E^3 における) Euclid 幾何学であるといえる．

これに対して f)の最後に述べた，アフィン空間 A^3 の中で議論できる性質というのは，つまりは任意の正則アフィン変換によって不変な E^3 の図形の性質のことであり，そのような性質を調べる幾何学を E^3 における**アフィン幾何学**というのである．

§1.2　線型代数

空間 E^3 のベクトルは本来視覚的なものであり，原始的な図形の数学と密接に関係している．その演算の基本的な性質 I-(0)～(3), II-(1)～(4) も具体的な図形上の意味をもっている．一方ある未知の量を，それがみたす条件を式で表わして，代数的な演算によって決定するいわゆる方程式の考え方は，やはりもっとも

基本的な方法の一つである．座標系という概念が導入されることにより，図形と方程式という二つの基本的な対象がはじめて同一のものとして扱えるようになるわけであるが，その初等的な場合は前節でみたとおりである．さらに座標をいくつかの‘変数’の特殊な値と考えることによって，動的なものも数学の対象として把えることができるようになり，たとえば微分方程式のような間接的な形の方程式も考察できることになるのである．

多くの未知数をもつ方程式を考える場合に，まずその未知数の個数と同じだけ独立変数を考え，変数が動く場所(空間)を想定する．方程式をその‘空間’の中のある図形を定める条件と考えることによって一般の次元の幾何学を想像することができる．独立変数の個数を次元というわけである．しかしこれはかなり粗雑な想像であり，実際にはその方程式の種類，またはその解を考える範囲等によって変数の動く場所に諸種の制限が加えられるであろうし，方程式に変数変換を行なうたびに解を考える場所が変化するような場合にはそれらの場所を合理的につなぎ合わせたものを‘空間’として考えなければならないこともある．そこでもっとも単純で扱いやすい場合として，連立1次方程式を考える．この場合には空間としては3次元 Euclid 空間 E^3 と多くの点で類似性をもつものを考えれば十分であり，連立1次方程式の図形としては直線，平面のようにいわば平坦なものを想像することができるわけである．もっと複雑な方程式あるいは図形については，場合によっては局所的に1次方程式で近似するとか，‘平面’による切り口の形状を調べる等の方法によってその性質を間接的に知ることもできるわけであるから，少なくとも1次方程式についてすべてのことが明確になっていることは重要である．

ところで空間 E^3 に付随するベクトル空間 $V(E^3)$ を考えると E^3 の図形が把えやすくなった理由は，$V(E^3)$ には加法，スカラー乗法という2種類の算術的な演算が自然な仕方で定義されていて，E^3 のいくつかの点の位置関係，図形の平行移動等がベクトルの演算で表示されることにある．$V(E^3)$ の底を考えることにより実際にこれ等の演算を完全に算術化することができた．一般に集合 V に加法，スカラー乗法という算術的な2種類の演算が定義されていて，$V(E^3)$ の場合と類似の性質 I-(0)～(3), II-(1)～(4) を基本にもっているとき，V を**線型空間**，あるいは**ベクトル空間**という．またスカラー乗法を定めているスカラーの

範囲(たとえば実数全体)が同じである二つの線型空間 V_1, V_2 に対して写像 F: $V_1 \to V_2$ が

$$F(x+y) = F(x)+F(y), \qquad F(\lambda x) = \lambda F(x) \quad (\lambda: \text{スカラー})$$

をみたしているとき，F を線型写像という．これは基本的な2種類の演算を保っている，いわば1次式的な写像である．$F: V_1 \to V_2$ を線型写像とし，$b \in V_2$ が与えられたものとするとき，b の F による逆像 $F^{-1}(b)$ を求めること，すなわち方程式 $F(x)=b$ を解くことは，1次方程式を解くことと同種の問題と考えることができるのである．実際たとえば3個の未知数，3個の式からなる連立1次方程式は(1.13)′で述べたとおり，3次正方行列 A と列ベクトル $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3$ により $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ で表わされるが，これを解くことは線型写像 $F: \boldsymbol{R}^3 \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ に関して $F^{-1}(\boldsymbol{b})$ を求めることと同じである．

線型空間および線型写像を扱うための一般論をできるだけ多くの場合に具体的に適用できる形で整理するのが線型代数である．以下この節では基本的な二つの場合について述べる．

a) 列ベクトル空間

具体的に与えられた実係数の連立1次方程式を解くもっとも一般的で基本的な方法は，実数の加減乗除にもとづいて順次未知数を消去していく，いわゆる消去法である．有理数の間に加減乗除を行なってもやはり有理数であることから，有理係数の連立1次方程式が実数の範囲で考えて解をもつならば，有理数の範囲だけで考えても解をもつことがわかる．

一般に加法，乗法という2種類の演算が定義されていて，四則演算が完全に行なわれる集合 K のことを**体**という．たとえば有理数全体 $\boldsymbol{Q}$，実数全体 $\boldsymbol{R}$，複素数全体 $\boldsymbol{C}$ は通常の加法，乗法によって体であり，それぞれ**有理数体**，**実数体**，**複素数体**とよばれる．他にも無数の体が考えられるが，以下の議論は同様に行なうことができるのであるから，さしあたりは体 K を $\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ のどれか一つと思ってもさしつかえない．

体 K の元を係数とする n 個の未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ についての m 個の1次方程式の系

$$(1.27) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (a_{ij}, b_i \in K,\ 1 \leqq i \leqq m)$$

が与えられているものとする．とくに b_i $(1 \leqq i \leqq m)$ がすべて0であるとき，この連立1次方程式は**同次**であるという．(1.27)をみたす x_j $(1 \leqq j \leqq n)$ を K の元として完全に決定することを，この連立1次方程式を解くというのである．

連立1次方程式(1.27)はまた

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

とおいて簡単に

(1.27)′ $$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と表わすことができる．左辺の積 $A\boldsymbol{x}$ は m 個の元 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ $(1 \leqq i \leqq m)$ をたてに並べたものを表わす．

このような $A=(a_{ij})$ を K 上の m 行 n 列の**行列**，あるいは簡単に (m,n) 型行列といい，とくに $m=n$ のときは n 次正方行列という．とくに今の場合，連立1次方程式(1.27)の**係数行列**というのである．また a_{ij} を A の (i,j) 成分，$a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ をこの順序で横に並べたものを A の第 i **行ベクトル**，$a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}$ をこの順序でたてに並べたものを A の第 j **列ベクトル**という．第 j 列ベクトルを $\boldsymbol{a}_j$ で表わし，$A=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ のように表わすこともある．体 K 上の $(n,1)$ 型行列をとくに n 次元**列ベクトル**といい，K 上の n 次元列ベクトル全体の集合を K^n で表わす．(1.27)′ の $\boldsymbol{x}$ は n 次元列ベクトル，$\boldsymbol{b}$ は m 次元列ベクトルである．(1.27)あるいは(1.27)′ を解くことは

(1.28) $$F_A : K^n \ni \boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x} \in K^m$$

で定義される写像 F_A に関して，$\boldsymbol{b}$ の逆像 $F_A^{-1}(\boldsymbol{b})$ (F_A によって $\boldsymbol{b}$ にうつる K^n の元全体)を具体的にかき表わすことにほかならない．

ところで方程式(1.27)は，n 個の独立変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ をもつ‘空間’

$$A_K{}^n = \{(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \mid \xi_i \in K\}$$

の中である図形を定める条件と考えることによって，§1.1 の d)で考察したいくつかの連立1次方程式の図形的な意味での一般化とみなすこともできる．ただしこの場合，体 K は $\boldsymbol{R}$ とは限らず，たとえば $\boldsymbol{Q}$ であるかもしれないわけであり，距離や内積に関係する概念を無反省に用いるわけにはいかない．しかしある座標

系に関して平面が1次方程式で表わされるという性質は，E^3 の距離の概念とは無関係に $A^3=A_R{}^3$ の中で議論できるものであった．したがって上記の $A_K{}^n$ を体 K 上の n 次元**アフィン空間**といい，その中で1個の1次方程式で表わされる‘図形’を $A_K{}^n$ の**超平面**とよんでも，これは概念の極めて自然な拡張にすぎないのである．同様の意味で，たとえば $A_K{}^n$ の中で2次方程式 $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j+\sum_{i=1}^{n} b_ix_i+c=0$ $(a_{ij}, b_i, c \in K)$ で表わされる図形を2次超曲面という．連立1次方程式(1.27)は $A_K{}^n$ の中で m 個の超平面の共通部分を表わしているわけであるが，このような図形を一般に**アフィン部分空間**，あるいは線型部分空間というのである．

$A_K{}^n$ の2点 $P=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，$Q=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ の順序も考えた組を $\overrightarrow{PQ}$ で表わし，これを P を始点，Q を終点とする**有向線分**という．有向線分 $\overrightarrow{PQ}$ に対して n 次元列ベクトル $\boldsymbol{a}={}^t(\eta_1-\xi_1, \cdots, \eta_n-\xi_n)={}^t(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ を $\overrightarrow{PQ}$ で表わされるベクトルといい，$\boldsymbol{a}=(\overrightarrow{PQ})$ で表わす．また $O=(0, 0, \cdots, 0)$ として

$$\boldsymbol{x} = (\overrightarrow{OP}) = {}^t(\xi_1, \cdots, \xi_n), \qquad \boldsymbol{y} = (\overrightarrow{OQ}) = {}^t(\eta_1, \cdots, \eta_n)$$

をそれぞれ P, Q の位置ベクトルという．このとき $\eta_i=\xi_i+\alpha_i$ $(1\leqq i\leqq n)$ であるから，これをまとめて $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}$ で表わし，3次元の場合との類似性にしたがって，点 P はベクトル $\boldsymbol{a}$ に沿って平行移動すれば点 Q にうつると考える．すなわち，K^n 内の変換 $\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ に沿った $A_K{}^n$ 内の平行移動 $P\to Q$ を表わしているとみなすのである．

次に他の2点 $P'=(\xi_1', \cdots, \xi_n')$，$Q'=(\eta_1', \cdots, \eta_n')$ に対して

$$\boldsymbol{a}' = {}^t(\eta_1'-\xi_1', \cdots, \eta_n'-\xi_n') = (\overrightarrow{P'Q'})$$

とするとき，ある K の元 λ によって

$$(\eta_1'-\xi_1') : (\eta_1-\xi_1) = \cdots = (\eta_n'-\xi_n') : (\eta_n-\xi_n) = \lambda$$

であるならば，これも3次元の場合との類似性にしたがって有向線分 $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{P'Q'}$ は平行であるといい，λ をその有向線分比という．このとき $\eta_i'-\xi_i'=\lambda(\eta_i-\xi_i)$ $(1\leqq i\leqq n)$ であるから，これをまとめて $\boldsymbol{a}'=\lambda\boldsymbol{a}$ で表わす．とくに $\lambda=1$ のとき，有向線分 $\overrightarrow{PQ}$ はその上の点をすべてベクトル $(\overrightarrow{PP'})$ に沿って同時に平行移動すれば有向線分 $\overrightarrow{P'Q'}$ にうつると考えることができるわけである．

以上により，空間 $A_K{}^n$ の中での幾何学的議論を A^3 の場合の自然な拡張として行なうためには，n 次元列ベクトルの集合 K^n の中に次のような演算を定義しなければならないことがわかる．

$$\textbf{加法}:\quad \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix},$$

$$\textbf{スカラー乗法}:\quad \lambda\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{bmatrix} \qquad (\lambda \in K).$$

これらが $\boldsymbol{R}^3$ における演算の自然な拡張になっているのは明らかであるが，とくに

$$\boldsymbol{o} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \ (\text{零ベクトル}), \qquad -\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{bmatrix}$$

とおけば，$V(E^3)$, $\boldsymbol{R}^3$ における加法，スカラー乗法と同様に演算の基本的性質 I-(0)～(3), II-(1)～(4) をみたしていることが，K が体であることから自然に導かれる．そこで K^n に上述のように加法，スカラー乗法を定義して，これを体 K 上の n 次元**列ベクトル空間**というのである．体 K 自身を K 上の 1 次元列ベクトル空間とみなすこともできる．

n 次元列ベクトル空間 K^n の元で，とくに第 i 番目の成分が 1，他の成分はすべて 0 であるものを $\boldsymbol{e}_i$ で表わすことにしよう．すなわち

$$\boldsymbol{e}_1 = {}^t(1, 0, \cdots, 0), \quad \boldsymbol{e}_2 = {}^t(0, 1, 0, \cdots, 0), \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}_n = {}^t(0, \cdots, 0, 1).$$

任意の列ベクトル $K^n \ni \boldsymbol{x} = {}^t(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ は明らかにこれらの**線型結合** $\sum_{i=1}^{n} \xi_i \boldsymbol{e}_i$ として一意的に表わすことができる．そこで組 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ を K^n の**標準底**とよぶことにする．

列ベクトル空間から列ベクトル空間への写像 $F: K^n \to K^m$ が線型写像であるというのは

$$F(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = F(\boldsymbol{x}) + F(\boldsymbol{y}), \qquad F(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda F(\boldsymbol{x})$$

がすべての $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K^n$, $\lambda \in K$ について成立することであった．これについては次の定理が基本的である．

定理 1.1 任意の (m, n) 型行列 A に対して写像

$$F_A : K^n \ni \boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x} \in K^m$$

は線型写像である．逆に任意の線型写像 $F: K^n \to K^m$ に対して (m, n) 型行列 A が $F = F_A$ となるように一意的に定まる．

証明　$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=A\boldsymbol{x}+A\boldsymbol{y}$, $A(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda A\boldsymbol{x}$ であることはそれぞれの両辺を定義にしたがって計算すれば容易に証明できる．したがって F_A は線型写像である．逆に F を線型写像とし，K^n の標準底を $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ として $F(\boldsymbol{e}_j)=\boldsymbol{a}_j \in K^m$ $(1\leqq j\leqq n)$ とおく．第 j 列ベクトルが $\boldsymbol{a}_j$ である行列 $A=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ は (m, n) 型であるが，この行列 A によって $F=F_A$ となる．実際任意の K^n の元 $\boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\boldsymbol{e}_j$ に対して $F(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{n}\xi_jF(\boldsymbol{e}_j)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\boldsymbol{a}_j$. これが $A\boldsymbol{x}$ に等しいことは両者の第 i 番目の成分がともに $\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\xi_j$ (ただし $A=(a_{ij})$) と一致することから明らかである．すなわち $F(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}=F_A(\boldsymbol{x})$. 次に二つの (m, n) 型行列 $A=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$, $B=(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n)$ $(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_j \in K^m)$ に対して $F_A=F_B$ であるものとする．このとき $F_A(\boldsymbol{e}_j)=F_B(\boldsymbol{e}_j)$ $(1\leqq j\leqq n)$. ところが $F_A(\boldsymbol{e}_j)=\boldsymbol{a}_j$, $F_B(\boldsymbol{e}_j)=\boldsymbol{b}_j$ であるから行列 A, B の各列ベクトルは一致する：$\boldsymbol{a}_j=\boldsymbol{b}_j$ $(1\leqq j\leqq n)$. したがって $A=B$ である．▌

写像 $\varphi: A_K{}^n \ni P=(\xi_1, \cdots, \xi_n)\mapsto Q=(\eta_1, \cdots, \eta_m)\in A_K{}^m$ に対して (m, n) 型行列 A と m 次元列ベクトル $\boldsymbol{b}={}^t(\beta_1, \cdots, \beta_m)$ が定まり，P の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}={}^t(\xi_1, \cdots, \xi_n)$, Q の位置ベクトルを $\boldsymbol{y}={}^t(\eta_1, \cdots, \eta_m)$ とすれば

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b} \tag{1.29}$$

であるときに，φ を $A_K{}^n$ から $A_K{}^m$ へのアフィン写像という．とくに $m=n$ であるとき，φ を $A_K{}^n$ 上のアフィン変換というのである．(1.26)′ の一般化にほかならない．

b）線型常微分方程式

実数のある区間 J 上の関数で ν 回連続微分可能なもの全体の集合を $C^\nu(J)$ で表わす．これに関数の通常の加法とスカラー乗法を考えて $\boldsymbol{R}$ 上の線型空間とみなすことができる．すなわち，$f, g\in C^\nu(J)$, $\lambda\in\boldsymbol{R}$ に対して

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \qquad (\forall x\in J)$$

とおけば，$f+g$, $\lambda f\in C^\nu(J)$ であり，加法とスカラー乗法に関する基本的性質 I-(0)～(3), II-(1)～(4) がみたされている．この場合，零ベクトルとは定数関数 0 のことであり，f に対して $-f$ は $(-f)(x)=-f(x)$ $(\forall x\in J)$ で定義されるものである．

さて $p_1, \cdots, p_n, q$ を実1変数の関数とし，未知関数 y のみたす関係式

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)y = q(x) \tag{1.30}$$

を考えよう．ここで $y^{(\nu)}$ $(0\leqq\nu\leqq n)$ は y の ν 階導関数を表わす．このような関係式(1.30)を **n 階線型常微分方程式**といい，とくに $q=0$ のときこの微分方程式は**同次**であるという．また $\alpha, \beta_0, \cdots, \beta_{n-1}$ を実数として

(1.31) $$x=\alpha \quad \text{のとき} \quad y^{(\nu)}=\beta_\nu \qquad (0\leqq\nu\leqq n-1)$$

という条件のもとで微分方程式(1.30)の解を考えることを(線型常微分方程式の)初期値問題といい，このとき条件(1.31)を初期値，あるいは**初期条件**という．

簡単のために $p_1, \cdots, p_n, q \in C^\infty(J)$ としよう．このとき(1.30)の初期値問題に関する一つの基本定理を次のように述べることができる："$\alpha \in J$ とするとき，初期条件(1.31)をみたす微分方程式(1.30)の解 y がただ一つかならず存在し，しかも $y \in C^\infty(J)$." したがって $p_1, \cdots, p_n, q \in C^\infty(J)$ のときには，(いろいろな初期条件に対応する)(1.30)の任意の解がはじめから $C^\infty(J)$ に含まれるものであるとして考えてよい．

線型空間 $C^\infty(J)$ 上の変換 $y\mapsto dy/dx$ を D, 同様に，変換 $y\mapsto y^{(\nu)}$ を D^ν で表わす．(したがってとくに $D^0=I$: 恒等変換，$D^1=D$.) このとき微分演算の基本的性質によって $D^\nu(y_1+y_2)=D^\nu y_1+D^\nu y_2$, $D^\nu(\lambda y)=\lambda D^\nu y$ $(y_1, y_2, y \in C^\infty(J)$, $\lambda \in \boldsymbol{R})$ であるから D^ν は $C^\infty(J)$ 上の線型変換である．このことからまた $p_1, \cdots, p_n \in C^\infty(J)$ のとき $L=D^n+p_1D^{n-1}+\cdots+p_nI$ を

$$Ly = D^ny+p_1(x)D^{n-1}y+\cdots+p_n(x)y \qquad (\forall y \in C^\infty(J))$$

によって定義すれば，この L も $C^\infty(J)$ 上の線型変換であることがわかる．微分方程式(1.30)は L を用いて

(1.30)′ $$Ly=q$$

のように表わすことができる．すなわち微分方程式(1.30)あるいは(1.30)′を解くことは，線型変換 $L: C^\infty(J)\to C^\infty(J)$ による $q \in C^\infty(J)$ の原像 $L^{-1}(q)$ を具体的にかき表わすことであり，連立1次方程式(1.27)′の場合と類似の性格をもっているのである．

つぎに区間 J 上で定義された $\boldsymbol{R}^n$ に値をとる関数

$$\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, \cdots, y_n): J\ni t \longmapsto {}^t(y_1(t), \cdots, y_n(t)) \in \boldsymbol{R}^n$$

および $\boldsymbol{R}$ 上の n 次正方行列全体の集合 $M_n(\boldsymbol{R})$ の中に値をとる関数

$$A=(a_{ij}): J\ni t \longmapsto A(t)=(a_{ij}(t)) \in M_n(\boldsymbol{R})$$

を考える．これらが無限回連続微分可能であるとは，各成分について $y_j, a_{ij} \in$

$C^\infty(J)$ となることである．とくに $\boldsymbol{R}^n$ に値をとる J 上の無限回連続微分可能な関数全体を $C^\infty(J, \boldsymbol{R}^n)$ で表わす．$\boldsymbol{R}^n$ の加法，スカラー乗法を用いて $C^\infty(J)$ の場合と同様に，$C^\infty(J, \boldsymbol{R}^n)$ にも線型空間の構造が自然に定義される：$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y} \in C^\infty(J, \boldsymbol{R}^n)$，$\lambda \in \boldsymbol{R}$ のとき

$$(\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2)(t) = \boldsymbol{y}_1(t)+\boldsymbol{y}_2(t), \qquad (\lambda\boldsymbol{y})(t) = \lambda\boldsymbol{y}(t).$$

そこで $\boldsymbol{y}={}^t(y_1, \cdots, y_n)$ に対して $d\boldsymbol{y}/dt={}^t(dy_1/dt, \cdots, dy_n/dt)$ と定義する．連立1階微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = A(t)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b}(t) \tag{1.32}$$

を**線型系**という．ここで $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{R}^n$ に値をとる J 上の関数であり，これが $\boldsymbol{o}$ であるとき(1.32)は同次であるという．線型系の初期値問題とは，初期条件

$$t = \alpha \quad \text{のとき} \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n \tag{1.33}$$

のもとで(1.32)の解を調べることである．これについては基本定理を次のように述べることができる："$A(t), \boldsymbol{b}(t)$ が J 上で無限回連続微分可能ならば，$\alpha \in J$ のとき初期条件(1.33)をみたす(1.32)の解 $\boldsymbol{y}$ がただ一つかならず存在し，しかも $\boldsymbol{y} \in C^\infty(J, \boldsymbol{R}^n)$．"

したがって線型変換 $L=d/dt-A(t) : C^\infty(J, \boldsymbol{R}^n) \ni \boldsymbol{y} \mapsto d\boldsymbol{y}/dt-A(t)\boldsymbol{y} \in C^\infty(J, \boldsymbol{R}^n)$ を用いて(1.32)を $L\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$ のように表わすこともできるわけであり，やはり(1.27)′や(1.30)′と類似の性格をもっているのである．

実は線型常微分方程式(1.30)は線型系(1.32)に帰着させて，その特別な場合として考察することもできる．実際，$y_1=y$，$y_2=y_1'=y'$，$y_3=y_2'=y''$，$\cdots$，$y_n=y_{n-1}'=y^{(n-1)}$ とおけば(1.30)により $y^{(n)}=-p_1(x)y_{n-1}-\cdots-p_n(x)y_1+q(x)$ であるから

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -p_n(x) & -p_{n-1}(x) & \cdots & -p_1(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q(x) \end{bmatrix} \tag{1.30″}$$

が得られる．(1.30)の解は線型系(1.30)″の解の第1成分 y_1 と一致しているわけである．

ところで一般に微分方程式を解くということは，連立1次方程式の場合のよう

には明快な意味をもっていない．上述のことは単に性格上のある類似性を示したにすぎない．実際にはある微分方程式の解をよく知られた初等的な関数の多項式として表わすことができる等とは限らないのである．微分方程式としては基本的な場合にすぎない(1.30)や(1.32)についてさえも一般的な初等解法があるわけではない．

ただ(1.30)における $p_1, \cdots, p_n$, (1.32)における a_{ij} がすべて定数であるいわゆる定数係数の場合には諸種の初等解法が可能である．その一つとして，(1.30), (1.32)をある体の上の1次方程式とみなして解く方法を次の章で説明する．

それではいわゆる初等解法の不可能な微分方程式を解くというのはどういうことであろうか．目的によってもその意味は多少異なるが，まずその微分方程式に解が存在するかどうかを判定し，最終的にはその解を無限級数として表わす方法を与えること，あるいはその無限級数の性格をすべて調べることと考えてよい．そのためには微分方程式の形だけからその解の性質を判定する一般論は重要である．幾何学的には微分方程式の定義されている空間(領域)において，その解の表わす図形がどのような性質をもっているかを調べることといえる．一つだけ初等的な例を以下に述べる．

例 1.5 Euclid 平面 E^2 内の領域 $\mathscr{D}$ から E^2 に付随したベクトル空間 $V(E^2)$ への写像 $\boldsymbol{v}: \mathscr{D} \ni P \mapsto \boldsymbol{v}_P \in V(E^2)$ を $\mathscr{D}$ 上のベクトル場という．物理的には $\mathscr{D}$ の各位置においてそこに置かれた点の運動の向きと大きさとを同時に指定する力と考えてよく，たとえば定常流の場等を思い浮かべればよい．一つの座標系を E^2 に指定することにより，任意の点は座標 (x, y) で表わされ，またベクトル場 $\boldsymbol{v}$ は2変数関数 $f(x, y)$, $g(x, y)$ を成分として $\boldsymbol{v}={}^t(f(x, y), g(x, y))$ によって表わされる．$\mathscr{D}$ の任意の点 P の近傍で f, g がともに整級数として表わされるとき，すなわち f, g の P における Taylor 級数が P のある開近傍で収束するとき，$\boldsymbol{v}$ は実解析的，あるいは C^ω 級であるという．以下 $\boldsymbol{v}$ は C^ω 級であるものとする．

$\mathscr{D}$ 内の曲線 Γ が一つのパラメータ t によって表示されているものとしてその上の任意の点 $P=(x(t), y(t))$ における接ベクトル ${}^t(x'(t), y'(t))=(d/dt){}^t(x(t), y(t))$ が $\boldsymbol{v}_P$ と一致するとき，Γ をベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の**積分曲線**という．これはベクトル場 $\boldsymbol{v}$ によって動きの定められた動点の軌道のことであり，定常流の流線に相当する．いいかえれば，$\boldsymbol{v}$ の積分曲線とは微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{bmatrix} \tag{1.34}$$

が表わす $\mathscr{D}$ 内の一つの図形のことである．この形の微分方程式は，右辺の f, g が t に無関係であることから(2次元の)**自律系**とよばれる．微分方程式の基本定理によって，$\mathscr{D}$ の一つの点を指定するとその点を通る積分曲線は(1.34)によってかならず一つだけ定まることが知られている．

とくに点 $P_0=(a,b)$ において $\boldsymbol{v}_{P_0}=\boldsymbol{o}$，すなわち $f(a,b)=g(a,b)=0$ ならば，定数関数 $x=a$，$y=b$ はたしかに微分方程式(1.34)の解であり，P_0 を通る積分曲線はただ一つだけなのであるから，この場合積分曲線といってもただ1点だけからなるわけである．点 P_0 に置かれた'動点'は，その位置での運動の大きさが0と指定されているのであるから動きようがないのである．このように $\boldsymbol{v}_{P_0}=\boldsymbol{o}$ となる点 P_0 のことを，ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の**特異点**，あるいは**平衡点**という．ベクトル場のすべての特異点の近くで積分曲線がどのような状態であるか，すなわち微分方程式(1.34)の解がどのような行動をとるかを調べることは，解の性格を知るためには重要なことである．

さて，ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の一つの特異点に原点を定めた座標系をはじめから考えておけば，$f(0,0)=g(0,0)=0$ であるから原点における整級数展開は定数項をもたず，

$$f(x,y) = ax+by+(2\text{次以上の項}),$$
$$g(x,y) = cx+dy+(2\text{次以上の項})$$

の形をしている．したがってその特異点(原点)に十分近いところでの(1.34)の解の行動は，微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{1.35}$$

の解の行動に近似的にしたがうであろう．(ただし $ad-bc=0$ の場合には，この近似はあまりよいとはいえないので，それほど単純ではない．) ところで(1.35)は定数係数の同次線型系であり，実際に解を具体的にかき表わすことも容易である．つまり(1.34)の解の特異点の近くでの性質，あるいは特異点そのものの性質を調べるという幾何学的な問題は，大概な表現をすれば，線型代数的な方程式(1.35)を解くことにひとまず還元されるのである．——

§1.3　用語の整理と準備

これまでに述べてきた諸例の中にあらわれた線型代数的な性質を，とくに線型空間，線型写像，1次方程式等について，一般的な立場から説明するのが第2章以下の目的である．したがっていわば定義と命題の関係がこれまでとは逆転することもしばしば起きるはずである．たとえば“$V(E^3)$ の演算は性質 I-(0)～(3)，II-(1)～(4) をみたす”というかわりに，一般に演算の基本的性質として I-(0)～(3)，II-(1)～(4) をもつ対象を線型空間あるいはベクトル空間という名称でよび，$V(E^3)$, K^n, $C^\infty(J)$ 等をその例として考えるのである．

第2章のはじめにいくつかの代数系を定義するが，そこにあげられる公理そのものが大切なのではなく，ある対象がその公理を演算の性質としてもともとみたしているということを，ある名称によって一口で言い表わすためにすぎないのである．名称を定義することによって記述が簡明になり，場合によってはある種の対象については他の類似物を考えることによって直観的にわかりやすくなるということが大切なのである．たとえば群の演算の公理をみたしているものは無数にあり，その多くのものをわれわれはすでに知っているが，それらに共通の性質は，個別的に考えずに群という名称のもとでの一般論として述べることができるわけである．群の公理自体は本来自明なものからでき上っているのであるから，‘公理’そのものを理解しようと考えるのは意味がない．

この節ではこれまでにも自由に用いてきたものも含めていくつかの用語について述べるが，すべて趣旨は上と同様である．さらに第2章への準備として，有理整数に関するいくつかの基本的性質について説明する．

a）写像，置換

写像の概念は周知のものとみなし，ここではその結合に関する性質を簡単に復習する．

集合 S から集合 S' への写像 f を $f: S\to S'$ で表わす．このとき $f(x)=f(y)$ となるのが $x=y$ のときに限るならば，f を**単射**という．また $f(S)=S'$ であるとき，言いかえれば任意の $x'\in S'$ に対して $x'=f(x)$ となる $x\in S$ がかならずあるとき，f を**全射**という．f が単射であり，しかも全射であるとき，すなわち任意の $x'\in S'$ に対して $x'=f(x)$ となる $x\in S$ が一意的にかならず定まるとき，f を**全単射**という．

二つの写像 $f:S\to S'$, $g:S'\to S''$ が与えられたとき，$g\circ f:S\ni x\mapsto g(f(x))\in S''$ によって S から S'' への写像をつくることができる．この $g\circ f$ を f と g の**結合**という．このとき f,g がともに単射ならば $g\circ f$ も単射，f,g がともに全射ならば $g\circ f$ も全射であることが容易に証明できる．したがってまた f,g が全単射ならば $g\circ f$ も全単射である．三つの写像 $f:S\to S'$, $g:S'\to S''$, $h:S''\to S'''$ の結合について次の性質は基本的である：

(1.36) $$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f \qquad (\textbf{結合則}).$$

実際，任意の $x\in S$ に対してこの両辺の写像による像が S''' の中で一致することをいえばよいが，これは結合の定義から容易にわかる．

写像 $f:S\to S'$ が与えられたとき，$x'\in S'$ に対して S の部分集合 $\{x\in S\,|\,f(x)=x'\}$ を $f^{-1}(x')$ で表わし，これを x' の f による**逆像**という．もし $x'\notin f(S)$ ならば当然 $f^{-1}(x')=\phi$ (空集合)である．また部分集合 $T'\subset S'$ の逆像とは $f^{-1}(T')=\{x\in S\,|\,f(x)\in T'\}$ のことである．とくに f が全単射であるとき，任意の $x'\in S'$ に対して $f^{-1}(x')$ は空集合ではなくしかもただ一つの元だけからなる．そこで $f^{-1}(x')=\{x\}$ を単に $f^{-1}(x')=x$ で表わして，写像 $f^{-1}:S'\ni x'\mapsto x\in S$ を定義することができる．これを f の**逆写像**という．

集合 S から自分自身への写像を S 上の**変換**という．とくに $x\in S$ を x 自身にうつす変換を**恒等変換**といい，以下では 1, 1_S, I, I_S 等で表わす．任意の写像 $f:S\to S'$ に対して

(1.37) $$f\circ 1_S=1_{S'}\circ f=f$$

の成立することは明らかである．また $f:S\to S'$ が全単射のとき

(1.38) $$f^{-1}\circ f=1_S, \qquad f\circ f^{-1}=1_{S'}$$

が成立することも容易に証明できる．

二つの変換 $f,g:S\to S$ の結合 $g\circ f$, $f\circ g$ はまた S 上の変換であるが，一般に $g\circ f=f\circ g$ とは限らない．たとえば $f:\boldsymbol{R}\ni x\mapsto x^2\in\boldsymbol{R}$, $g:\boldsymbol{R}\ni x\mapsto x+1\in\boldsymbol{R}$ のとき，$g\circ f(x)=x^2+1$, $f\circ g(x)=(x+1)^2$, したがって $g\circ f\neq f\circ g$. とくに $g\circ f=f\circ g$ となる二つの変換 $f,g:S\to S$ は**可換**であるという．(1.37)により S 上の恒等変換 1_S は任意の S 上の変換と可換であり，また変換 $f:S\to S$ が全単射ならば(1.38)により f, f^{-1} は可換である．

集合 $S\,(\neq\phi)$ の変換で全単射であるものを S 上の**置換**という．S 上の置換の全

体を $\mathfrak{S}(S)=\{\rho,\sigma,\tau,\cdots\}$ で表わせば，全単射二つの結合はまた全単射であることから，とくに $\sigma,\tau\in\mathfrak{S}(S)$ ならば $\sigma\circ\tau\in\mathfrak{S}(S)$ である．さらに(1.36), (1.37), (1.38)により

(1)　$\rho\circ(\sigma\circ\tau)=(\rho\circ\sigma)\circ\tau$,

(2)　$1_S\in\mathfrak{S}(S)\quad(\sigma\circ 1_S=1_S\circ\sigma=\sigma)$,

(3)　$\sigma\in\mathfrak{S}(S)\implies\sigma^{-1}\in\mathfrak{S}(S)\quad(\sigma\circ\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\circ\sigma=1_S)$.

この三つの性質をみたすという意味で，$\mathfrak{S}(S)$ は写像の結合を乗法として群をなすといい，とくに S 上の**対称群**という．

S が n 個の元からなる有限集合の場合には，$\mathfrak{S}(S)$ を単に $\mathfrak{S}_n$ で表わして n 文字の対称群という．恒等置換は 1_n で表わし，結合の記号 ∘ も通常の乗法の記号 · でおきかえ，場合によってはそれも省いてしまう．いま S は有限集合であるから，元に 1 から n までの番号をつけることにより，$S=\{1,2,\cdots,n\}$ と思ってよい．そこで $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ が $\nu\mapsto i_\nu=\sigma(\nu)$ $(\nu=1,2,\cdots,n)$ によって定められているとき，$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$ で表わすことにする．σ は置換であるから $i_1,i_2,\cdots,i_n$ は相異なるものであり，$1,2,\cdots,n$ を並べかえたものである．とくに $\mathfrak{S}_n$ の元の個数は $n!$ であることがわかる．

上述の σ の表わし方は ν の像が i_ν であることを明示するためのものであるから，ν はどのように並べてもよい．

例 1.6　$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & n & \cdots & 1\\ i_2 & i_n & \cdots & i_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n & \cdots & 2 & 1\\ i_n & \cdots & i_2 & i_1\end{pmatrix}.$$ ——

$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$, $\tau=\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_n\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n\end{pmatrix}$ とすれば $\tau\cdot\sigma(\nu)=\tau(\sigma(\nu))=\tau(i_\nu)=j_\nu$ であるから

$$\tau\sigma=\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_n\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n\end{pmatrix}.$$

また $1_n=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}$ であり，$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$ ならば $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}$ である．

例 1.7　$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3&4&5&2&1\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&1&2&3\end{pmatrix}.$$

はじめの二つは積が可換でない場合を示している．——

b）同値関係

集合 $S\,(\neq\phi)$ の任意の 2 元 x, y の間に関係 $x\sim y$ が成立するかしないかのどちらかが定まっていて

(1)　$x\sim x \quad (\forall x\in S)$　　　　**(反射律)**

(2)　$x\sim y \Longrightarrow y\sim x$　　　　**(対称律)**

(3)　$x\sim y,\ y\sim z \Longrightarrow x\sim z$　**(推移律)**

がみたされているとき，$\sim$ を S の一つの**同値関係**という．$x\sim y$ であるとき x, y は同値であるといい，x, y が同値ではないとき $x\nsim y$ で表わす．

普通の等しいという概念(等号)，たとえば実係数 1 変数の多項式全体の集合における等号などは，明らかに同値関係である．§1.1 では，E^3 の有向成分全体の集合に定義された同値関係，$V(E^3)$ の底全体の集合に定義された同値関係の二つの例をすでに扱っている．一つの有向成分を定めている諸性質のうち向きと長さだけに着目して位置については無視し，向きと長さが等しい(同値である)ものをすべて同一視したのが第 1 の例であり，底が右手系をなすか左手系をなすかだけに着目して一つの底を定めている他の属性はすべて無視したのが第 2 の例であった．このように，ある集合の二つの元について考察の対象としている性質が同じならばそれらを同値なものとみなし，他の性質は一切無視して議論を単純化することは極めて一般的な普通の思考方法である．その際，上記の (1), (2), (3) が成立していなければその議論が無意味なものになることは明らかであろう．たとえば x と y を同じものとみなし，y と z も同じものとみなしたのに x, z は同じものとみなすわけにはいかないというのでは，わけのわからない議論になってしまうのである．逆に性質(1), (2), (3)がみたされているという意味で同値なものは混乱なく同一視できることを以下に述べる．

集合 S に一つの同値関係 $\sim$ が定められているとき，任意の $x\in S$ に対して $C=C_x=\{y\in S\,|\,x\sim y\}$ を(x で代表される)**同値類**あるいは単に**類**といい，x をその代表元という．同値関係の性質(1)によって $x\in C_x$ だから任意の $x\in S$ に対して $C_x\neq\phi$ である．また性質(2), (3)によって $y, z\in C_x$ ならば $y\sim z$ であること

も明らかである．次に

$$x \sim y \Leftrightarrow C_x = C_y \tag{1.39}$$

を示す．$\Longleftarrow$ は $y \in C_y = C_x$ だから C_x の定義により明らかである．一方，$x \sim y$ ならば

$$z \in C_x \Leftrightarrow x \sim z \Leftrightarrow y \sim z \Leftrightarrow z \in C_y$$

であるから $C_x = C_y$ となる．したがって(1.39)が成立する．さらに

$$x \nsim y \Leftrightarrow C_x \cap C_y = \phi. \tag{1.40}$$

実際 C_x, C_y は空集合ではないから $C_x \cap C_y = \phi$ ならば $C_x \neq C_y$ であり，したがって(1.39)により $x \nsim y$．また $C_x \cap C_y \neq \phi$ ならば $z \in C_x \cap C_y$ とすると $x \sim z$，$z \sim y$ であるから $x \sim y$ となってしまう．

(1.39)と(1.40)とを合わせて，$C_x \neq C_y \Leftrightarrow C_x \cap C_y = \phi$ であることがわかる．すなわち二つの類は集合として完全に一致してしまうか，あるいは共通部分をまったくもたないかのどちらかなのである．また一つの類の代表元としてはその類に含まれるどの元をとってもよいこともわかった．したがって集合 S の $\sim$ に関する相異なるすべての類を $\{C^{(\nu)}\}_{\nu \in A}$ (A は添字 ν の集合)とすれば

$$S = \bigcup_{\nu \in A} C^{(\nu)}, \qquad C^{(\mu)} \cap C^{(\nu)} = \phi \qquad (\mu \neq \nu)$$

となるのである．すなわち，S の任意の元はかならずある類に含まれるのであり，一つの類に含まれる元はすべて同じものとみなして他の類に含まれる元とは完全に区別することが可能なのである．類 $C^{(\nu)}$ をあらためて一つの元と考えて，いいかえれば $C^{(\nu)}$ に含まれる S の元をすべて同一視することによって，新しく得られた集合を S の $\sim$ による**商集合**といい，普通 $S/\sim$ で表わす．このとき写像 $\varpi : S \ni x \mapsto \varpi(x) = C_x \in S/\sim$ を S の $S/\sim$ への(**標準**あるいは**自然**)**射影**という．これは明らかに全射である．

商集合に対して適当な演算を定義してある種の代数系の存在を構成的に証明するという方法は，いわば一つの常套手段であり，以下ではしばしば用いられる．

c）整係数1次方程式の整数解

有理整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}$ をその2種類の基本的演算である加法，乗法とともに考えたとき，これを**有理整数環**とよぶ．これはわれわれが数の体系として最初に認識するものであり，物の個数を数えることからはじめてたし算，ひき算，かけ

算を考えることによって得られるものである．

ある数を何等分かしようとするとき，あるいは1次方程式 $ax=b$ $(a, b \in \boldsymbol{Z})$ を解こうとするときには，$\boldsymbol{Z}$ だけを一つの体系として固執するのでは破綻をきたし，そこでわり算も可能となるように数の概念を拡大して有理数体 $\boldsymbol{Q}$ が得られるわけである．

$\boldsymbol{Z}$ の中だけでわり算を考えてつじつまを合わせるためには，いわゆる剰余を考えなければならない．$m, n \in \boldsymbol{Z}$, $m \neq 0$ ならばかならず

(1.41)
$$n = q \cdot m + r, \quad 0 \leqq r < |m|$$

となる $q, r \in \boldsymbol{Z}$ が一意的に定まり，このとき r を(n の m を法とする)剰余というのであった．性質(1.41)は有理整数環 $\boldsymbol{Z}$ の性質としては最も基本的なものの一つである．

有理整数環 $\boldsymbol{Z}$ の部分集合 J が

(1)　$m, n \in J \Longrightarrow m+n \in J$,

(2)　$a \in \boldsymbol{Z}, m \in J \Longrightarrow am \in J$

の二つの性質をもっているとき，J を $\boldsymbol{Z}$ のイデアルという．これは一般的な代数学の用語であるが，いまの場合，実はある一つの整数 d の倍数全体の集合 $(d) = \{qd \mid q \in \boldsymbol{Z}\}$ のことにほかならない．実際，集合 (d) はたしかにイデアルである．とくに $(0) = \{0\}$ を零イデアル，$(1) = \boldsymbol{Z}$ を単位イデアルという．逆に J を $\boldsymbol{Z}$ の任意のイデアルとして，$d \in \boldsymbol{Z}$ を適当にとって $J = (d)$ となることを証明しよう．$J = \{0\}$ ならば $d=0$ とすればよいから，$J \neq \{0\}$ と仮定する．このとき $n \in J$ ならば(2)によって $-n = (-1)n \in J$ であり，J はかならず正の整数を含む．そこで J に含まれる最小の正整数を d とすれば，任意の $n \in J$ に対して $n = qd + r$, $0 \leqq r < d$ となる $q, r \in \boldsymbol{Z}$ が一意的に定まるが，$r = n - qd \in J$ であるから d の定義によって $r=0$ でなければならない．したがって $J \subset (d)$．もともと $d \in J$ であるから性質(2)により $J = (d)$ であることが証明された．

有限個の整数 $m_1, m_2, \cdots, m_r$ に対して $J = \left\{\sum_{i=1}^{r} x_i m_i \mid x_i \in \boldsymbol{Z}\right\}$ がイデアルであることは容易にわかる．このイデアルを $m_1, \cdots, m_r$ で生成されるイデアルといい，$J = (m_1, \cdots, m_r)$ で表わす．これは実は $m_1, \cdots, m_r$ の最大公約数[1]を d とすれば

1)　G. C. D. (greatest common divisor) または G. C. M. (greatest common measure) で表わす．

(d) と一致する．すなわち

(1.42) $$\text{G. C. D.}(m_1, \cdots, m_r) = d \Longrightarrow (m_1, \cdots, m_r) = (d).$$

［証明］ d_0 を $J=(m_1, \cdots, m_r)$ に含まれる最小の正整数とすれば上述のとおり $J=(d_0)$．とくに $d_0 \in J$ であることから $x_i \in \boldsymbol{Z}\ (i=1, \cdots, r)$ を適当にとれば $d_0=\sum_{i=1}^{r} x_i m_i$，したがって $d \mid d_0$ である．一方明らかに $m_i \in J\ (1 \leqq i \leqq r)$ だから $d_0 \mid m_i$，したがって $d_0 \mid d$．d, d_0 はともに正の整数であるから以上によって $d_0=d$，すなわち $J=(d)$．▌

このことから，有限個の整数 $m_1, \cdots, m_r$ を係数とする 1 次方程式

$$m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_rx_r = k \qquad (k \in \boldsymbol{Z})$$

が整数解をもつためには，k が $d=\text{G. C. D.}(m_1, \cdots, m_r)$ の倍数になっていること $(d \mid k)$ が必要十分であることがわかる．実際

$$\sum_{i=1}^{r} m_i x_i = k \quad \text{が整数解をもつ}$$

$$\Longleftrightarrow k \in (m_1, \cdots, m_r) = (d) \Longleftrightarrow d \mid k.$$

とくに適当に $x_1, \cdots, x_r \in \boldsymbol{Z}$ をとって $d=\sum_{i=1}^{r} x_i m_i$ と表わすことができるわけである．

例 1.8 $a, b, k \in \boldsymbol{Z}$，$a \neq 0$，$b \neq 0$ とする．

(*) $$ax+by = k$$

が整数解をもつための必要十分条件は，$d=\text{G. C. D.}(a, b)$ とすれば $d \mid k$ となることである．(*)の一つの整数解 $x=x_0$，$y=y_0$ が得られたものとしよう．このとき x, y を(*)の任意の整数解とすれば $ax+by=ax_0+by_0$ から

$$a(x-x_0) = -b(y-y_0).$$

両辺を d で割って

$$a'(x-x_0) = -b'(y-y_0), \qquad \text{G. C. D.}(a', b') = 1.$$

したがって $a' \mid y-y_0$，$-b' \mid x-x_0$ でなければならない．したがって $t \in \boldsymbol{Z}$ を適当にとって $x=x_0-b't$，これを上の等式に代入して $y=y_0+a't$ でなければならない．逆に任意の $t \in \boldsymbol{Z}$ に対して $x=x_0-b't$，$y=y_0+a't$ はたしかに(*)の整数解になっている．——

d) 合同関係

整数間のたし算，かけ算について，その結果が偶数であるか，奇数であるかだ

けに興味のある場合がある．偶数は2でわると余りは0，奇数の場合は余りが1であるから，偶数全体を0で表わし，奇数全体を1で表わすことにしよう．正確にいえば，x, y の差が2で割り切れることを $x\equiv y$ で表わすとこれは $\boldsymbol{Z}$ に一つの同値関係を定め，これによって $\boldsymbol{Z}$ 全体は0で代表される類，1で代表される類の2組にわけられるというわけである．このとき $0+0=0$, $1+0=0+1=1$, $1+1=0$, $0\times 0=0$, $0\times 1=1\times 0=0$, $1\times 1=1$ が偶数，奇数の演算に関するすべての結果であり，これはよく知られている．

一般に $n\in\boldsymbol{Z}$ を一つ固定しておき，$x, y\in\boldsymbol{Z}$ が $x-y\in(n)$ をみたすとき x は y に n を法として合同であるといい，$x\equiv y \pmod{n}$，あるいは単に $x\equiv y\ (n)$ で表わす．これは $n\neq 0$ ならば $n\,|\,x-y$ と同じことであり，$n=0$ ならば $x=y$ となることである．これによって $\boldsymbol{Z}$ に一つの同値関係が定められる．実際，反射律，対称律の成立していることは明らかであり，また $x\equiv y$, $y\equiv z\ (n)$ ならば $x-y$, $y-z\in(n)$，したがって $x-z=(x-y)+(y-z)\in(n)$ であるから推移律も成立している．この同値関係を，n を法とする**合同関係**という．

n を法とする合同関係による $\boldsymbol{Z}$ の商集合を $\boldsymbol{Z}/(n)$ で表わす．$(n)=(-n)$ であるから $n\neq 0$ ならば $n>0$ としてよい．このとき $\boldsymbol{Z}/(n)$ は n 個の元からなる有限集合である．実際，任意の整数 $m\in\boldsymbol{Z}$ は $m=q\cdot n+r$, $0\leqq r<n$ と一意的に表わせるが，このことから $m\equiv r\ (n)$ であり，したがって $\boldsymbol{Z}/(n)$ は $0, 1, \cdots, n-1$ で代表される類によってつくされているのである．

以下 n を正の整数として，有限集合 $\boldsymbol{Z}/(n)$ に加法，乗法の2種類の演算を自然な仕方で定義しよう．まず次の諸性質に注意する．

(1.43)　$$x\equiv x'\ (n),\quad a\in\boldsymbol{Z}\Longrightarrow ax\equiv ax'\ (n),$$

(1.44)　$$x\equiv x',\quad y\equiv y'\ (n)\Longrightarrow x+y\equiv x'+y',\quad xy\equiv x'y'\ (n).$$

[証明]　$x-x'\in(n)$ ならば $ax-ax'=a(x-x')\in(n)$，したがって(1.43)が得られる．また $x-x'$; $y-y'\in(n)$ ならば

$$(x+y)-(x'+y')=(x-x')+(y-y')\in(n),$$
$$xy-x'y'=(x-x')y+x'(y-y')\in(n).$$

したがって(1.44)が証明される．▮

射影 $\varpi:\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Z}/(n)$ により $\boldsymbol{Z}/(n)$ の元を $\varpi(x)\,(x\in\boldsymbol{Z})$ で表わす．このとき任意の2元 $\varpi(x), \varpi(y)\in\boldsymbol{Z}/(n)$ の和，積を

$$(1.45)\qquad \varpi(x)+\varpi(y)=\varpi(x+y),\qquad \varpi(x)\varpi(y)=\varpi(xy)$$

によって定義するのである．この定義は見かけ上代表元 x, y のとり方に依存しているが，$\varpi(x)=\varpi(x')$, $\varpi(y)=\varpi(y')$ ならば $\varpi(x+y)=\varpi(x'+y')$, $\varpi(xy)=\varpi(x'y')$ であることが(1.44)によって保証されているから問題はない．

定義(1.45)から明らかなように，$\boldsymbol{Z}/(n)$ の加法，乗法は $\boldsymbol{Z}$ における加法，乗法に関する可換性，結合則，分配則など演算の基本的性質をすべて受けついでいる．とくに $\varpi(x)+\varpi(0)=\varpi(x)$, $\varpi(x)\cdot\varpi(1)=\varpi(x)$ $(\forall x\in\boldsymbol{Z})$ であるから $\varpi(0)$, $\varpi(1)$ をそれぞれ $\boldsymbol{Z}/(n)$ の零元，単位元という．さらに $\varpi(x)+\varpi(-x)=\varpi(0)$ により，$-\varpi(x)=\varpi(-x)$ である．このように演算の基本的性質が $\boldsymbol{Z}$ における演算の基本的性質と一致しているという意味で，$\boldsymbol{Z}/(n)$ を有理整数環 $\boldsymbol{Z}$ のイデアル (n) による**剰余類環**という．

剰余類環 $\boldsymbol{Z}/(n)$ の元を，その代表元として $0\leqq r<n$ であるような整数 r をとって，$\bar{r}=\varpi(r)$ で表わすことにしよう．もし n が素数でなければ $2\leqq r<n$, $d=$ G.C.D.$(r,n)\neq 1$ のような整数 r がある．このとき $n=a\cdot d$ とすれば $2\leqq a<n$ であり，$n\,|\,a\cdot r$．したがって $\bar{a}\cdot\bar{r}=\varpi(ar)=\bar{0}$ である．この $\bar{a}, \bar{r}$ のように，零元でないにもかかわらず積は零元になってしまうとき，それらの元を**零因子**という．たとえば $\boldsymbol{Z}/(12)$ の元 $\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}$ はすべて零因子である．

一方 r が n と互いに素であるとき，つまり G.C.D.$(r,n)=1$ である場合には，c)で述べたように，$x, y\in\boldsymbol{Z}$ を適当にとって $rx+ny=1$ とできる．このとき，$\bar{1}=\varpi(rx)=\bar{r}\cdot\varpi(x)$．したがって $\varpi(x)\in\boldsymbol{Z}/(n)$ は乗法に関する $\bar{r}=\varpi(r)$ の逆元である．このように乗法に関して逆元をもつ元を**正則元**あるいは**単数**という．たとえば $\boldsymbol{Z}/(12)$ の正則元は $\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{11}$ である．一般に $\boldsymbol{Z}/(n)$ の正則元の個数を $\varphi(n)$ で表わし，**Euler の関数**という．正の整数 n に対して，n より小で n と互いに素な正の整数の個数を対応させる関数である．

有理整数環 $\boldsymbol{Z}$ には零因子に相当するものは存在しない．また $\boldsymbol{Z}$ の正則元は 1 と -1 だけである．

とくに素数 p に対して，剰余類環 $\boldsymbol{F}_p=\boldsymbol{Z}/(p)$ においては，$\bar{0}$ 以外の元はすべて正則元であり，したがって $\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ 等と同様に加減乗除の四則演算が完全に行なわれるわけである．すなわち $\boldsymbol{F}_p$ は有限個(p 個)の元からなる体である．

問　題

1　空間 E^3 に直交座標系が与えられているものとし，次の各条件で定められる平面の方程式およびそのパラメータ表示をそれぞれ求めよ．

(1)　点 (1, 1, 1) を通り，直線 $x=y=z$ に直交する．

(2)　3点 $(-1, -1, -1)$，$(2, 0, 0)$，$(0, 4, 0)$ を通る．

2　空間 E^3 の4点 P_0, P_1, P_2, P_3 は同一平面上にないものとする．さらに $O \in E^3$ を任意に固定しておき，$x_i=(\overrightarrow{OP_i})$ $(0 \leqq i \leqq 3) \in V(E^3)$ とする．このとき P_0, P_1, P_2, P_3 を頂点とする四面体の表面あるいは内部の任意の点を P とすれば

$$(\overrightarrow{OP}) = \sum_{i=0}^{3} \lambda_i x_i \qquad \left(\lambda_i \geqq 0,\ \sum_{i=0}^{3} \lambda_i = 1\right).$$

3　$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^3$ とする．ベクトル積について

$$(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{z} + (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}) \times \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{y} = 0$$

を証明せよ．

4　(1)　E^3 のある直交座標系に関する座標が $(-1, -1, -1)$，$(2, 0, 0)$，$(0, 4, 0)$ である点をそれぞれ P_1, P_2, P_3 とするとき，三角形 $P_1P_2P_3$ の面積を求めよ．

(2)　さらに座標系が $(0, 0, 3)$ である点を P_0 として，P_0, P_1, P_2, P_3 を頂点とする四面体の体積を求めよ．

5　点 $P \in E^3$ から平面 Π におろした垂線の足を Q とするとき，線分 PQ の長さ d を P, Π 間の距離という．ある直交座標系に関して Π が $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=b$ で表わされているものとし，P の座標が (ξ_1, ξ_2, ξ_3) であるものとすれば

$$d = \frac{|a_1\xi_1+a_2\xi_2+a_3\xi_3-b|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.$$

6　$a \in V(E^3)$，$a \neq o$ に対して $V(E^3)$ の変換 S_a を

$$S_a : V(E^3) \ni x \longmapsto x - \frac{2\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle} a \in V(E^3)$$

によって定義する．

(1)　S_a は線型変換であることを示せ．

(2)　x と $S_a x$ とは a に垂直な平面に関して対称であることを証明せよ．

(3)　$a, b \in V(E^3)$ はどちらも o ではなく，$S_a b = b + ma$ (m は正の整数)，$S_b a = a + b$ であるものとする．このとき m, $\|a\| : \|b\|$，および a, b 間の角を求めよ．

7　実数を成分にもつ3次正方行列 A について A が直交行列であること（すなわち任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{R}^3$ に対して $\langle A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}'\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'\rangle$ が成立すること）と，${}^tAA=I$ であることとは同値である．

8　次の方程式に整数解があればそのすべてを求めよ．

(1)　$240x+504y=48$,　(2)　$27x+72y=3$,　(3)　$1617x+2205y=441$.

9　n_1, n_2 を正の整数とし，$d=\text{G. C. D.}(n_1, n_2)$ とする．$x_1, x_2 \in \boldsymbol{Z}$ が $x_1 \equiv x_2$ (d) をみた

すならば，$x\equiv x_1\ (n_1)$，$x\equiv x_2\ (n_2)$ であるような $x\in\boldsymbol{Z}$ が存在することを証明せよ．(とくに n_1, n_2 が互いに素ならば任意の x_1, x_2 に対して $x\equiv x_1\ (n_1)$，$x\equiv x_2\ (n_2)$ をみたす $x\in\boldsymbol{Z}$ が存在するわけである．)

10　$m\in\boldsymbol{Z}$ を $m=p_1^{\lambda_1}p_2^{\lambda_2}\cdots p_k^{\lambda_k}$ ($p_1, p_2, \cdots, p_k$ は相異なる素数，λ_i $(1\leqq i\leqq k)$ は正の整数) と因数分解する．

(1)　$x_1, x_2, \cdots, x_k\in\boldsymbol{Z}$ を任意に与えたとき，$x\equiv x_i\ (p_i^{\lambda_i})$ $(i=1, 2, \cdots, k)$ が成立するように $x\in\boldsymbol{Z}$ をとることができることを示せ．

(2)　$\varphi(m)=\varphi(p_1^{\lambda_1})\cdots\varphi(p_i^{\lambda_i})$ を証明せよ．(φ は Euler 関数.)

(3)　$a\in\boldsymbol{Z}$ が $0\leqq a<p_i^{\lambda_i}$ ならば，$a=c_0+c_1p_i+\cdots+c_{\lambda_i-1}p_i^{\lambda_i-1}$ ($c_0, c_1, \cdots, c_{\lambda_i-1}\in\boldsymbol{Z}$) の形に一意的に表わされることを証明せよ．

(4)
$$\varphi(m)=p_1^{\lambda_1}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot p_2^{\lambda_2}\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\cdots\cdot p_k^{\lambda_k}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$
$$=m\cdot\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$$

を証明せよ．

11　$\bar{a}, \bar{b}\in\boldsymbol{F}_p$ に対して $(\bar{a}+\bar{b})^p=\bar{a}^p+\bar{b}^p$ であることを証明せよ．

第2章　線型空間と線型写像

§2.1　群，環，体

a）一般線型群とアフィン変換群

集合 $G\,(\neq\emptyset)$ に演算 $\cdot : G\times G \ni (x,y)\mapsto x\cdot y \in G$ が定められており，次の三つの性質がみたされているものとする：

(1)　$x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$　(結合則)，

(2)　$\exists e\in G$: $e\cdot x = x\cdot e = x$　$(\forall x\in G)$，

(3)　$\forall x\in G$, $\exists y\in G$: $x\cdot y = y\cdot x = e$.

このとき G は・を**乗法**として**群**であるという．乗法・に関する積 $x\cdot y$ は，しばしば記号・を省略して xy で表わされる．

群 G には条件(2)をみたす e は実はただ一つしかないことがわかる．実際 e, e' をともに(2)をみたす G の元とすれば

$$ee' = e'e = e', \qquad e'e = ee' = e$$

であるから $e'=e$. そこでこの e を以下では $1, 1_G, I, I_G$ 等で表わし，G の**単位元**という．

また任意の $x\in G$ に対して(3)をみたす y は一意的に定まってしまう．二つの元 $y, y'\in G$ がともに同じ $x\in G$ に対して(3)をみたすものとすれば

$$y' = y'\cdot 1 = y'(xy) = (y'x)y = 1\cdot y = y$$

となるからである．そこで x に対して(3)により一意的に定まる y を x^{-1} で表わし，x の**逆元**という．

群 G の任意の2元 a, b に対して $ax=b$ をみたす $x\in G$ がただ一つかならず存在することがわかる．実際ある x に対してこの等式が成立しているものとして，両辺に左側から a^{-1} をかけると

$$(\text{左辺}) = a^{-1}(ax) = (a^{-1}a)x = x, \qquad (\text{右辺}) = a^{-1}b$$

であるから $x=a^{-1}b$ でなければならないが，これが $ax=b$ をみたすことは代入してみれば明らかである．同様に $xa=b$ をみたすものは $x=ba^{-1}$ だけである．

問　群の演算に関する三つの性質のうち(1)(結合則)を仮定すれば，(2), (3)を合わせたものは条件としては

(4)　任意の $a, b \in G$ に対して $ax=b$, $ya=b$ となる $x, y \in G$ がかならず存在する

ということと同値であることを証明せよ．——

上述の $a^{-1}b$, ba^{-1} はかならずしも同じ元ではないことに注意しよう．それは乗法の**可換性**

(0)　$x \cdot y = y \cdot x \quad (\forall x, y \in G)$

が仮定されていないからである．したがってまた，たとえば

(2.1)
$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$$

であって，これが $x^{-1}y^{-1}$ に等しいとは限らない．

群 G の演算がさらに性質(0)をもっているとき，G を**可換群**，**Abel 群**等という．可換群 G の演算・はしばしば**加法** $+$ で表わされ，このとき G は**加群**とよばれる．この場合，単位元は1のかわりに0で表わし，**零元**という．また逆元は x^{-1} のかわりに $-x$ で表わす．$x+(-y)$ を単に $x-y$ でも表わす．

第1章でもわれわれは多くの群の例をみている．ベクトルの加法，行列の乗法，変換の結合等に関して上記の(1), (2), (3)を基本的な性質としてもつ集合が普遍的に存在するから，それらに群という共通の名称を与えるのである．既出のものも含めていくつかの基本的な例を以下にあげる．

例 2.1　$\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ は通常の加法 $+$ によって加群である．また $n \neq 0$ を整数とすれば $\boldsymbol{Z}/(n)$ は§1.3, d)で定義した加法により加群である．——

例 2.2　体 $\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{F}_p$ の一つを K で表わし，K から零元を除いた集合を $K^{\times}$ で表わす．これは K に本来定まっている乗法によって可換群である．この群 $K^{\times}$ を体 K の乗法群という．一方 $R=\boldsymbol{Z}$ または $\boldsymbol{Z}/(n)$ $(n \in \boldsymbol{Z})$ にも乗法は定義されているが，これから零元を除いた集合がその乗法によって群になっているというわけにはいかない．$x \in R$ が $x \neq 0$ であっても乗法に関して逆元をもつとは限らないからである．逆元をもつ元，すなわち正則元(単数)の全体を $R^{\times}$ で表わすが，これは明らかに可換群になる．$R^{\times}$ を R の単数群という．たとえば

$$\boldsymbol{Z}^{\times} = \{1, -1\}, \qquad (\boldsymbol{Z}/(12))^{\times} = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{11}\}.$$

$n \neq 0$ のとき $\varphi(n)$ が群 $(\boldsymbol{Z}/(12))^{\times}$ の元の個数を表わすのであった．

また $T^1=\{z\in \boldsymbol{C}\,|\,|z|=1\}$ も複素数の乗法で可換群になる. 1次元トーラスとよばれる群である. 周知のとおり $z\in T^1$ は $z=e^{\sqrt{-1}\theta}=\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta$ $(\theta\in\boldsymbol{R})$ と表わすことができる.

整数 $n\geqq 1$ に対して $U_n=\{z\in\boldsymbol{C}\,|\,z^n=1\}$ とおけばこれも複素数の乗法で可換群になる. 明らかに $U_n\subset T^1$ であり, $U_n\ni z\Longleftrightarrow z=e^{\sqrt{-1}\,2k\pi/n}$ $(k\in\boldsymbol{Z})$. ——

例 2.3 第1章に出てきた n 文字対称群 $\mathfrak{S}_n$ $(n\geqq 3)$, 3次の一般線型群 $GL(3,\boldsymbol{R})$ は可換ではない群の例である. 後に n 次の一般線型群およびアフィン変換群について述べるが, これらも可換ではない群の例である. ——

例 2.4 体 K ($\boldsymbol{Q},\boldsymbol{R},\boldsymbol{C}$ または $\boldsymbol{F}_p$) 上の n 次元列ベクトル空間 K^n はその加法によって加群である. 同様に $R=\boldsymbol{Z}$ または $\boldsymbol{Z}/(n)$ に対しても

$$R^n=\left\{\begin{bmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}\,\middle|\,\xi_i\in R\right\},\qquad \begin{bmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_1+\eta_1\\ \vdots\\ \xi_n+\eta_n\end{bmatrix}$$

によって加群 R^n が定義できる. ——

例 2.5 有限個の群 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ の直積 $G_1\times\cdots\times G_n=\{(x_1,\cdots,x_n)\,|\,x_i\in G_i\}$ は乗法を $(x_1,\cdots,x_n)(y_1,\cdots,y_n)=(x_1y_1,\cdots,x_ny_n)$ によって定義すれば群になることが容易にわかる. たとえば各 G_i の単位元を 1_i で表わせば直積の単位元は $(1_1,\cdots,1_n)$ であり, また $(x_1,\cdots,x_n)^{-1}=(x_1{}^{-1},\cdots,x_n{}^{-1})$ である.

1次元トーラス T^1 の n 個の直積 $T^n=T^1\times\cdots\times T^1$ を n 次元トーラスという. また例2.4の加群 K^n, R^n はそれぞれ加群 K, R の n 個の直積とみなすことができる. ——

例 2.6 群 G の元 x の m 回の積を x^m で表わす: $x^1=x$, $x^2=x\cdot x$, $\cdots$, $x^m=x\cdot x^{m-1}=x\cdot x\cdot\cdots\cdot x$ (m 回). また任意の $x\in G$ に対して $x^0=1$ (単位元) と定義する. さらに負の整数 $-m$ $(m>0)$ に対しては $x^{-m}=(x^{-1})^m$ と定義する. 明らかに $(x^{-1})^m\cdot x^m=1$ であるから $x^{-m}=(x^m)^{-1}$. 以上のように, $x\in G$ のベキ乗を定義すればいわゆる指数法則が成立する:

(2.2) $$x^{m+n}=x^m\cdot x^n,\qquad x^{mn}=(x^m)^n\qquad (m,n\in\boldsymbol{Z}),$$

(2.3) 'x,y が可換' ならば $(xy)^m=x^my^m$ $(m\in\boldsymbol{Z})$.

これらはすべて演算の性質(1)(結合則)にもとづいているのである.

G が加群の場合には, x^m (x の m 乗) のかわりに mx (x の m 倍) で表わす.

$m>0$ ならば mx は x を m 回加えることを表わしているわけである.

このとき

(1) $1\cdot x = x$,

(2) $m(x+y) = mx+my$,

(3) $(m+n)x = mx+nx$,

(4) $(mn)x = m(nx)$

が任意の $x, y \in G$, $m, n \in \boldsymbol{Z}$ に対して成立する. 指数法則(2.2)が(3), (4)に, 同じく(2.3)が(2)に対応するのである. この性質(1)〜(4)によって任意の加群は $\boldsymbol{Z}$ の元をかけるスカラー乗法をもつわけであり, そのことを強調する意味で加群を $\boldsymbol{Z}$ 加群ということもある.

例 2.7 群 G の一つの元 x のベキ乗全体の集合は, G の乗法をそのまま受けついでまた群となる. このように一つの元 x のベキ乗全体からなる群を x で生成される**巡回群**といい, $\langle x\rangle$ で表わすことにする. とくに群 G の元 x に対して巡回群 $\langle x\rangle$ の元の個数を x の**位数**という. $x\in G$ の位数 $|\langle x\rangle|$ はもし有限ならば, ベキ乗 x^n が単位元に等しくなる最小の正の整数 n に等しいことを証明しよう. 任意の $m\in\boldsymbol{Z}$ に対して, $m=qn+r$, $0\leqq r<n$ であるから $x^m=x^r$ である. 一方 $0\leqq i<j\leqq n-1$ とすれば $0<j-i<n$ であるから $x^{j-i}\neq 1$, したがって $x^i\neq x^j$. すなわち $\langle x\rangle$ の相異なるすべての元が $1, x, \cdots, x^{n-1}$ でつくされるのである. したがって $|\langle x\rangle|=n$ である.

巡回群 $\langle x\rangle$ の生成元としては, x の位数 n ($<\infty$ とする)と互いに素な整数 k $(0\leqq k<n)$ を任意にとり, x^k を考えることもできる: $\langle x\rangle=\langle x^k\rangle$. 実際, $(x^k)^m=1$ とすれば, km は n の倍数でなければならないことが容易にわかるが, k は n と互いに素だから $n|m$ であり, したがって x^k の位数は n に等しい. 巡回群 G の元の個数を $n<\infty$ とすれば G の生成元となり得る元の個数は $\varphi(n)$ に等しいというわけである.

たとえば群 $U_n=\{z\in\boldsymbol{C}\,|\,z^n=1\}$ は巡回群であり, その生成元として $e^{\sqrt{-1}\,2k\pi/n}$ $(k\in\boldsymbol{Z},\ 0\leqq k<n,\ \mathrm{G.C.D.}(n,k)=1)$ をとることができる. それ等 $\varphi(n)$ 個の元を1の**原始 n 乗根**という. ——

体 K $(=\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$, あるいは $\boldsymbol{F}_p)$ 上の n 次元列ベクトル空間 K^n の線型変換 F: $K^n\to K^n$ が全単射であるとき, F は**正則**であるという. 二つの正則線型変換の結

合はまた正則線型変換である．K^n 上の恒等変換は当然正則である．また F が正則ならばその逆変換 F^{-1} も線型であることがわかる．実際，任意の $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \in K^n$ に対し $F(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'$，$F(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}'$ となる $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K^n$ がそれぞれ一意的に定まり，$F(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=F(\boldsymbol{x})+F(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}'$ であるから $F^{-1}(\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}')=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=F^{-1}(\boldsymbol{x}')+F^{-1}(\boldsymbol{y}')$．同様に $F(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda\boldsymbol{x}'$ であることから $F^{-1}(\lambda\boldsymbol{x}')=\lambda F^{-1}(\boldsymbol{x}')$ である．以上のことから，K^n 上の正則線型変換全体 $GL(K^n)$ は写像の結合を乗法として群であることがわかる．これを列ベクトル空間 K^n 上の**一般線型群**というのである．

定理1.1により任意の線型変換 $F: K^n \to K^n$ は，K 上の n 次正方行列 A によって $F=F_A: K^n \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in K^n$ と表わすことができる．とくに F が正則であるときに，対応する行列 A も**正則**であるといい，K 上の n 次正則行列全体の集合を $GL(n, K)$ で表わす．$A, B \in GL(n, K)$ とすれば，正則線型変換 $F_A \circ F_B$ に対してまた $C \in GL(n, K)$ が一意的に定まり，$F_A \circ F_B = F_C$ で表わされる．この C を A, B の積といい，$C=AB$ で表わす：$F_{AB}=F_A \circ F_B$．（行列の演算については§2.3でもっと一般に詳しく述べる．）

$A, B, C \in GL(n, K)$ のとき，写像に関する結合則から行列の乗法に関する結合則 $A(BC)=(AB)C$ が得られる．恒等変換 $I: K^n \to K^n$ に対応する行列 I_n を n 次**単位行列**という．定理1.1の証明により I_n の (i, j) 成分は $\delta_{ij}=1$ $(i=j)$ または $=0$ $(i \neq j)$ である．（記号 δ_{ij} を **Kronecker の記号**という．）写像に関する性質(1.37)により $I_n A = A I_n = A$ $(A \in GL(n, K))$ が得られる．また正則線型変換 F_A の逆写像 $F_A{}^{-1}$ に対応する行列を A^{-1} で表わし，A の**逆行列**という：$F_{A^{-1}}=F_A{}^{-1}$．したがって $AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$．

このように対応 $GL(n, K) \ni A \leftrightarrow F_A \in GL(K^n)$ により $GL(K^n)$ の群の構造から行列の乗法に関する群の構造が $GL(n, K)$ に与えられ，$GL(n, K)=GL(K^n)$ と思ってもよいことがわかる．

体 K 上の n 次元アフィン空間 A_{K^n} における変換で，点の位置ベクトルの変換

$$\Phi_{A,\boldsymbol{b}}: K^n \ni \boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b} \in K^n \tag{2.4}$$

$(A$：K 上の n 次正方行列，$\boldsymbol{b} \in K^n)$ によって表わされるものをアフィン変換というのであった．同じことであるから，簡単のために $\Phi_{A,\boldsymbol{b}}$ 自身をアフィン変換と言ってもよい．二つのアフィン変換の結合はまたアフィン変換である．実際

(2.5) $$\Phi_{A_1,b_1}\circ\Phi_{A_2,b_2}=\Phi_{A_1A_2,A_1b_2+b_1}.$$

[証明] 任意の $\boldsymbol{x}\in K^n$ に対して

$$\begin{aligned}\Phi_{A_1,b_1}\circ\Phi_{A_2,b_2}(\boldsymbol{x}) &= \Phi_{A_1,b_1}(A_2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_2)\\ &= A_1(A_2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_2)+\boldsymbol{b}_1 = A_1A_2\boldsymbol{x}+(A_1\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_1).\end{aligned}$$ ∎

全単射であるアフィン変換は，**正則**であるという．アフィン変換 $\Phi_{A,b}$ が正則であることは，任意の $\boldsymbol{y}\in K^n$ に対して $\Phi_{A,b}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ となる $\boldsymbol{x}\in K^n$ が一意的に定まること，すなわち任意の $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}\in K^n$ に対して $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}$ となる $\boldsymbol{x}\in K^n$ が一意的に定まること，したがってまた行列 A が正則であることと同値である．とくに恒等変換 $I=\Phi_{I_n,o}$ は正則アフィン変換である．このことからまた $\Phi_{A,b}$ が正則であるとき $\Phi_{A,b}{}^{-1}=\Phi_{A^{-1},-Ab}$ であることが(2.5)を用いて容易にわかる．

$A_K{}^n$ の正則アフィン変換のことをまた $A_K{}^n$ の自己同型変換(automorphism)ともいい，その全体を Aut $(A_K{}^n)$ で表わすことにする．上述のことから明らかなように，Aut $(A_K{}^n)$ は写像の結合を乗法として群になっている．この群を $A_K{}^n$ の**アフィン変換群**というのである．$A_K{}^n$ の‘図形’の性質で，Aut $(A_K{}^n)$ の任意の元によって不変なものを調べる‘幾何学’を**アフィン幾何学**という．ある図形に正則アフィン変換を何回か行なって得られる図形はもとの図形に正則アフィン変換を1回だけ行なうことによっても得られること，またそれをもとの図形にもどすことも正則アフィン変換によって行なわれること等は，個別的に述べるまでもなく，Aut $(A_K{}^n)$ が群であることから明らかなのである．

例 2.8 相異なる4点 $P_1, Q_1, P_2, Q_2\in A_K{}^n$ の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2$ とし，$\Phi_{A,b}\in$ Aut $(A_K{}^n)$ による $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i$ の像をそれぞれ $\boldsymbol{x}_i', \boldsymbol{y}_i'$，またそれ等に対応する点を P_i', Q_i' とする．すなわち

$$(\overrightarrow{OP_i'})=\boldsymbol{x}_i'=A\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{b},\qquad (\overrightarrow{OQ_i'})=\boldsymbol{y}_i'=A\boldsymbol{y}_i+\boldsymbol{b}\qquad (i=1,2).$$

さらに有向線分 $\overrightarrow{P_1Q_1}$，$\overrightarrow{P_2Q_2}$ は平行であるとしよう．したがって $\lambda\in K$, $\lambda\neq 0$ を適当にとれば $(\overrightarrow{P_2Q_2})=\lambda(\overrightarrow{P_1Q_1})$，すなわち $\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{y}_1=\lambda(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)$ である．このとき

$$\boldsymbol{y}_2'-\boldsymbol{y}_1'=A(\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{y}_1)=\lambda A(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)=\lambda(\boldsymbol{x}_2'-\boldsymbol{x}_1')$$

であるから $\overrightarrow{P_1'Q_1'}$，$\overrightarrow{P_2'Q_2'}$ はまた平行であり，線分比ももとと同じ λ である．とくに線分の‘平行性’はアフィン幾何学的概念である．——

例 2.9 アフィン空間 $A_K{}^n$ の中で K 係数 k 次多項式 $F(x_1,\cdots,x_n)$ の零点全

体からなる図形 S を $A_K{}^n$ の k 次超曲面という. S 上の任意の点 $P=(x_1, \cdots, x_n)$ の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}={}^t(x_1, \cdots, x_n)$, その $\Phi_{A,b}\in \mathrm{Aut}\,(A_K{}^n)$ による像を $\boldsymbol{x}'={}^t(x_1{}',\cdots, x_n{}')=\Phi_{A,b}(\boldsymbol{x})$ とすれば, $\boldsymbol{x}=\Phi_{A,b}{}^{-1}(\boldsymbol{x}')$ を $F(x_1, \cdots, x_n)=0$ に代入して $x_1{}'$, $\cdots, x_n{}'$ に関する方程式 $F'(x_1{}', \cdots, x_n{}')=0$ が得られる. $\Phi_{A,b}{}^{-1}$ は正則アフィン変換であるから各 x_i は $x_1{}', \cdots, x_n{}'$ の1次式であり, F' も K 係数 k 次多項式である. (明らかに $\deg F'\leqq \deg F$. 逆に $\boldsymbol{x}'=\Phi_{A,b}(\boldsymbol{x})$ を F' に代入すれば $\deg F'\geqq \deg F$ であることがわかる.) したがって k 次超曲面 S の正則アフィン変換による像 S' はまた k 次超曲面である. ——

b) 環と体

集合 K に2通りの演算 $+, \cdot$ が定義されていて次の三つの条件がみたされているものとする:

I　K は $+$ によって加群である;

II　$K^\times = K-\{0\}$ は空集合ではなく, $\cdot$ によって可換群である;

III　$x(y+z) = xy+xz,\ \ (x+y)z = xz+yz$　(分配則).

このとき K を**(可換)体**という. $\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{F}_p$ 等のように, 加法, 乗法2種類の演算が定義されていて加減乗除の四則演算が完全に行なわれる集合のことである. これまでに定義した $K^n, A_K{}^n, GL(n, K)$ 等においても, K は任意の体でよいのである.

例 2.10　$d\in \boldsymbol{Z}$ は平方数ではない(すなわち $d=m^2$ となる $m\in \boldsymbol{Z}$ がない)ものとする. このとき2次方程式 $X^2-d=0$ の1根を $\sqrt{d}$ として $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d}\,)=\{a+b\sqrt{d}\mid a, b\in \boldsymbol{Q}\}$ とおく. これは複素数体 $\boldsymbol{C}$ の部分集合であるが, 通常の複素数の加法, 乗法によって $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d}\,)$ 自身体になっていることが容易にわかる. これを($\boldsymbol{Q}$ 上の) 2次体という.

同様に, たとえば1の原始3乗根の一つを $\omega\,(\in \boldsymbol{C})$ とすれば $\boldsymbol{Q}(\omega)=\{a+b\omega+c\omega^2\mid a, b, c\in \boldsymbol{Q}\}$ が体であることもわかる. ——

問　例2.10の $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d}\,)$, $\boldsymbol{Q}(\omega)$ が体であることを確かめよ. ——

集合 R に2通りの演算 $+, \cdot$ が定義されていて次の三つの条件がみたされているものとする:

I　　R は $+$ によって加群である;

II-(1)　$x(yz) = (xy)z$;

Ⅲ　　$x(y+z) = xy+xz$　(左分配則),

　　　$(y+z)x = yx+zx$　(右分配則).

このとき R を**(結合)環**という．任意の体，$\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Z}/(n)$ 等が環の例としてすでにでてきたものであるが，これ等はすべてさらに次の二つの条件を両方ともみたす.

環 R が乗法について可換性

Ⅱ-(0)　$xy = yx$

をみたすとき，R を**可換環**という.

環 R (可換とは限らない)がさらに乗法に関して

Ⅱ-(2)　単位元 $1 \neq 0$ もつ $(1x=x1=x)$

という条件をみたすとき，R を**単位元をもつ環**という．このとき $x \in R$ が**正則**であるとは，$xy=yx=1$ となる $y \in R$ が存在することである．このような y が存在するとすれば，それは一意的に定まってしまうことが群の場合と同様にして証明できる．そこで $y=x^{-1}$ で表わし，これを x の逆元という．R の正則元全体 $R^{\times}$ が乗法によって群をなすことは明らかである.

例 2.11　$d \in \boldsymbol{Z}$ はどの素数の2乗でも割れない(平方因数を含まない)ものとする．このとき体 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ の元 $\alpha=a+b\sqrt{d}$ $(a, b \in \boldsymbol{Q})$ に対して $\alpha^{\sigma}=a-b\sqrt{d}$ とおき，$\mathfrak{o}=\{\alpha \in \boldsymbol{Q}(\sqrt{d}) \mid \alpha+\alpha^{\sigma}, \alpha\alpha^{\sigma} \in \boldsymbol{Z}\}$ とすれば，$\mathfrak{o}$ は $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ の演算によって単位元をもつ可換環である．$\mathfrak{o}$ を2次体 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ の整数環という．(問題14参照)　——

例 2.12(全行列環)　体 K 上の n 次正方行列全体を考える：$M_n(K)=\{A=(a_{ij}) \mid a_{ij} \in K, 1 \leqq i, j \leqq n\}$．$A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij}) \in M_n(K)$ に対して各 (i, j) 成分が $a_{ij}+b_{ij}$ で与えられる n 次正方行列を A, B の和といい，$A+B$ で表わす．また各 (i, j) 成分が $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ で与えられる n 次正方行列を A, B の積といい，AB で表わす．これらの演算については§2.3で詳しく述べるが，ともかく $M_n(K)$ は可換ではない環 $(n \geqq 2)$ になることが容易にわかる．たとえば加群としての零元はすべての成分が $0 \in K$ の行列(零行列といい，O_n で表わす)で与えられ，また分配則Ⅲを示すためには，体 K の分配則を用いて両辺の対応する成分が等しいことをいえばよい．また乗法が可換でない $(n \geqq 2)$ 例は第1章で示した．単位行列 $I_n=(\delta_{ij})$ がこの乗法に関する単位元であり，したがってⅡ-(2)をみたすことも明らかである．実は積 AB によって定まる線型変換 $K^n \to K^n$ は $F_{AB}=F_A \circ F_B$ であり，$GL(n, K)$ の乗法の定義と一致することもわかる．すなわち環 $M_n(K)$

の正則元全体の集合が $GL(n, K)$ である．

環 R の元を成分にもつ n 次正方行列全体の集合 $M_n(R)$ に対してもまったく同様の仕方で加法，乗法を定めることができるのであり，$M_n(R)$ はやはり環になる．R が単位元をもつ環ならば $M_n(R)$ はやはり単位元をもつ．——

例 2.13(**多項式環**) R を単位元をもつ可換環とする．R 係数の 1 変数多項式とは，文字 X の形式的べキ(単項式) X^0 ($=1$ で表わす), $X, X^2, \cdots, X^k, \cdots$ の有限個の R 係数‘線型結合’

$$f = f(X) = c_0 1 + c_1 X + \cdots + c_n X^n = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$$

のことである．ただし係数 c_k が 0 の項は省くことができるものとする．このとき $c_n \neq 0$ ならば，n を多項式 $f(X)$ の次数といい，$n = \deg f$ で表わす．係数 $c_0, c_1, \cdots, c_n$ がすべて 0 の多項式をまた 0 で表わし，少なくとも一つの係数が 0 ではない多項式 f は $f \neq 0$ とする．多項式 0 の次数は $-\infty$ と定義する：$\deg 0 = -\infty$. また $1 \cdot X^k$ は単に X^k で表わす．さてこのような R 係数 1 変数の多項式全体を $R[X]$ で表わし，これに加法，乗法を実係数の多項式の場合と同様に定義するのである．すなわち，$f = \sum c_k X^k$, $g = \sum d_l X^l \in R[X]$ のとき

$$f + g = \sum_k (c_k + d_k) X^k, \qquad fg = \sum_{k,l} c_k d_l X^{k+l}.$$

したがって $\deg(f+g) \leqq \max(\deg f, \deg g)$, $\deg(fg) \leqq \deg f + \deg g$ (R が零因子をもたない環 $\boldsymbol{Z}$ 等であれば等号が成立)である．この加法，乗法により $R[X]$ は多項式 $0, 1$ をそれぞれ零元，単位元とする可換環である．多項式 $0, 1$ をそれぞれ R の $0, 1$ と同一視して $R \subset R[X]$ とみなすことができることも実係数多項式の場合と同様である．

次に可換環 $R[X]$ 上の 1 変数多項式環 $R[X][Y]$ を同様にして定義できるが，これを $R[X, Y]$ で表わす．この場合にも上と同様の意味で $R \subset R[X] \subset R[X, Y]$ とみなす．したがってとくに $R[X, Y]$ が可換環であることから $XY = YX$.

以下同様にして，一般に n 個の文字 $X_1, \cdots, X_n$ に対して，R 上の n 変数多項式環を $R[X_1, \cdots, X_n] = R[X_1, \cdots, X_{n-1}][X_n]$ により帰納的に定義することができる．この場合にも $R \subset R[X_1] \subset \cdots \subset R[X_1, \cdots, X_n]$ とみなすのである．したがって $X_i X_j = X_j X_i$ ($1 \leqq i, j \leqq n$) であり，分配則を用いて

$$f \in R[X_1, \cdots, X_n] \iff f = \sum a_{i_1 \cdots i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \qquad \text{(有限和)}$$

を示すことができる．$X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n}$ を単項式といい，$i_1+\cdots+i_n$ をその次数という．$f=\sum a_{i_1\cdots i_n}X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n}$ については $a_{i_1\cdots i_n}\neq 0$ である項の次数のうち最大のものを f の次数といい，やはり $\deg f$ で表わす．——

例 2.14（**合成積の環**）　区間 $J=\{x\in \boldsymbol{R}\,|\,0\leqq x<\infty\}$ で定義された1変数の複素数値の連続関数全体の集合を $\mathcal{C}$ で表わす．$a,b\in\mathcal{C}$ に対して $a+b\in\mathcal{C}$ を

$$(a+b)(x)=a(x)+b(x)\qquad(\forall x\in J)$$

によって定義すれば，この加法 + によって $\mathcal{C}$ は加群である．さらに乗法を

$$a*b(x)=\int_0^x a(x-\xi)b(\xi)d\xi\qquad(\forall x\in J)\tag{2.6}$$

によって定義する．$a*b\in\mathcal{C}$ は $a,b\in\mathcal{C}$ の**合成積**とよばれるものであり，以下では $\mathcal{C}$ の乗法としてはこれだけを考えるから，通常の積のように $a*b=a\cdot b=ab$ で表わすことにする．また $f\in\mathcal{C}$ が変数 x の関数であることを明示する場合には，通常の関数の表わし方のかわりに $f=\{f(x)\}$ で表わし，ある $x\in J$ における値 $f(x)$ と区別することにしよう．たとえば $\{\sin x\}$, $\{2\}$ 等はそれぞれ任意の $x\in J$ において値 $\sin x$, 2 をとる関数であり，また積の定義(2.6)は

$$ab=\left\{\int_0^x a(x-\xi)b(\xi)d\xi\right\}$$

で表わされるのである．

この乗法が可換性 $ab=ba$ をもっていることは，(2.6)において積分変数の変換 $x-\xi=\eta$ を行なえば容易にわかる．分配則 $a(b+c)=ab+ac$ をみたしていることは明らかである．結合則 $a(bc)=(ab)c$ を証明しよう．まず

$$\begin{aligned}a(bc)(x)&=\int_0^x a(x-\xi)\left(\int_0^\xi b(\xi-\eta)c(\eta)d\eta\right)d\xi\\&=\int_0^x\int_0^\xi a(x-\xi)b(\xi-\eta)c(\eta)d\eta d\xi.\end{aligned}$$

ここで積分の変数変換 $(\xi,\eta)\to(\zeta,\eta)$，$\xi=\eta+\zeta$ を行なえば積分領域 $0\leqq\eta\leqq\xi$, $0\leqq\xi\leqq x$ は $0\leqq\zeta\leqq x-\eta$, $0\leqq\eta\leqq x$ で表わされるから，簡単な計算により

$$\begin{aligned}a(bc)(x)&=\int_0^x\left(\int_0^{x-\eta}a(x-\eta-\zeta)b(\zeta)d\zeta\right)c(\eta)d\eta\\&=(ab)c(x)\qquad(\forall x\in J).\end{aligned}$$

したがって結合則も証明された．以上によって加群 $\mathcal{C}$ は合成積によって定義さ

れた乗法により環であることがわかった．ところでこの環は単位元をもたないのである．実際 $e\in\mathcal{C}$ が単位元であるものとすれば，任意の $a\in\mathcal{C}$ に対して $ae=a$, すなわち $\int_0^x a(x-\xi)e(\xi)d\xi=a(x)$ が任意の $x\in J$ について成立するはずであるが，とくに $x=0$ とおけば $a(0)=0$ となり，集合 $\mathcal{C}$ を定義したときにはこのような条件は考えていなかったのであるから矛盾である．

一つの $a\in\mathcal{C}$ について $(n-1)$ 回合成積をくりかえすことを $a^n=\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{n}$ で表わせば，これについても結合則により当然指数法則

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},\qquad (a^m)^n=a^{mn},\qquad (ab)^n=a^nb^n$$

が成立する．たとえば

$$\{x\}^2=\{(1/6)x^3\},\qquad \{e^x\}^2=\{xe^x\},\qquad \{2\}^3=\{4x^2\}$$

等が簡単な積分の計算によって得られる．——

可換環 R の部分集合 J が次の二つの条件をみたしているとき，J を R の**イデアル**という：

(1)　$x, y\in J \Longrightarrow x+y\in J$,

(2)　$a\in R,\ x\in J \Longrightarrow ax\in J$.

とくに $m_1, m_2, \cdots, m_r\in R$ を固定しておき，

$$J=(m_1, m_2, \cdots, m_r)=\left\{\sum_{i=1}^{r} x_im_i \,\middle|\, x_i\in R\right\}$$

とおけば，これは明らかに R のイデアルになる．このとき J を $m_1, \cdots, m_r$ で生成されたイデアルという．

イデアルについての詳しい一般論はここでは述べない．体 K 上の1変数多項式環 $K[X]$ のイデアルについて，有理整数環 $\boldsymbol{Z}$ の場合と類似の性質を示す次の例を心得ていれば以下では十分である．

例 2.15　体 K 上の1変数多項式環 $K[X]$ は，有理整数環 $\boldsymbol{Z}$ と同様に Euclid 互除法が行なえるという意味で特殊な環である．すなわち $\varphi\in K[X]$ が $\varphi\neq 0$ ならば任意の $f\in K[X]$ に対し $f=q\varphi+r$, $\deg r<\deg\varphi$ であるような $q, r\in K[X]$ が一意的に定まる．q, r の存在の証明は $\deg f$ に関する帰納法による．$\deg f<\deg\varphi$ ならば明らか $(q=0,\ r=f)$ だから，$\deg f\geqq\deg\varphi$, $\nu=\deg f-\deg\varphi$ として $\alpha\in K^\times$ を f と $\alpha X^\nu\varphi$ の最高次の係数が一致するようにとり，$f_1=f-\alpha X^\nu\varphi$ とおけば $\deg f_1<\deg f$. したがって $f_1=q_1\varphi+r$, $\deg r<\deg\varphi$ であるように q_1,

$r\in K[X]$ を定めることができる．$q=\alpha X^{\nu}+q_1$ とおけばよい．そこで q', r' も q, r と同じ性質をもつものとすれば $q\varphi+r=q'\varphi'+r'$ により $(q-q')\varphi=r'-r$. 次数に関する条件によって $r'=r$, $q=q'$ でなければならないことがわかる．

この性質により，$\boldsymbol{Z}$ の場合と同様に，$K[X]$ の任意のイデアル J はただ一つの元によって生成されることが証明できる．$J=(0)$ の場合は明らかだから $J\neq(0)$ として，J に含まれる0ではない多項式のうちで最低次のものを φ とすれば $J=(\varphi)$ となるのである．実際，任意の $f\in J$ に対して上のように q, r をとれば，$r=f-q\varphi\in J$, $\deg r<\deg\varphi$ であるから $r=0$, したがって $f=q\cdot\varphi\in(\varphi)$.

とくに $J=(m_1,\cdots,m_r)$ の場合には $\varphi=\mathrm{G.C.D.}(m_1,\cdots,m_r)$ とすれば $J=(\varphi)$ となること等も $\boldsymbol{Z}$ の場合とまったく同様に証明できる．念のため，$f,h\in K[X]$, $h\neq0$ のとき $f=qh\ (\exists q\in K[X])$ ならば，h を f の約数，f を h の倍数といい，有限個の $m_1,\cdots,m_r\in K[X]$ に共通の約数を $m_1,\cdots,m_r$ の公約数，また公約数のうちで最大次数のものを最大公約数といって $\mathrm{G.C.D.}(m_1,\cdots,m_r)$ で表わす等，すべて実係数の多項式についてと同様である．

たとえば，$\alpha\in\boldsymbol{C}$ を根とする実係数多項式全体 $J_\alpha=\{f\in\boldsymbol{R}[X]\mid f(\alpha)=0\}$ は環 $\boldsymbol{R}[X]$ のイデアルであり，

$$\alpha\in\boldsymbol{R}\quad\text{ならば}\quad J_\alpha=(X-\alpha),$$
$$\alpha\notin\boldsymbol{R}\quad\text{ならば}\quad J_\alpha=(X^2-(\alpha+\bar\alpha)X+\alpha\bar\alpha)$$

である．——

一般に環 R の元 $x\neq0$ に対して $xy=0$（または $yx=0$）となる R の元 $y\neq0$ があるとき，x を左（または右）**零因子**という．たとえば n が素数でなければ $\boldsymbol{Z}/(n)$ が零因子をもつことは前に述べた．また $M_2(K)$ の元でたとえば $\begin{bmatrix}a&b\\0&0\end{bmatrix}$ $(a,b\neq0)$ の形のものは零因子である：

$$\begin{bmatrix}a&b\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-b\\0&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-b\\0&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

有理整数環 $\boldsymbol{Z}$ は可換環であり，零因子をもたない．このように零因子をもたない可換環のことを**整域**という．体は明らかに整域である．また例2.11の $\mathfrak{o}$ も整域である．

例 2.16　単位元をもつ整域 R 上の1変数多項式環 $R[X]$ はまた整域である．実際 $f(X)=\sum c_kX^k$, $g(X)=\sum d_lX^l\in R[X]$ の次数をそれぞれ $m, n\geqq0$ とすれ

ば $c_m \neq 0$, $d_n \neq 0$ であり，R が整域であるから $c_m d_n \neq 0$, したがって $fg \neq 0$ である．とくに $\deg(fg) = \deg f + \deg g$.

このことからさらに n 変数多項式環 $R[X_1, \cdots, X_n]$ も，R が整域であれば整域であることが帰納的にわかる．——

環 R の部分集合 R' が R に定義されている演算によってそれ自身また環になっているとき，R' は R の**部分環**であるという．例 2.13 において R は $R[X]$ の，$R[X_1, \cdots, X_{n-1}]$ は $R[X_1, \cdots, X_n]$ の部分環である．また $\boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{Q}$ の，$\mathfrak{o}$ は $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ の部分環である．とくに R, R' がともに体であるとき，R' を R の**部分体**，R を R' の**拡大体**という．たとえば $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ は $\boldsymbol{Q}$ の拡大体である．

有理数体 $\boldsymbol{Q}$ は，その発生的な意味から，整域 $\boldsymbol{Z}$ の分数体あるいは商体であるという．有理数とは $a, b \in \boldsymbol{Z}$, $b \neq 0$ によって分数 a/b で表わされるもののことであり，$a_1/b_1 = a_2/b_2 \Leftrightarrow a_1 b_2 = a_2 b_1$ であった．一般に体 K の任意の元が，K のある部分環 R の元によって ab^{-1} $(a, b \in R,\ b \neq 0)$ で表わされるとき，K を R の**分数体**あるいは**商体**というのである．たとえば $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ は整数環 $\mathfrak{o}$ の商体である．

定理 2.1 任意の整域 R に対してその商体 K がかならず存在する．しかも K は R に対して本質的に一意的に定まる．

証明 まず整域 R が単位元をもつものとして証明しよう．単位元をもたない整域の場合でもほとんど同様にして証明できるのであるが，$\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Q}$ の関係を思いうかべることによって以下の形式的な議論が実例をともなった直観的に理解しやすいものとなるのである．

集合 $S = \{(a, b) \mid a, b \in R,\ b \neq 0\}$ に $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 b_2 = a_2 b_1$ によって一つの同値関係を導入することができる．この同値関係に関して (a, b) で代表される類を a/b で表わす．商集合 $K = S/\sim$ に加法，乗法を

$$a_1/b_1 + a_2/b_2 = (a_1 b_2 + a_2 b_1)/(b_1 b_2),$$
$$(a_1/b_1)(a_2/b_2) = (a_1 a_2)/(b_1 b_2)$$

によって定義する．この定義が代表元のとり方には無関係であることは簡単な計算によってわかる．これらの演算によって K が体になっていることの証明も容易であろう．たとえば零元は $0/1 = 0/b$ $(b \neq 0)$, 単位元は $1/1 = b/b$ $(b \neq 0)$, また $a, b \in R$ がどちらも 0 でなければ a/b, $b/a \in K$ であり，$(a/b)^{-1} = b/a$ である．さらに $a \in R$ と $a/1 \in K$ とが 1 対 1 に対応している．$a, b \in R$ のとき，この対応で

$a+b \leftrightarrow (a+b)/1 = a/1+b/1$, $ab \leftrightarrow (ab)/1 = (a/1)(b/1)$. すなわち, a を $a/1$ と同一視したとき, R の加法, 乗法がちょうど K のそれ等を R に制限して考えたものと一致しているのである. このときさらに $R \ni a \neq 0$ ならば $a^{-1} = (a/1)^{-1} = 1/a$. したがって $a/b = ab^{-1}$ である. すなわち K は R の商体である.

次に K' もまた R の商体とし, その乗法をかりに $\circ$ で表わすことにしよう. したがって R の中では $a \circ b = ab$ であり, 任意の $x' \in K'$ は $x' = a \circ b^{-1}$ $(a, b \in R$, $b \neq 0)$ で表わされる. このとき $a, a', b, b' \in R$ $(b, b' \neq 0)$ に対して

$$a \circ b^{-1} = a' \circ b'^{-1} \iff ab' = a'b \iff ab^{-1} = a'b'^{-1}$$

であるから, $\varphi : K \ni ab^{-1} \mapsto a \circ b^{-1} \in K'$ によって K から K' への全単射を定義できる. とくに $a \in R$ に対しては $\varphi(a) = a$, すなわち $\varphi | R = 1_R$ (φ の R への制限は R の恒等変換)である. しかも $x, y \in K$ に対して

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \qquad \varphi(xy) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$$

であることが容易にわかる. すなわち加法, 乗法の演算に関しては K, K' はまったく同じ構造をもつのであり, 元を $x \in K$ で表わすか $\varphi(x) \in K'$ で表わすかという記号上の相違しかなく, R の商体とよぶ限りでは同じものと考えてよいのである. (正確には K, K' は体として R 上同型であるという.)

以上によって, R が単位元をもつ場合には定理 2.1 が証明できたのであるが, R が単位元をもたない整域であっても商体 K を上とまったく同様の方法で構成できる. このとき K の単位元は $1 = b/b$ $(b \in R,\ b \neq 0)$ で表わされ, $b, b' \in R$ がともに 0 でなければ $(ab)/b = (ab')/b'$ であるから $a = a(b/b) = (ab)/b$ とみなすことができ, R は K の部分環と考えることができる. 商体の一意性の証明もまったく同様である. ▌

例 2.17　例 2.16 により体 K 上の n 変数多項式環 $K[X_1, \cdots, X_n]$ は整域である. その商体 $K(X_1, \cdots, X_n)$ を K 上の n 変数**有理関数体**といい, その元を有理関数という. 体 $K(X_1, \cdots, X_n)$ は明らかに K の拡大体である. ——

c) Mikusiński の演算子法

線型微分方程式の機械的な解法として**演算子法**とよばれるものがある. 系統的な一種の方法論としては Heaviside によって確立された(1899 年)のであるが, それは $p = d/dx$ を微分演算子とよび, 積分は微分の逆演算であるという理由で $1/p$ で表わし, さらに通常のベキ級数のように $1/(p+\alpha) = (1/p)(1-\alpha/p+\cdots+$

$(-\alpha/p)^{\nu}+\cdots)$ と考えて計算してもよいという，かなり粗雑なものであった．それでも微分方程式の解をみつける方法としては威力があった．Heaviside の演算子法を Laplace 変換に基礎をおいて部分的に説明することも行なわれたが，演算子法本来の軽便さは逆に犠牲にされることになったのである．

新しく代数的な観点から演算子法を展開し，ふたたびその軽便さをとりもどしたのは Mikusiński(1951 年)である．ここではそのすべてを解説するわけにはいかないが，定数係数の常微分方程式を簡単に解く，理論的にも明確な裏付けのある方法として，初等的な部分を説明しておく．詳細については Mikusiński 自身の著書がある[1)]．

区間 $J=\{x\in \boldsymbol{R}\mid 0\leqq x<\infty\}$ で定義された 1 変数の複素数値連続関数全体の集合 $\mathcal{C}$ に例 2.14 で述べた仕方で環の構造を考える．とくに乗法は a, b の合成積

$$ab=\left\{\int_0^x a(x-\xi)b(\xi)d\xi\right\} \tag{2.6}$$

で定義され，これによって $\mathcal{C}$ は単位元をもたない可換環となるのであった．実は $a, b\in\mathcal{C}$ がともに恒等的には 0 でない関数であれば，その合成積 ab も恒等的には 0 にならないことが知られている．すなわち

$$ab=0 \Longrightarrow a=0 \quad \text{または} \quad b=0. \tag{2.7}$$

これは Titchmarsh の定理とよばれ，1924 年にはじめて証明されて以来多くの証明法が考案されている．ここでは(2.7)の証明は省略するが，興味のある読者は前記 Mikusiński の著書を参照されるとよい．

さて(2.7)によって環 $\mathcal{C}$ は整域であり，したがってその商体 $\mathcal{M}$ が一意的に定まる(定理 2.1)．体 $\mathcal{M}$ の元は一般にはもはや J で連続な関数とは限らず，それどころか通常の意味では関数とはいえないものが多く含まれているのである．そこで $\mathcal{M}$ の元を一般に演算子という．ここでとくに大切なことは，$a\in\mathcal{C}$，$a\neq 0$ に対して $1/a$ とは，合成積(2.6)に関する a の体 $\mathcal{M}$ の中での逆元であり，そのようなものを考える理論的な根拠が確立されているということである．

定数関数 $\{1\}$ を l で表わし，これを $\mathcal{M}$ の元としてとくに**積分演算子**という．名称のいわれは，任意の $f\in\mathcal{C}$ に対して(2.6)から

1) 邦訳(松村，松浦，笠原)“演算子法 上，下”(裳華房)．また J. P. Marchand(芹沢訳)“超関数入門”(東京図書)の第 2 章にも明快な説明がある．

$$(l\cdot f)(x)=(\{1\}*f)(x)=\int_0^x f(\xi)d\xi \qquad (x\in J) \tag{2.8}$$

であることによる．l のベキ l^n $(n=1,2,\cdots)$ も (2.8) を用いて順次計算できる：

$$l=\{1\},\quad l^2=\{x\},\quad l^3=\{x^2/2!\},\quad \cdots,\quad l^n=\{x^{n-1}/(n-1)!\}.$$

積分演算子 l の $\mathcal{M}$ の中での逆元 $s=1/l$, すなわち $ls=sl=1$ となる $\mathcal{M}$ の元 s を**微分演算子**という．ここで 1 は体 $\mathcal{M}$ の単位元である．

複素数 α に対して $s\{\alpha\}=\{\alpha\}/l\in\mathcal{M}$ であるが，これを α 自身とみなして，すなわち $\alpha=s\{\alpha\}$ と同一視することによって，$\boldsymbol{C}\subset\mathcal{M}$ と思うことができる．実際，対応 $\alpha\mapsto s\{\alpha\}=\{\alpha\}/l$ は単射であり，$\alpha,\beta\in\boldsymbol{C}$ に対して

$$\alpha+\beta\longleftrightarrow\{\alpha+\beta\}/l=\{\alpha\}/l+\{\beta\}/l,$$

$$\alpha\beta\longleftrightarrow\{\alpha\beta\}/l=(l\{\alpha\beta\})/l^2=\{\alpha\beta x\}/l^2=(\{\alpha\}/l)(\{\beta\}/l)$$

と対応している．とくに $\boldsymbol{C}\ni 1\leftrightarrow l/l=1\in\mathcal{M}$. したがって $\mathcal{M}$ は $\boldsymbol{C}$ の一つの拡大体になっているというわけである．また $f\in\mathcal{C}$ に対して

$$\alpha f=\alpha\{f(x)\}=\{\alpha\}\{f(x)\}/l=\{\alpha f(x)\}.$$

したがってとくに $f=\{\beta\}=l\beta$ $(\beta\in\boldsymbol{C})$ ならば $\alpha\{\beta\}=\{\beta\}\alpha=\{\alpha\beta\}$ である．($\boldsymbol{C}\subset\mathcal{M}$ とみなしたとき，α と $\{\alpha\}$ とは異なるものであることに注意せよ.)

とくに $f\in\mathcal{C}$ が区間 J で連続な導関数 f' を持つものとすれば，微分積分学の基本原理により $f=lf'+\{f(0)\}=lf'+lf(0)$ であるからこの両辺に $s=1/l$ をかけて

$$sf=f'+f(0) \tag{2.9}$$

となる．これが s を微分演算子とよぶ理由である．$f(0)=0$ である f に対しては $sf=f'$ となり，通常の微分演算と一致する．たとえば

$$s\{e^{\alpha x}\}=\alpha\{e^{\alpha x}\}+1,\qquad s\{x^n\}=n\{x^{n-1}\}.$$

さらに $f\in\mathcal{C}$ が J 上で n 回連続微分可能ならば (2.9) をくりかえし用いて $s^nf=f^{(n)}+f^{(n-1)}(0)+sf^{(n-2)}(0)+\cdots+s^{n-1}f(0)$ が得られる．したがって

$$f^{(n)}=s^nf-s^{n-1}f(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0). \tag{2.10}$$

さて $q\in\mathcal{C}$, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\boldsymbol{R}$ として，微分方程式

$$y^{(n)}+\alpha_1y^{(n-1)}+\cdots+\alpha_ny=q \tag{2.11}$$

を初期条件

$$y^{(\nu)}(0)=\gamma_\nu\qquad(0\leqq\nu\leqq n-1)$$

のもとで解くことを考えよう．体 $\mathscr{M}$ を考えることにより微分方程式(2.11)は $\mathscr{M}$ 係数の代数的な1次方程式とみなすことができるのである．実際(2.10)を用いて $y^{(\mu)}=s^{\mu}y-s^{\mu-1}y(0)-\cdots-y^{(\mu-1)}(0)$ $(1\leqq\mu\leqq n)$ であるから，これを(2.11)に代入して整理すれば

$$(2.12)\qquad (s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\cdots+\alpha_n)y=\beta_0 s^{n-1}+\beta_1 s^{n-2}+\cdots+\beta_{n-1}+q.$$

ここで β_ν $(0\leqq\nu\leqq n-1)$ は初期条件によって定まるものであり，

$$(2.13)\qquad \beta_\nu=\gamma_\nu+\alpha_1\gamma_{\nu-1}+\cdots+\alpha_\nu\gamma_0\qquad (0\leqq\nu\leqq n-1).$$

体 $\mathscr{M}$ 上の1次方程式として(2.12)を解けば

$$(2.14)\qquad y=\frac{\beta_0 s^{n-1}+\cdots+\beta_{n-1}}{s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\cdots+\alpha_n}+\frac{q}{s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\cdots+\alpha_n}.$$

この右辺を今度は文字 s の分数関数として部分分数に分解し，さらに簡単な場合に帰着させることができる．

このとき次のことが基本的である：

$$(2.15)\qquad 1/(s-\alpha)^n=\{x^{n-1}e^{\alpha x}/(n-1)!\}\qquad (n=1,2,\cdots)$$

が任意の $\alpha\in\boldsymbol{C}$ に対して成立する．

[証明] (2.9)により $s\{e^{\alpha x}\}=1+\alpha\{e^{\alpha x}\}$ であるから，$1/(s-\alpha)=\{e^{\alpha x}\}$，したがって $1/(s-\alpha)^2=\{e^{\alpha x}\}\{e^{\alpha x}\}=\{xe^{\alpha x}\}$ (合成積)．以下合成積をくりかえして(2.15)が得られる．▌

例 2.18 2階の線型常微分方程式

$$y''+ay'+by=e^{\lambda x}\qquad (a,b,\lambda\in\boldsymbol{R})$$

を考えよう．右辺は演算子法の記号では $\{e^{\lambda x}\}=1/(s-\lambda)$ とかくのが正しい．(同様に右辺がたとえば定数 c である場合には，$\{c\}=l\cdot c=c/s$ として考える．) したがって $y(0)=\gamma_0$，$y'(0)=\gamma_1$ (初期条件)とすれば，(2.12)と同様にして

$$(s^2+as+b)y=\gamma_0 s+(\gamma_1+a\gamma_0)+1/(s-\lambda).$$

$$\therefore\quad y=\frac{\gamma_0 s+(\gamma_1+a\gamma_0)}{s^2+as+b}+\frac{1}{(s-\lambda)(s^2+as+b)}.$$

これを部分分数にわけて(2.15)を用いれば解が得られる．

たとえば $\lambda=3$，$a=-1$，$b=-6$ ならば $s^2-s-6=(s+2)(s-3)$ だから

$$y=c_1/(s+2)+c_2/(s-3)+\frac{1}{25}(1/(s+2)-1/(s-3)+5/(s-3)^2)$$

$$= c_1\{e^{-2x}\} + c_2\{e^{3x}\} + \frac{1}{25}\{e^{-2x} - e^{3x} + 5xe^{3x}\}.$$

したがって通常の関数の記号にもどせば，いわゆる一般解

$$y = c_1' e^{-2x} + c_2' e^{3x} + \frac{1}{5} xe^{3x}$$

が得られる．c_1', c_2' は初期条件が与えられれば決定できるわけである．

また $a^2-4b<0$ の場合には $s^2+as+b=(s-\alpha)(s-\bar{\alpha})$ としてそのまま計算を行ない，後で

$$\alpha = c + d\sqrt{-1}, \qquad \begin{cases} (e^{\alpha x}+e^{\bar{\alpha}x})/2 = e^{cx}\cos dx \\ (e^{\alpha x}-e^{\bar{\alpha}x})/2 = \sqrt{-1}e^{cx}\sin dx \end{cases}$$

を用いて書き変えればよい．——

問　次の微分方程式を解け．

(1)　$y''-y'-2y = e^{3x}$,　(2)　$y''-4y'+4y = 0$,　(3)　$y''+y = 0$. ——

線型系が定数係数である場合にも，同様の解法を考えることができる．$A=(a_{ij}) \in M_n(\boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{b}: J \to \boldsymbol{R}^n$ として

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t) \tag{2.16}$$

を初期条件 $\boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^n$ のもとで解くことを考えよう．$\boldsymbol{y}={}^t(y_1, \cdots, y_n)$ とすれば，各 y_i について(2.9)を用いて $y_i'=sy_i-y_i(0)$. したがって(2.9)は

$$(sI_n - A)\boldsymbol{y} = \{\boldsymbol{b}(t)\} + \boldsymbol{c} \tag{2.17}$$

と書き変えることができる．これは体 $\mathcal{M}$ の元を係数とする連立1次方程式である．たとえば消去法で解くことにより，各 y_i は $\mathcal{M}$ の元であり，とくに s の分数関数として表わされることがわかる．したがってそれをまた部分分数にわけて(2.15)を用いること等ができる．

例 2.19　定数係数の同次線型系

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

を初期条件 ${}^t(x(0), y(0))={}^t(\gamma_1, \gamma_2)$ のもとで解くことを考える．これは(2.17)により，体 $\mathcal{M}$ 上の連立1次方程式

$$(s-a)x - by = \gamma_1, \qquad -cx + (s-d)y = \gamma_2$$

を解くことと同じである．消去法によって解けば

$$x=\frac{\gamma_1 s-d\gamma_1+b\gamma_2}{s^2-(a+d)s+ad-bc},\qquad y=\frac{\gamma_2 s+c\gamma_1-a\gamma_2}{s^2-(a+d)s+ad-bc}.$$

分母を $s^2-(a+d)s+ad-bc=(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)$ とし，s に関する部分分数に分解して(2.15)を用いればよい．

(1) $\lambda_1, \lambda_2\in\boldsymbol{R}$, $\lambda_1\neq\lambda_2$ のとき： $x=C_1/(s-\lambda_1)+C_2/(s-\lambda_2)$, $y=C_3/(s-\lambda_1)+C_4/(s-\lambda_2)$ であるから通常の関数記号で $x=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}$, $y=C_3e^{\lambda_1 t}+C_4e^{\lambda_2 t}$ が得られる．ただし $C_1, \cdots, C_4$ は，$C_1+C_2=\alpha$, $\lambda_2C_1+\lambda_1C_2=d\gamma_1-b\gamma_2$, および $C_3+C_4=\beta$, $\lambda_2C_3+\lambda_1C_4=-c\gamma_1+a\gamma_2$ によって決定される．

(2) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda\ (=(a+d)/2)$ のとき：$x=C_1/(s-\lambda)+C_2/(s-\lambda)^2$, $y=C_3/(s-\lambda)+C_4/(s-\lambda)^2$ である．したがって $x=(C_1+C_2t)e^{\lambda t}$, $y=(C_3+C_4t)e^{\lambda t}$. ただし $C_1=\gamma_1$, $\lambda C_1-C_2=d\gamma_1-b\gamma_2$, $C_3=\gamma_2$, $\lambda C_3-C_4=-c\gamma_1+a\gamma_2$.

(3) $\lambda_1=\rho+\sqrt{-1}\sigma$, $\lambda_2=\rho-\sqrt{-1}\sigma$ $(\rho,\sigma\in\boldsymbol{R},\ \sigma\neq 0)$ のとき：まず(1)と同様にして $x=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}$, $y=C_3e^{\lambda_1 t}+C_4e^{\lambda_2 t}$ が得られる．ここで $e^{\lambda_1 t}=e^{\rho t}(\cos\sigma t+\sqrt{-1}\sin\sigma t)=e^{\bar{\lambda}_2 t}$ を代入すれば $x=e^{\rho t}(C_1'\cos\sigma t+C_2'\sin\sigma t)$, $y=e^{\rho t}(C_3'\cos\sigma t+C_4'\sin\sigma t)$ である．ただし $C_1'=C_1+C_2$, $C_2'=\sqrt{-1}(C_1-C_2)$, $C_3'=C_3+C_4$, $C_4'=\sqrt{-1}(C_3-C_4)$. $C_1', \cdots, C_4'$ は定数である．——

§2.2 線型空間，線型写像

a) 線型空間の定義と例

第1章で扱った $V(E^3)$, K^n, $C^\nu(J)$ 等はすべて2種類の演算(加法，スカラー乗法)をもち，基本的に同じ演算の性質をみたしていた．そこでこれ等を一括して線型空間とよんでいたのである．

スカラー乗法も‘演算’といったが，これは群の演算等とは少し異なる性格をもっている．一般に加群 M が単位元をもつ環 R 上の左側の**スカラー乗法**をもつというのは，任意の $a\in M$ と任意の $\lambda\in R$ に対して M の元 λa が定まり，すなわち写像 $R\times M\ni(\lambda, a)\mapsto\lambda a\in M$ が与えられており，

(1) $1a=a$ (1 は R の単位元),

(2) $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$,

(3) $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$,

(4) $(\lambda\mu)a=\lambda(\mu a)$

をみたしていることである($a,b\in M,\ \lambda,\mu\in R$). このとき M を**左 R 加群**という. 環 R 自身は, $M=R$ とすればこの定義により, R 加群である. つまりスカラー乗法というのは通常の(環の)乗法の概念をもう少し一般にしたものであるといえる. たとえば単位元をもつ環 R に対して加群 R^n を例2.4のように定義できるが, このときさらに $R\times R^n\ni(\lambda,{}^t(\alpha_1,\cdots,\alpha_n))\mapsto\lambda^t(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)={}^t(\lambda\alpha_1,\cdots,\lambda\alpha_n)\in R^n$ によってスカラー乗法を定義すれば, R^n は R 加群である. 実際上記の性質(1)〜(4)は, R の乗法の性質, 左右の分配則から自然に証明できる. 第1章で定義した列ベクトル空間 K^n とは, この意味での K 加群に他ならない.

問 M を左 R 加群とする. このとき

$$0a=o \qquad (0 \text{ は } R \text{ の零元, } o \text{ は } M \text{ の零元}),$$

$$(-1)a=-a \qquad (1 \text{ は } R \text{ の単位元})$$

が任意の $a\in M$ に対して成立することを(1)〜(4)だけから証明せよ. ——

以下においてわれわれが扱うのは主としてスカラー乗法が体 K 上で定義されている場合である. それは体 K 上の一つの1次方程式がかならず解をもつという理由によるのであり, 第1章でも述べたとおり, そのような場合にいまは関心があるのである. たとえば環 $\boldsymbol{Z}$ 上の一つの1次方程式は解をもつとは限らないのであり, 解をもつためにはある種の条件が必要であった.

左 K 加群を体 K 上の**線型空間**, あるいは**ベクトル空間**というのである. すなわち集合 V が体 K 上の線型空間であるとは, 次の I, II が成立していることである.

I V は演算 + により加群である;

II V は体 K 上の(左側の)スカラー乗法をもつ.

これは, 第1章で演算の基本的性質として述べた I-(0)〜(3), II-(1)〜(4)に他ならない. (スカラー乗法を右側から考えて $a\lambda$; $a\in V,\ \lambda\in K$ のように表わしても悪いという理由はないが, 左側に限るのは記述に一貫性をもたせるためである.)

すでに $V(E^3)$, K^n, $C^\infty(J,\boldsymbol{R}^n)$ 等の基本的な例を知っているわけであるが, さらにいくつかの例を次に述べる.

例 2.20 体 K 上の n 変数多項式環 $K[X_1,\cdots,X_n]$ ($n\geqq1$) は, K の元を多項式にかける場合だけに乗法を限って考えれば, K 上の線型空間である. ——

例 2.21 体 L を体 K の拡大体とする. K の元を L の元にかけることをスカ

ラー乗法として，L は K 上の線型空間になっている．とくに $L=\boldsymbol{C}$, $K=\boldsymbol{R}$ の場合，対応

$$\boldsymbol{C} \ni a+\sqrt{-1}b \longleftrightarrow {}^t(a, b) \in \boldsymbol{R}^2$$

によって，$\boldsymbol{R}$ 上の線型空間としての $\boldsymbol{C}$ が $\boldsymbol{R}$ 上の2次元列ベクトル空間と同一視できることはよく知られている．同様に，例2.10の体 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ が $\boldsymbol{Q}$ 上の線型空間としては2次元列ベクトル空間 $\boldsymbol{Q}^2$ と同一視できることも容易にわかる．

もっと一般に，L 上の線型空間 V は，スカラー乗法を K の元をかけることだけに制限すれば，K 上の線型空間とみなすことができる．たとえば $L=\boldsymbol{C}$, $K=\boldsymbol{R}$ のとき，

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{C}^n \ni {}^t(a_1+\sqrt{-1}b_1, \cdots, a_n+\sqrt{-1}b_n) = \boldsymbol{a}+\sqrt{-1}\boldsymbol{b}, \\ &\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, \cdots, a_n), \qquad \boldsymbol{b} = {}^t(b_1, \cdots, b_n) \in \boldsymbol{R}^n \end{aligned}$$

であるから，$\boldsymbol{C}^n=\boldsymbol{R}^n+\sqrt{-1}\boldsymbol{R}^n \ni \boldsymbol{a}+\sqrt{-1}\boldsymbol{b} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{2n}$ の対応により，$\boldsymbol{R}$ 上の線型空間としての $\boldsymbol{C}^n$ は $2n$ 次元列ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^{2n}$ と同一視できる．——

問 例2.10における $\boldsymbol{Q}(\omega)$ は2次元列ベクトル空間 $\boldsymbol{Q}^2$ と同一視できることを示せ．——

例 2.22 複素数の無限数列 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ を簡単に $\{a_n\}$ で表わし，その全体の集合を V とする：$V=\{\{a_n\}, \{b_n\}, \cdots\}$．この V に加法とスカラー乗法をそれぞれ

$$\begin{aligned} &\{a_n\}+\{b_n\} = \{a_n+b_n\} \qquad &(\text{各 } n \text{ ごとに和をとる}), \\ &\lambda\{a_n\} = \{\lambda a_n\} \qquad &(\text{各項に } \lambda \in \boldsymbol{C} \text{ をかける}) \end{aligned}$$

によって定義すれば，V は $\boldsymbol{C}$ 上の線型空間である．——

例 2.23 集合 $S \neq \phi$ から体 K 上の線型空間 V への写像全体の集合を V^S で表わす：$V^S=\{F: S \to V\}$．これに加法，スカラー乗法を

(2.18) $$(F_1+F_2)(x) = F_1(x)+F_2(x), \qquad (\lambda F)(x) = \lambda F(x)$$

によって定義する．ただし $x \in S$, $F_1, F_2 \in V^S$, $\lambda \in K$．右辺はそれぞれ V における和とスカラー倍である．このとき V^S が体 K 上の線型空間であることは容易にわかる．たとえば零ベクトル(加群としての零元)は任意の $x \in S$ を恒等的に $o \in V$ に写すもので与えられる．——

例2.22，例2.23等の線型空間はあまりに一般的であり，実際的な問題を考える場合にはそれほどしばしばあらわれることはない．しかしこれ等の線型空間の

部分集合で，同じ演算によって線型空間となるものの中には応用上有用なものが多いのである．一般に体 K 上の線型空間 V の部分集合 $W \neq \phi$ が，V に定義されている加法，スカラー乗法によってそれ自身また K 上の線型空間になっているとき，W を V の(線型)**部分空間**という．線型空間 V の部分集合 $W \neq \phi$ が部分空間であるためには，W が加法，スカラー乗法に関して‘閉じている’こと，すなわち

(1) $x, y \in W \Longrightarrow x+y \in W$,

(2) $x \in W,\ \lambda \in K \Longrightarrow \lambda x \in W$

の二つの条件をみたしていることが必要十分である．実際 V の演算で，W 自身が K 上の線型空間であるならば，この (1), (2) は当然成り立っていなければならない．逆に (1), (2) をみたしているとすれば，とくに (2) によって V の零元が W に含まれること ($\lambda=0$ とおく)，$x \in W$ ならば $-x \in W$ であること ($\lambda=-1$ とおく) がわかり，また加法に関する結合則，スカラー乗法に関する性質 (1)～(4) は本来 V の中で成立しているのであるから，たしかに W は K 上の線型空間になっている．とくに $W=\{o\}$ は一つの部分空間である．

例 2.24 線型空間 V の二つの部分空間 W_1, W_2 の共通部分 $W_1 \cap W_2$ はまた V の部分空間である．加法，スカラー乗法に関して閉じていることをいえばよいが，これは簡単である．

これに対して合併集合 $W_1 \cup W_2$ は V の部分空間にはなっていない．W_1, W_2 を両方とも含む部分空間は，少なくとも任意の $x_1 \in W_1$, $x_2 \in W_2$ に対して x_1+x_2 を含んでいなければならないからである．そこで $W_1+W_2=\{x_1+x_2 \mid x_1 \in W_1, x_2 \in W_2\}$ とおけば，これはたしかに上記の二つの条件 (1), (2) をみたしているから部分空間であり，W_1, W_2 を部分集合として含んでいる．この W_1+W_2 を部分空間 W_1, W_2 の**和空間**という．——

例 2.25 $f, g \in K[X]$ がともに n 次以下の多項式であれば，和 $f+g$ はまた n 次以下の多項式であり，また任意の $\lambda \in K$ に対して λf も n 次以下の多項式である．したがってある自然数 n に対して n 次以下の多項式全体の集合は K 上の線型空間としての $K[X]$ の部分空間をなす．——

例 2.26 K 係数の n 変数の多項式 $f=\sum a_{i_1 \cdots i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$ が p 次の同次多項式であるとは，$a_{i_1 \cdots i_n} \neq 0$ ならば $i_1+\cdots+i_n=p$ となっていることである．たとえ

ば $n=2$ の場合単項式 X^3, X^2Y, XY^2, Y^3 およびこれらの‘線型結合’ $\sum_{i+j=3} a_{ij}X^iY^j$ は3次の同次多項式である．$K[X_1, \cdots, X_n]$ の p 次同次多項式全部と 0 とを合わせた部分集合 $K^{(p)}[X_1, \cdots, X_n]$ は K 上の線型空間としての $K[X_1, \cdots, X_n]$ の部分空間である．——

例 2.27 $\boldsymbol{R}$ 上の列ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ は $\boldsymbol{C}$ 上の列ベクトル空間 $\boldsymbol{C}^n$ の部分集合であるが，部分空間というわけにはいかない．加法に関しては閉じているが，スカラー乗法に関しては閉じていないからである．しかし例2.21でも述べたとおり，$\boldsymbol{C}^n$ のスカラー乗法を $\boldsymbol{R}$ に制限して考えれば，$\boldsymbol{C}^n$ は $\boldsymbol{R}$ 上の線型空間であり，その意味では $\boldsymbol{R}^n$ は $\boldsymbol{C}^n$ の($\boldsymbol{R}$ 上での)部分空間である．

一般に体 L 上の線型空間 V を L の部分体 K 上の線型空間とみなしたとき，K 上の線型空間 W がその意味での V の部分空間になっているならば，W は V の‘K 上での部分空間’であるという．——

例 2.28 列ベクトル空間 K^n の部分集合

$$W = \{{}^t(x_1, \cdots, x_r, 0, \cdots, 0) \mid x_i \in K\}$$

は明らかに K^n の部分空間である．これを K^r と同一視できることは容易にわかるであろう．したがって W は K^r を K^n の中で表わしたものと考えてよく，その意味で K^r を K^n の部分空間とみなすことができるのである．——

例 2.29 例2.22のベクトル空間 V の中で，収束する数列全体 W_1 は部分空間をなす．それは $\lim a_n$, $\lim b_n$ が存在すれば $\lim(a_n+b_n)$, $\lim(\lambda a_n)$ $(\lambda \in \boldsymbol{C})$ も存在するからである．さらにつよく $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ が収束する数列 $\{a_n\}$ の全体 W_2 もやはり部分空間をなすことは，$|\lambda a_n|^2 = |\lambda|^2 |a_n|^2$ および

$$\begin{aligned} |a_n+b_n|^2 &\leqq |a_n+b_n|^2 + |a_n-b_n|^2 \\ &= (a_n+b_n)\overline{(a_n+b_n)} + (a_n-b_n)\overline{(a_n-b_n)} = 2(|a_n|^2+|b_n|^2) \end{aligned}$$

からわかる．明らかに $W_2 \subset W_1 \subset V$. ——

例 2.30 実数のある区間 J で定義された $\boldsymbol{R}^n$ に値をとる関数 $\boldsymbol{y}: J \to \boldsymbol{R}^n$ の全体を $F(J, \boldsymbol{R}^n)$ で表わすことにしよう．これは例2.23において $S=J$, $V=\boldsymbol{R}^n$ としたときの V^S であり，(2.18)によって加法，スカラー乗法を定義すれば $\boldsymbol{R}$ 上の線型空間である．$\boldsymbol{y} \in F(J, \boldsymbol{R}^n)$ が C^ν 級 $(\nu = 0, 1, 2, \cdots, \infty, \omega)$ であるというのは各成分 y_i が C^ν 級であることをいう．

$$C^\nu(J, \boldsymbol{R}^n) = \{\boldsymbol{y} \in F(J, \boldsymbol{R}^n) \mid C^\nu \text{ 級}\}$$

とおけばこれは明らかに $F(J, \boldsymbol{R}^n)$ の部分空間である．

$A(t)=(a_{ij}(t))$ を J で定義された実数体上の n 次正方行列に値をとる C^ν 級関数，すなわち各 a_{ij} が C^ν 級であるとする．このとき同次線型系

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = A(t)\boldsymbol{y} \tag{2.19}$$

の解 $\boldsymbol{y}$ は J 全体で連続に定義されることが知られている．したがってとくに $\boldsymbol{y} \in C^{\nu+1}(J, \boldsymbol{R}^n)$ である．また $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}$ を(2.19)の解とし，$\lambda \in \boldsymbol{R}$ とすれば，$\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2$, $\lambda\boldsymbol{y}$ はまた(2.19)の解である．したがって(2.19)の解全体 W は $C^{\nu+1}(J, \boldsymbol{R}^n)$ の部分空間である．この線型空間 W を(2.19)の**解空間**という．

また同次 n 階線型常微分方程式

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)y = 0 \tag{2.20}$$

の解は，$p_1(x), \cdots, p_n(x)$ が J 上で定義された C^ν 級の関数であれば，J 上で定義された $C^{\nu+n}$ 級の関数である．このことは§1.2, b) で述べた方法で，(2.20)を(2.19)の形に帰着させることによってわかる((1.30)″ 参照)．すなわち(2.20)の解全体 W' は $C^{\nu+n}(J)=C^{\nu+n}(J, \boldsymbol{R})$ の部分空間になるのである．

このように(2.19), (2.20)の解全体 W, W' が $\boldsymbol{R}$ 上の線型空間をなすことは，線型微分方程式の一般論において基本的である．——

なお写像(あるいは関数)の集合に例2.23の方法で線型空間の構造を考えることは数学の一つの基本的方法であり，例2.30の場合に限らず極めて有用である．

b) 線型写像の演算，最小多項式

同じ体 K 上の二つの線型空間 V, V' の間の写像 $F: V\to V'$ が

(1)　$F(x_1+x_2) = F(x_1)+F(x_2)$,

(2)　$F(\lambda x) = \lambda F(x)$

(ただし $x_1, x_2, x \in V$, $\lambda \in K$)をみたすとき，F を V から V' への**線型写像**といい，とくに $V'=V$ のとき F を**線型変換**というのであった．線型写像の性質を明らかにすることが線型代数の一つの大きな目標となる理由はこれまでに述べてきたことから察せられるはずである．

列ベクトル空間の線型写像に関する定理1.1は今後も重要である．さらに線型写像のいくつかの例を次に述べておく．

例 2.31　区間 $J\subset \boldsymbol{R}$ 上で $C^\nu(J, \boldsymbol{R}^n)$ を例2.30のように定義すれば

$$D:\ C^{\nu}(J, \boldsymbol{R}^n) \ni \boldsymbol{y} \longmapsto \frac{d\boldsymbol{y}}{dt} \in C^{\nu-1}(J, \boldsymbol{R}^n) \qquad (\nu \geqq 1)$$

は線型写像である．——

例 2.32 $\sigma: \boldsymbol{C}^n \ni \boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+\sqrt{-1}\boldsymbol{y} \mapsto \overline{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{x}-\sqrt{-1}\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{C}^n$ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n)$ は $\boldsymbol{C}^n$ の加法は保っているが，$\boldsymbol{C}$ 上の線型空間としてのスカラー乗法は保っていない．実際，$\sigma(\lambda \boldsymbol{z})=\bar{\lambda}\sigma(\boldsymbol{z})$ $(\lambda \in \boldsymbol{C})$ である．しかし $\boldsymbol{C}$ を $\boldsymbol{R}$ 上での線型空間とみなせば σ は $\boldsymbol{C}^n$ 上の線型変換である．この意味で σ は $\boldsymbol{R}$ 上線型であるという．

一般に体 L 上の線型空間 V, V' を L のある部分体 K 上での線型空間とみなしたときに $F: V \to V'$ が線型写像になっているならば，F は 'K 上で線型写像' であるという．体 L 上で線型な写像は当然 L の任意の部分体上で線型写像である．——

例 2.33 収束する複素数列全体のなす線型空間(例 2.29 の W_1)を V とすれば，$V \ni \{a_n\} \mapsto \lim a_n \in \boldsymbol{C}$ が線型写像の条件(1), (2)をみたすことは周知のとおりである．——

例 2.34 区間 $J=\{x \in \boldsymbol{R} \mid 0 \leqq x < \infty\}$ で定義された複素数値の連続関数全体の集合 $\mathscr{C}$ は，例 2.23 の意味での線型空間 $\boldsymbol{C}^J$ の部分空間として，複素数体 $\boldsymbol{C}$ 上の線型空間である．その加群としての構造のうえに，合成積

$$a*b(x)=\int_0^x a(x-\xi)b(\xi)d\xi \qquad (x \in J)$$

を考えて可換環になることは§2.1で述べたとおりである．$a \in \mathscr{C}$ を一つ固定し，$S_a: \mathscr{C} \ni f \mapsto a*f=f*a \in \mathscr{C}$ とすれば，明らかに $S_a(f_1+f_2)=S_a(f_1)+S_a(f_2)$，$S_a(\lambda f)=\lambda S_a(f)$ $(f_1, f_2, f \in \mathscr{C},\ \lambda \in \boldsymbol{C})$ であるから，S_a は $\mathscr{C}$ 上の線型変換である．とくに $S_{\{1\}}f=lf$ であった．また環 $\mathscr{C}$ の商体 $\mathscr{M}$ の単位元 1 は環 $\mathscr{C}$ の元ではないが，$\mathscr{C} \ni f \mapsto 1 \cdot f=f \in \mathscr{C}$ により $\mathscr{C}$ 上の恒等変換を定義する．そこでこの 1 を通常の関数記号で $\delta(x)$ によって表わし $(S_\delta f)(x)=\int_0^x \delta(x-\xi)f(\xi)d\xi=f(x)$ と考えることがある．この仮想の関数 $\delta(x)$ は Dirac の δ 関数とよばれている．——

以下に述べる二つの定理は，証明はやさしいが，線型代数においては終始基本的である．

定理 2.2 $F: V \to V'$ を線型写像とする．このとき V の F による像 $F(V)$ は V' の部分空間である．また零元 $o' \in V'$ の F による逆像 $F^{-1}(o')$ は V の部分空

間である．

証明　$F(x), F(y) \in F(V)$，$\lambda \in K$ とすれば，$F(x)+F(y)$，$\lambda F(x)$ はそれぞれ $F(x+y)$，$F(\lambda x)$ とかけるからまた $F(V)$ の元である．したがって $F(V)$ は V' の部分空間である．また $x, y \in F^{-1}(o')$，$\lambda \in K$ ならば

$$F(x+y) = F(x)+F(y) = o', \qquad F(\lambda x) = \lambda F(x) = o'$$

であるから $x+y, \lambda x \in F^{-1}(o')$．したがって $F^{-1}(o')$ は V の部分空間である．▌

部分空間 $F^{-1}(o')$ を線型写像 F の**核**(kernel)といって，$\mathrm{Ker}\, F$ で表わす．これに対応して V の F による像(image) $F(V)$ を $\mathrm{Im}\, F$ で表わすこともある．

V, V' を体 K 上の線型空間とし，V から V' への(K 上の)線型写像全体の集合を $L(V, V')$，正確には $L_K(V, V')$ で表わす．

定理 2.3　(1)　加法，スカラー乗法を

$$(F_1+F_2)(x) = F_1(x)+F_2(x), \qquad (\lambda F)(x) = \lambda F(x) \qquad (x \in V)$$

(ただし $F_1, F_2, F \in L(V, V')$，$\lambda \in K$)によって定義すれば，$L(V, V')$ は K 上の線型空間である．

(2)　$F \in L(V, V')$，$G \in L(V', V'')$　ならば　$G \circ F \in L(V, V'')$．

証明　(1)　例 2.23 の意味での線型空間 $(V')^V$ の演算に関して $L(V, V')$ が閉じていることをいうのである．$F_1, F_2, F \in L(V, V')$，$\lambda \in K$ とすれば

$$\begin{aligned}(F_1+F_2)(x+y) &= F_1(x+y)+F_2(x+y)\\ &= F_1(x)+F_2(x)+F_1(y)+F_2(y)\\ &= (F_1+F_2)(x)+(F_1+F_2)(y),\\ (\lambda F)(\mu x) = \lambda F(\mu x) &= \mu(\lambda F(x)) = \mu(\lambda F)(x)\end{aligned}$$

が任意の $x, y \in V$，$\mu \in K$ について成立する．したがって F_1+F_2，$\lambda F \in L(V, V')$．

(2)　$x, y \in V$，$\lambda \in K$ とすれば

$$\begin{aligned}G\circ F(x+y) &= G(F(x)+F(y)) = G\circ F(x)+G\circ F(y),\\ G\circ F(\lambda x) &= G(\lambda F(x)) = \lambda G\circ F(x).\end{aligned}$$

したがって $G\circ F \in L(V, V'')$．▌

とくに体 K 上の線型空間 V における線型変換全体の集合 $L(V, V)$ は定理 2.3 の加法，乗法(写像の結合)によって環になることがわかる．実際，乗法に関する結合則は一般の写像の結合則(1.36)から明らかであり，**零変換** $O=O_V: x \mapsto o$，**恒等変換** $I=I_V: x \mapsto x$ $(x \in V)$ がそれぞれ環としての零元，単位元になっている

のである．左右の分配則を試すことも容易である．この環 $L(V, V)$ を $\mathrm{End}(V)$, $\mathrm{End}_K(V)$ 等で表わすこともある．V 上の線型変換のことを K 加群の自己準同型写像(endomorphism)ともいうからである．

$T\in\mathrm{End}(V)$ が全単射であるとき，$V=K^n$ の場合と同様に T は**正則**であるという．V 上の正則線型変換全体の集合を $GL(V)$ で表わすが，これが $\mathrm{End}(V)$ の乗法によって群であることは，$V=K^n$ の場合(§2.1, a))とまったく同様にしてわかる．$GL(V)$ を V 上の**一般線型群**という．

例 2.35　$F\in L(V, V')$ が単射であるためには $\mathrm{Ker}\,F=\{o\}$ が必要十分である．$\mathrm{Ker}\,F=\{o\}$ ならば

$$F(x)=F(y) \Longrightarrow F(x-y)=o' \Longrightarrow x-y\in\mathrm{Ker}\,F=\{o\} \Longrightarrow x=y$$

であるから，F はたしかに単射である．逆に F が単射のとき $\mathrm{Ker}\,F=\{o\}$ は明らかである．——

例 2.36　区間 $J\subset\boldsymbol{R}$ 上で定義された実係数 n 次正方行列に値をとる C^ν 級関数 $A(t)=(a_{ij}(t))$ を線型写像

$$C^{\nu+1}(J, \boldsymbol{R}^n)\ni \boldsymbol{y}\longmapsto A(t)\boldsymbol{y}\in C^\nu(J, \boldsymbol{R}^n)$$

とみなす．$D=d/dt: C^{\nu+1}(J, \boldsymbol{R}^n)\to C^\nu(J, \boldsymbol{R}^n)$ も線型写像であったから，定理 2.3 により $D-A(t)$ はまた $C^{\nu+1}(J, \boldsymbol{R}^n)$ から $C^\nu(J, \boldsymbol{R}^n)$ への線型写像である．同次線型系(2.19)の解空間とは $\mathrm{Ker}\,(D-A(t))$ のことに他ならない．

$D^k=D\circ D^{k-1}: y\mapsto d^ky/dx^k$ は，定理 2.3 によって $C^m(J)=C^m(J, \boldsymbol{R})$ $(m\geqq k)$ から $C^{m-k}(J)$ への線型写像である．これに $p(x)\in C^{m-k}(J)$ をかけて線型写像

$$C^m(J)\ni y\longmapsto p(x)y^{(k)}\in C^{m-k}(J)$$

が得られる．したがって $p_1(x), \cdots, p_n(x)\in C^\nu(J)$ のとき

$$L=D^n+p_1(x)D^{n-1}+\cdots+p_n(x)I \qquad (I=D^0)$$

は $C^{\nu+n}(J)$ から $C^\nu(J)$ への線型写像であり，同次 n 階線型常微分方程式(2.20)の解空間とは $\mathrm{Ker}\,L$ のことに他ならないのである．——

例 2.37　実係数 p 次同次多項式(例 2.26 参照)のある一つの変数に関する 1 階偏導関数は $(p-1)$ 次同次多項式である．このことから線型写像

$$\frac{\partial}{\partial X_i}: \boldsymbol{R}^{(p)}[X_1, \cdots, X_n]\ni f\longmapsto\frac{\partial f}{\partial X_i}\in\boldsymbol{R}^{(p-1)}[X_1, \cdots, X_n]$$

が得られる$(i=1, \cdots, n)$．したがって定理 2.3 により

$$\triangle = \left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial X_n}\right)^2$$

は線型写像 $\boldsymbol{R}^{(p)}[X_1, \cdots, X_n] \to \boldsymbol{R}^{(p-2)}[X_1, \cdots, X_n]$ を与える．この $\triangle$ を Laplace 作用素，Ker $\triangle$ の元を p 次の**同次調和多項式**という．——

問　2変数 X, Y の同次調和多項式で，2次，3次，および4次のものはそれぞれどのような形をしているか．(実は一般に $(X+\sqrt{-1}\,Y)^p = u(X, Y)+\sqrt{-1}\,v(X, Y)$，$u, v \in \boldsymbol{R}[X, Y]$ とすれば，u, v は p 次同次調和多項式であり，任意の2変数の p 次同次調和多項式は $\alpha u+\beta v$，$\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ と表わされる.) ——

一般に V を体 K 上の線型空間とし，$T \in L(V, V)$ とすれば，任意の $f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^{n-i} \in K[X]$ に対して定理2.3により線型変換 $f(T) = \sum_{i=0}^{n} a_i T^{n-i}$ $(T^0 = I)$ が得られる．とくに $f(T) = O$ (零変換) となるような多項式 $f \neq 0$ が存在するとき，そのような多項式のうちで次数が最小であり，最高次の係数が1であるものを T の**最小多項式**といい，以下では φ_T で表わすことにする．

$J_T = \{f \in K[X] \mid f(T) = O\}$ は明らかに $K[X]$ のイデアルであるから，$J_T \neq (0)$ ならば $J_T = (\varphi_T)$ (例2.15参照) である．すなわち $f(T) = O$ となる $f \in K[X]$ はすべて φ_T の倍数になっているわけである．いまわれわれが考えているような '一般的な' 線型空間では任意の線型変換 T に対して最小多項式 φ_T が存在するとは限らない．しかし存在するならば，すなわち $J_T \neq (0)$ ならば，$J_T = (\varphi_T)$ であり，φ_T の最高次の係数が1であることから，φ_T は T に対して一意的に定まるものであることがわかる．

例 2.38　定数係数の同次 n 階常微分方程式

$$(*) \qquad y^{(n)} + \alpha_1 y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_n y = 0$$

の解空間を V とする．$L = D^n + \alpha_1 D^{n-1} + \cdots + \alpha_n I$ とおけば $L \circ D = D \circ L$ であるから $y \in V = \mathrm{Ker}\, L$ ならば $y' = Dy \in V$．そこで D を V に制限して V 上の線型変換とみなしたものを $\bar{D}$ で表わす．このとき $\bar{D}$ の最小多項式 φ は

$$\varphi(X) = X^n + \alpha_1 X^{n-1} + \cdots + \alpha_n \in \boldsymbol{R}[X]$$

で与えられる．実際，$\varphi(\bar{D}) = L \mid V = O_V$ であり，もし φ よりも次数の低い多項式 $\boldsymbol{R}[X] \ni h \neq 0$ が $h(\bar{D}) = O_V$ をみたすものとすれば任意の $y \in V$ は微分方程式 $h(D)y = 0$ の解になっているはずであるが，演算子法による解法を思い出せば，このような h は存在しないことがわかる．(*)については(2.14)の分母の s に

関する次数は n であるが，$h(D)y=0$ についてはそれが n よりも低次になっているからである．——

§2.3 行　列

a) 列ベクトル空間の線型写像

体 K の元を成分にもつ (m,n) 型行列全体の集合を以下では $M(m,n;K)$ で表わす．とくに $M(n,n;K)=M_n(K)$ である．

定理1.1により $A\in M(m,n;K)$ を $F_A\in L(K^n,K^m):K^n\ni \boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}\in K^m$ に対応させる写像は全単射であった．一方，定理2.3により $L(K^n,K^m)$ は K 上の線型空間の構造をもっている．そこで F_A+F_B, λF_A $(\lambda\in K)$ に対して一意的に定まる行列をそれぞれ $A+B$, λA で表わす．すなわち

$$F_{A+B}=F_A+F_B,\qquad F_{\lambda A}=\lambda F_A. \tag{2.21}$$

これによって $L(K^n,K^m)$ の線型空間の構造をそっくり $M(m,n;K)$ にうつすことができ，定理1.1の対応によって線型空間として $L(K^n,K^m)=M(m,n;K)$ とみなすことができるわけである．K^n, K^m の標準底をそれぞれ $(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$, $(\boldsymbol{e}_1',\cdots,\boldsymbol{e}_m')$ とすれば $A=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=(a_{ij})\in M(m,n;K)$ に対して $F_A(\boldsymbol{e}_j)=\boldsymbol{a}_j=\sum_{i=1}^m a_{ij}\boldsymbol{e}_i'$ である．したがってまた $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})\in M(m,n;K)$ とすれば，(2.21)によって $A+B$, λA の各 (i,j) 成分はそれぞれ $a_{ij}+b_{ij}$, λa_{ij} で与えられることがわかる：

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij}),\qquad \lambda A=(\lambda a_{ij}). \tag{2.22}$$

$M(m,n;K)$ の線型空間としての零元は**零行列** $O_{m,n}=$(成分がすべて0の行列)で与えられ，また $A=(a_{ij})$ ならば $-A=(-a_{ij})$ であること等は容易に証明できる．とくに $M(n,1;K)$ と K^n とは K 上の線型空間としてまったく同じものである：$K^n=M(n,1;K)$.

(m,n) 型行列で (i,j) 成分だけが1であり他の成分はすべて0であるものを E_{ij} で表わし，このような行列を $M(m,n;K)$ の**行列単位**という．任意の $A=(a_{ij})\in M(m,n;K)$ は $A=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}E_{ij}$ と表わされ，$A=O_{m,n}$ となるのは $a_{ij}=0$ のときに限る．

次に $A\in M(l,m;K)$, $B\in M(m,n;K)$ とする．このとき $F_A\in L(K^m,K^l)$, $F_B\in L(K^n,K^m)$ であり，定理2.3によって $F_A\circ F_B\in L(K^n,K^l)$ が得られる．し

たがって $F_A \circ F_B = F_C$ となる $C \in M(l, n; K)$ が一意的に定まる．この C を A, B の積といい，$C = AB$ で表わす．すなわち

$$F_{AB} = F_A \circ F_B. \tag{2.23}$$

このとき $A=(a_{ik})$，$B=(b_{kj})$，$AB=C=(c_{ij})$ とすれば

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \qquad (1 \leqq i \leqq l,\ 1 \leqq j \leqq n). \tag{2.24}$$

この関係式は A が (m, n) 型で B が $(n, 1)$ 型のとき，および A, B がともに n 次正方行列の場合にはすでにしばしば用いている．

[(2.24)の証明]　K^n の標準底を $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ とする．定理1.1の証明からわかるように $F_C(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{c}_j$ $(\in K^l)$ とおけばこれは C の第 j 列ベクトルである．同様に $F_B(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{b}_j$ $(\in K^m)$ は B の第 j 列ベクトルであり，

$$F_A \circ F_B(\boldsymbol{e}_j) = F_A(\boldsymbol{b}_j) = A\boldsymbol{b}_j.$$

したがって $F_C = F_A \circ F_B$ により $\boldsymbol{c}_j = A\boldsymbol{b}_j$ $(1 \leqq j \leqq n)$ である．この両辺の第 i 成分を比較して(2.24)が得られる．▌

行列の加法，乗法に関して次の諸性質を証明するのは容易である．

$$\begin{cases} (1)\quad A(BC) = (AB)C \qquad (\text{結合則}), \\ (2)\quad A(B+C) = AB+AC, \quad (A+B)C = AC+BC \qquad (\text{分配則}), \\ (3)\quad AI_n = I_m A = A \qquad (A \in M(m, n; K)), \\ (4)\quad AO_{n,l} = O_{m,l}, \quad O_{l,m}A = O_{l,n} \qquad (A \in M(m, n; K)). \end{cases} \tag{2.25}$$

ただし(1), (2)において各式の両辺は演算に関して意味があるものとする．たとえば，(1)は写像の結合則(1.36)から明らかであり，(2)は $F_A \circ (F_B + F_C) = F_A \circ F_B + F_A \circ F_C$，$(F_A + F_B) \circ F_C = F_A \circ F_C + F_B \circ F_C$ をいえばよいが，これは簡単である．他もすべて線型写像についての対応する性質からわかる．あるいは(2.22), (2.24)を用いて両辺の対応する成分が等しいことを示すことによってすべて直接に証明することもできる．

とくに $M_n(K)$ は加法，乗法によって環であることが，(2.25)の特別な場合としてわかるわけであるが，このことはすでに例2.12で説明した．

b）行列の演算

われわれはこれまで行列を列ベクトル空間の線型写像を表わすものという立場だけから扱ってきた．行列の加法，スカラー乗法，乗法も上述のように線型写像

の対応する演算から自然に導入されるものとして定義したのである．しかしこれ等の演算をそなえたものとしての行列は計算上扱いやすい形態をしており，表示法が具体的であるために，いろいろなものを表現する手段として線型写像とは直接関係のない場合にもしばしば用いられる．

そこで純粋に行列論的な立場から再度演算の定義をしておく．それは(2.22)および(2.24)を‘定義’とするだけのことであるが，ただしもっと一般に単位元をもつ環の元を成分とする行列について考えることにする．単に形式上同様にできるからというわけではなく，その方が応用上有力だからである．以下環 R は‘単位元をもつ’ものとする．

単位元をもつ環 R の元 a_{ij} $(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$ を (i, j) 成分とする行列 $A = (a_{ij})$ の全体を $M(m, n; R)$ で表わす．

加法　$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M(m, n; R)$ に対して $a_{ij} + b_{ij}$ を (i, j) 成分$(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$とする行列を A, B の和といい，$A+B$ で表わす．この演算 $+$ によって $M(m, n; R)$ は加群になる．零元は零行列 $O_{m,n}$ (成分がすべて $0 \in R$ である行列)によって与えられる．また $A = (a_{ij})$ に対して $-A = (-a_{ij})$ (各 (i, j) 成分が $-a_{ij}$ である行列)である．

スカラー乗法　$A = (a_{ij}) \in M(m, n; R)$, $\lambda \in R$ に対して各 (i, j) 成分が λa_{ij} で与えられる行列を λA で表わし，A の λ 倍という．これによって $M(m, n; R)$ にスカラー乗法が定まり左 R 加群となる．§2.2で述べたスカラー乗法の性質(1)～(4)は上述の加法の定義と環の演算の性質とから自然に導かれる．

例 2.39　$M_2(\boldsymbol{R})$ の中で

$$\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & -(b_1+b_2) \\ b_1+b_2 & a_1+a_2 \end{bmatrix},$$

$$\lambda \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a & -\lambda b \\ \lambda b & \lambda a \end{bmatrix}.$$

したがって $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in \boldsymbol{R} \right\}$ は $\boldsymbol{R}$ 上の線型空間 $M_2(\boldsymbol{R})$ の部分空間である．これは複素数体 $\boldsymbol{C}$ を $\boldsymbol{R}$ 上での線型空間とみたとき，対応 $\boldsymbol{C} \ni a + \sqrt{-1}\,b \mapsto \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in W$ によって $\boldsymbol{C}$ を $M_2(\boldsymbol{R})$ の部分空間として表わしたものと考えることができる．——

例 2.40　$R = \boldsymbol{R}[X]$ とする．$M_2(R)$ の中で

$$\begin{bmatrix} X^2+X+1 & X-1 \\ X+1 & 2X \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(X+1) & X \\ X & X \end{bmatrix} = X\begin{bmatrix} X+1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \text{——}$$

例 2.41　$M(2,3;\boldsymbol{Z}/(12))$ の中で

$$\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{6} \\ \bar{8} & \bar{5} & \bar{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{6} & \bar{0} \\ \bar{4} & \overline{10} & \bar{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{3} & \bar{9} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} \end{bmatrix} = \bar{3}\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} = \bar{3}\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{6} \\ \bar{8} & \bar{5} & \bar{4} \end{bmatrix}. \text{——}$$

乗法　$A=(a_{ik}) \in M(l,m;R)$, $B=(b_{kj}) \in M(m,n;R)$ に対して各 (i,j) 成分が $\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$ で与えられる (l,n) 型行列を A, B の積といい，AB で表わす．このとき性質(2.25)の(1)～(4)がみたされていることは，各等式の両辺の対応する成分が一致することから証明される．たとえば左分配則 $A(B+C)=AB+AC$ を証明しよう．左辺の (i,j) 成分は環 R の分配則を用いて

$$\sum_k a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = \sum_k (a_{ik}b_{kj}+a_{ik}c_{kj})$$

であるが，これは明らかに右辺の (i,j) 成分 $\sum_k a_{ik}b_{kj}+\sum_k a_{ik}c_{kj}$ に等しい．他も同様に簡単に証明できる．とくに $M_n(R)$ は環である．単位元は単位行列 $I_n=(\delta_{ij})$ で与えられる．

環 $M_n(R)$ の正則元を**正則**行列，あるいは**ユニモジュラ**行列という．すなわち $A \in M_n(R)$ が正則であるとは

(2.26)　$$\exists X \in M_n(R):\ AX = XA = I_n.$$

$M_n(R)$ の正則行列全体の集合 $M_n(R)^\times = GL(n,R)$ は行列の乗法で群になる．群の元の逆元の一意性により(2.26)の X は A に対して一意的に定まる．そこで $X=A^{-1}$ で表わして，これを A の**逆行列**という．

任意の行列 $A \in M_n(R)$ に対して $A^0=I_n$ と定義する．任意の正の整数 k に対しては，帰納的に $A^k=AA^{k-1}$ によって A の k 乗が定まり，指数法則

(2.27)　$$A^{k+l} = A^kA^l, \qquad (A^k)^l = A^{kl},$$

(2.28)　$$AB = BA \Longrightarrow (AB)^k = A^kB^k$$

(ただし k,l は負ではない整数)が成立する．また A が正則のときは負の整数 $-k$ $(k>0)$ に対しても $A^{-k}=(A^{-1})^k=(A^k)^{-1}$ によって A の $(-k)$ 乗が定まり，指数法則は任意の整数 k,l に対して成立するのである．(2.28)において条件 $AB=BA$ は重要であり，この条件がなければ成立しない．たとえば

(2.29)　$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

ベキ乗に関するこれ等の性質は，一般の環の乗法についての性質として成立して

いるのであり，すべて乗法に関する結合則にもとづいている．

例 2.42　例 2.39 の $W \subset M_2(\boldsymbol{R})$ は行列の乗法に関して閉じている．すなわち

$$\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2-b_1b_2 & -(a_1b_2+b_1a_2) \\ b_1a_2+a_1b_2 & -b_1b_2+a_1a_2 \end{bmatrix} \in W.$$

これはちょうど $\boldsymbol{C} \ni \alpha_1 = a_1+\sqrt{-1}b_1$，$\alpha_2 = a_2+\sqrt{-1}b_2$ の積

$$\alpha_1\alpha_2 = (a_1a_2-b_1b_2)+\sqrt{-1}(a_1b_2+a_2b_1)$$

の例 2.39 の対応による像になっている．つまり例 2.39 の対応はさらに乗法も保存しているのである．いいかえれば $\boldsymbol{C}$ は体として環 $M_2(\boldsymbol{R})$ の部分環 W と同一視できる．——

例 2.43　$R = \boldsymbol{Z}/(12)$ とするとき，R の元を成分にもつ行列としては

$$\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{6} \\ \bar{8} & \bar{5} & \bar{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{8} \\ \bar{3} & \bar{5} \\ \bar{6} & \bar{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{1}\cdot\bar{1}+\bar{3}\cdot\bar{3}+\bar{6}\cdot\bar{6} & \bar{1}\cdot\bar{8}+\bar{3}\cdot\bar{5}+\bar{6}\cdot\bar{4} \\ \bar{8}\cdot\bar{1}+\bar{5}\cdot\bar{3}+\bar{4}\cdot\bar{6} & \bar{8}\cdot\bar{8}+\bar{5}\cdot\bar{5}+\bar{4}\cdot\bar{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{10} & \overline{11} \\ \overline{11} & \bar{9} \end{bmatrix}. \text{——}$$

例 2.44　n 次正方行列単位 $E_{ij} \in M_n(R)$ については

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il} \tag{2.30}$$

が成立する．右辺の δ_{jk} は Kronecker の記号($j=k$ のとき 1，$j \neq k$ のとき 0)である．——

問　(2.30) を試せ．——

例 2.45　$A = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{bmatrix} \in M_n(R)$ (対角成分以外はすべて 0) の形の行列を**対角行列**という．とくにこの A が正則であるためには各 a_i が R の正則元であることが必要十分であり，このとき $A^{-1} = \begin{bmatrix} a_1^{-1} & & 0 \\ & a_2^{-1} & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n^{-1} \end{bmatrix}$ である．対角行列全体の集合 $D_n(R)$ は $M_n(R)$ の部分環をなすことは容易にわかる．さらに R が可換環ならば $D_n(R)$ は可換環である．行列の加法とスカラー乗法により $D_n(R)$ は左 R 加群であるが，これは R^n と全く同じ R 加群と考えることができる．——

例 2.46　対角成分がすべて $\lambda \in R$ であるような対角行列 $\lambda I_n \in M_n(R)$ をとくに**スカラー行列**という．R が可換環ならば λI_n はすべての $A \in M_n(R)$ と可換である：

$$(\lambda I_n)A = A(\lambda I_n) = \lambda A.$$

(注意. R が可換環ならば一般に $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$.) ところでこの逆もいえるのである. すなわち R が可換環ならば

$$\{Z \in M_n(R) \mid ZA = AZ,\ \forall A \in M_n(R)\} = \{\lambda I_n \mid \lambda \in R\}.$$

$Z = (z_{ij}) = \sum_{i,j} z_{ij}E_{ij}$ が $\forall A \in M_n(R)$ と可換ならば Z はスカラー行列であることをいえばよい. とくに E_{kl} とも可換であることから, $ZE_{kl} = E_{kl}Z$ の両辺を(2.30)を用いて計算すれば

$$(\text{左辺}) = \sum_{i,j} z_{ij}E_{ij}E_{kl} = \sum_{i} z_{ik}E_{il},$$

$$(\text{右辺}) = \sum_{i,j} z_{ij}E_{kl}E_{ij} = \sum_{j} z_{lj}E_{kj}.$$

したがって $z_{kk} = z_{ll}$, $z_{ik} = z_{lj} = 0\ (i \neq k,\ j \neq l)$ である. これから $z_{11} = \cdots = z_{nn}$, $z_{ij} = 0\ (i \neq j)$ が得られる. ゆえに Z はスカラー行列である. ——

例 2.47 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_2(\boldsymbol{Z}) \subset M_2(\boldsymbol{R})$ は, $M_2(\boldsymbol{R})$ の元としては正則であるが $M_2(\boldsymbol{Z})$ の元としては正則ではない. 実際, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ は A の $M_2(\boldsymbol{R})$ の中での逆行列を与え, 一意性により他には(2.26)をみたす X はないが, A^{-1} は $M_2(\boldsymbol{Z})$ の元ではない. ——

問 $A \in M_2(\boldsymbol{Z})$ が正則であるためには $\det A = \pm 1$ であることが必要十分である. 証明せよ. ——

$A \in M(l, m; R)$, $B \in M(m, n; R)$ の積を実際に計算するとき, 行列の形によっては適当な工夫をすることにより能率よく行なうことができる. たとえば B の列ベクトルを $\boldsymbol{b}_j\ (1 \leqq j \leqq n)$ で表わし, $B = (\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n)$ とすれば明らかに

$$A(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n) = (A\boldsymbol{b}_1, \cdots, A\boldsymbol{b}_n).$$

したがってたとえば B の第 j 列が $\boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{o} \in R^m$ ならば AB の第 j 列は $\boldsymbol{o} \in R^l$ であることが成分を個別的に計算するまでもなくわかるのである. このことをさらに次のように一般化することができる: A, B をそれぞれ

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ & \cdots\cdots & & \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ & \cdots\cdots & & \\ B_{q1} & B_{q2} & \cdots & B_{qr} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} A_{st}\in M(l_s, m_t\,;R), & B_{tu}\in M(m_t, n_u\,;R), \\ \sum_{s=1}^{p} l_s = l, \quad \sum_{t=1}^{q} m_t = m, & \sum_{u=1}^{r} n_u = n \end{cases}$$

のように小さい行列に分割し，$C_{su}=\sum_{t=1}^{q} A_{st}B_{tu}$ とおけば $C_{su}\in M(l_s, n_u\,;R)$ であり，

$$AB = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ & \cdots\cdots & & \\ C_{p1} & C_{p2} & \cdots & C_{pr} \end{bmatrix}. \tag{2.31}$$

証明は両辺の対応する成分が等しいことをいえばよく，本質的に明らかなことである．計算に慣れてしまえば実際に(2.31)はいうまでもない自明な等式であることがわかるから，ここではあえて証明を省く．

例 2.48　$\begin{bmatrix} O_n & -I_n \\ I_n & O_n \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} {O_n}^2-{I_n}^2 & -O_nI_n-I_nO_n \\ I_nO_n+O_nI_n & -{I_n}^2+{O_n}^2 \end{bmatrix} = -I_{2n}$,

$$\begin{matrix} l_1(\\ l_2(\end{matrix}\begin{bmatrix} \overset{m_1}{\widehat{A_1}} & \overset{m_2}{\widehat{A_{12}}} \\ O & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & B_{12} \\ \underset{n_1}{\underbrace{O}} & \underset{n_2}{\underbrace{B_2}} \end{bmatrix}\begin{matrix})m_1 \\ )m_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} A_1B_1 & A_1B_{12}+A_{12}B_2 \\ O & A_2B_2 \end{bmatrix}.$$ ——

例 2.49　$A=\begin{matrix} n_1(\\ n_2(\end{matrix}\begin{bmatrix} \overset{n_1}{\widehat{A_1}} & \overset{n_2}{\widehat{A_{12}}} \\ O & A_2 \end{bmatrix}\in M_n(R)$ $(n=n_1+n_2)$ は正則であるものとする．このとき A_1 が正則ならば A_2 も正則であることがわかる．まず $\exists X\in M_n(R) : AX=XA=I_n$ だから $X=\begin{matrix} n_1(\\ n_2(\end{matrix}\begin{bmatrix} \overset{n_1}{\widehat{X_1}} & \overset{n_2}{\widehat{X_{12}}} \\ X_{21} & X_2 \end{bmatrix}$ とすれば(2.31)を用いて

$$\begin{bmatrix} A_1X_1+A_{12}X_{21} & A_1X_{12}+A_{12}X_2 \\ A_2X_{21} & A_2X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1A_1 & X_1A_{12}+X_{12}A_2 \\ X_{21}A_1 & X_{21}A_{12}+X_2A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & O \\ O & I_{n_2} \end{bmatrix}$$

が得られる．したがって $X_1A_1=I_{n_1}$ および A_1 が正則であることにより，$X_1={A_1}^{-1}$．また $X_{21}A_1=O$ の両辺に右側から ${A_1}^{-1}$ をかければ $X_{21}=O$．したがって $A_2X_2=X_2A_2=I_{n_2}$ であり，A_2 は正則，$X_2={A_2}^{-1}$ である．このときさらに $A_1X_{12}+A_{12}X_2=O$ から $X_{12}=-{A_1}^{-1}A_{12}{A_2}^{-1}$ である．以上により A, A_1 が正則ならば A_2 も正則であり，A の逆行列は

$$X = A^{-1} = \begin{bmatrix} {A_1}^{-1} & -{A_1}^{-1}A_{12}{A_2}^{-1} \\ O & {A_2}^{-1} \end{bmatrix}. \tag{2.32}$$

逆に A_1, A_2 が正則であれば，(2.32)で定義される X によって $AX=XA=I_n$ が直接計算で確かめられるから A は正則である.

この結果を用いて帰納法によりさらに，$A_1, \cdots, A_k$ が正則ならば

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{bmatrix} \qquad (A_i \in M_{n_i}(R))$$

が正則であることもわかる．このとき $A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & & ** \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k^{-1} \end{bmatrix}$. ——

一般に $\begin{bmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix} \in M_n(R)$ の形の行列を**上三角行列**という．A, B を上三角行列とすれば $A+B$, λA $(\lambda \in R)$ はまた上三角行列であることは明らかであるが，さらに例2.48を用いて AB も上三角行列であることが帰納的に証明できる．また例2.49の特別な場合として，$A=\begin{bmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix}$ が正則であるためには $a_1, \cdots, a_n$ がすべて R の正則元であることが十分条件になっていることもわかる．**下三角行列** $\begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_n \end{bmatrix}$ についてもすべて同様である.

なお正則行列について次のことを注意しておく.

(2.33)　$A \in M_n(R)$ が正則 $\Longleftrightarrow$ $\exists X, Y \in M_n(R)$：$AX=I_n$，$YA=I_n$.

実際 A が正則ならば $X=Y=A^{-1}$ とすればよく，逆に $AX=I_n$，$YA=I_n$ ならば

$$X=I_nX=(YA)X=Y(AX)=YI_n=Y$$

により，実は $Y=X$, したがって A は正則である．後に明らかになるが，R が体 K のときには実は $AX=I_n$ となる $X \in M_n(K)$ が存在するという条件だけですでに A は正則行列でなければならないのである(§3.1, 例3.7)．したがって例2.49の A が正則であるためには，A_1, A_2 が正則であることが必要十分であることもわかる.

c）転置行列

以下環 R は可換環であるものとする．$A \in M(m, n; R)$ の各第 j 列ベクトルを第 j 行ベクトルとなるように並べかえて得られる行列を A の**転置行列**といい，${}^tA$ で表わすことにする．すなわち

$$
{}^t\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{bmatrix}
$$

であり，${}^tA \in M(n, m\,; R)$．$A, B \in M(m, n\,; R)$，$\lambda \in R$ とすれば容易にわかるように ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$，${}^t(\lambda A)=\lambda{}^tA$ である．また $A \in M(l, m\,; R)$，$B \in M(m, n\,; R)$ のとき

(2.34) $$ {}^t(AB) = {}^tB{}^tA. $$

[証明]　$A=(a_{ij})$，$B=(b_{jk})$ とすれば ${}^tA$ の (j, i) 成分は a_{ij}，${}^tB$ の (k, j) 成分は b_{jk} であるから，R が可換であることに注意して

$$
\begin{aligned}
({}^tB{}^tA \text{ の } (k, i) \text{ 成分}) &= \sum_{j=1}^{m} b_{jk}a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk} \\
&= (AB \text{ の } (i, k) \text{ 成分}) = ({}^t(AB) \text{ の } (k, i) \text{ 成分}).
\end{aligned}
$$
∎

とくに $A, B \in M_n(R)$ が可換であれば(2.34)により ${}^tB, {}^tA$ も可換である．したがってまた負でない整数 k に対して ${}^t(A^k)=({}^tA)^k$ であり，A が正則ならば k が負の整数であってもこれは成立する．とくに ${}^tA^{-1}=({}^tA)^{-1}={}^t(A^{-1})$．

例 2.50　$\boldsymbol{x}={}^t(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$ (R は可換環) のとき

$$
{}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2, \qquad \boldsymbol{x}{}^t\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} {x_1}^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & {x_2}^2 & \cdots & x_2x_n \\ & \cdots\cdots & & \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & {x_n}^2 \end{bmatrix}.
$$

そこで $\mu(\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} \in R$，$X=\boldsymbol{x}{}^t\boldsymbol{x} \in M_n(R)$ とおけば

$$
\begin{aligned}
X\boldsymbol{x} &= (\boldsymbol{x}{}^t\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} = \mu(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} = {}^t({}^t\boldsymbol{x}X), \\
X^2 &= (\boldsymbol{x}{}^t\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}{}^t\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}({}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}){}^t\boldsymbol{x} = \mu(\boldsymbol{x})X.
\end{aligned}
$$

したがってまた $X^k=\mu(\boldsymbol{x})^{k-1}X$，$X^k\boldsymbol{x}=\mu(\boldsymbol{x})^k\boldsymbol{x}$ ($k \geqq 1$，整数)．——

$A \in M_n(R)$ が ${}^tA=A$ をみたすとき，A を**対称行列**という．また ${}^tA=-A$ であるとき A を**交代行列**という．ただし環 R が $1+1=0$ (たとえば $R=\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{Z}/(2)$) をみたす場合には $-1=1$，したがって $-A=A$ となり，交代行列は対称行列である．$1+1\neq 0$ であれば交代行列 $A=(a_{ij})$ の対角成分 a_{ii}，$1 \leqq i \leqq n$ はすべて 0 である．それは ${}^tA$ の対角成分がつねに A の対角成分と一致しているからである．

例 2.51　例 2.50 の X は対称行列である．単位行列 $I_n \in M_n(R)$, $\begin{bmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{bmatrix} \in M_3(\boldsymbol{R})$ 等も対称行列．一方，$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\boldsymbol{R})$, $\begin{bmatrix} O & -I_n \\ I_n & O \end{bmatrix} \in M_{2n}(\boldsymbol{R})$ 等は交代行列である．——

例 2.52　体 K の中では $2=1+1\neq 0$ とする．任意の $A \in M_n(K)$ に対して対称行列 B, 交代行列 C で $A=B+C$ となるものが一意的に定まる．実際 $A=B+C$, ${}^tB=B$, ${}^tC=-C$ とすれば ${}^tA=B-C$ であるから $B=(1/2)(A+{}^tA)$, $C=(1/2)(A-{}^tA)$ でなければならないが，逆に B, C をこのように定義すれば ${}^t({}^tA)=A$ により ${}^tB=B$, ${}^tC=-C$ であり，$B+C=A$ となる．——

例 2.53　体 K の中では $1+1\neq 0$ とする．このとき線型空間 $M_n(K)$ の中で対称行列全体 W_1, 交代行列全体 W_2 はそれぞれ部分空間になっている．例 2.52 により $M_n(K)=W_1+W_2$ であるが，さらに $W_1 \cap W_2=\{O\}$．実際 $A \in W_1 \cap W_2$ とすれば ${}^tA=A=-A$, したがって $2A=O$ であり，$2=1+1\neq 0$ により $A=O$ である．——

例 2.54　$A, B \in M_n(R)$ が可換 $(AB=BA)$ ならば，A, B ともに対称行列(あるいはともに交代行列)のとき AB は対称行列，A が対称行列で B が交代行列のとき AB は交代行列であることが (2.34) を用いて証明できる．しかし $AB\neq BA$ ならばこのようなことはいえない．——

d）トレース

体 K の元を成分にもつ n 次正方行列 $A=(a_{ij}) \in M_n(K)$ の対角成分の和 $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ を行列 A の**トレース**(trace, 跡, 固有和)といい，以下では $\mathrm{tr}\,A$ で表わす：

$$\mathrm{tr}\,A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}.$$

このとき，基本的な性質として

$$(2.35)\qquad \begin{cases} (1)\ \ \mathrm{tr}\,(A+B) = \mathrm{tr}\,A+\mathrm{tr}\,B, \qquad \mathrm{tr}\,(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{tr}\,A, \\ (2)\ \ \mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA) \end{cases}$$

$(A, B \in M_n(K),\ \lambda \in K)$ が成立する．トレースの線型性を示す (1) は明らかである．(2)を証明しよう．$A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ とすれば AB の (i, i) 成分は $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$, BA の (j, j) 成分は $\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$．したがって

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}\right) = \operatorname{tr}(BA).$$

性質(2.35)が行列のトレースをほとんど完全に決定する基本的なものであることを以下の例2.55において示す．さらに次の性質も重要であるが，これは(2.35)の(2)を用いて容易に証明できる：

(2.36)　　$\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr} A$　　$(P \in M_n(K)$，正則).

実際，$\operatorname{tr}(P^{-1}AP)=\operatorname{tr}(AP\cdot P^{-1})=\operatorname{tr} A$ である．

例 2.55　$\sigma: M_n(K)\to K$ を任意の線型写像とする．このとき $A\in M_n(K)$ を適当にとれば

$$\sigma(X) = \operatorname{tr}(AX) \qquad (\forall X\in M_n(K)).$$

実際，行列単位 E_{ji} の σ による像 $a_{ij}=\sigma(E_{ji})$ $(1\leqq i, j\leqq n)$ によって $A=(a_{ij})\in M_n(K)$ を定めれば，$X=(x_{ij})=\sum x_{ij}E_{ij}$ の像は

$$\sigma(X) = \sum x_{ij}\sigma(E_{ij}) = \sum x_{ij}a_{ji} = \operatorname{tr}(AX).$$

このときさらに σ が $\sigma(XY)=\sigma(YX)$ $(\forall X, Y\in M_n(K))$ をみたすものとすれば，実は A はスカラー行列である：

$$\sigma(E_{ij}E_{kl}) = \delta_{jk}\sigma(E_{il}) = \delta_{jk}a_{li}, \qquad \text{同様に}$$
$$\sigma(E_{kl}E_{ij}) = \delta_{li}a_{jk}$$

により $\delta_{jk}a_{li}=\delta_{li}a_{jk}$，したがって $a_{11}=\cdots=a_{nn}=\lambda$，$a_{ij}=0$ $(i\neq j)$ であるから $A=\lambda I_n$ が得られる．したがって $\sigma(X)=\lambda \operatorname{tr} X$ であり，とくに $\sigma(E_{11})=1$ をみたすものがトレースと一致するわけである．——

例 2.56　体 K においては $1+1\neq 0$ とする．このとき対称行列 S，交代行列 A の積のトレースは0である．実際

$$\operatorname{tr}(SA) = \operatorname{tr}({}^t(SA)) = -\operatorname{tr}(AS) = -\operatorname{tr}(SA).$$

したがって $\operatorname{tr}(SA)=0$ である．——

例 2.57　$K=\boldsymbol{R}$ または $\boldsymbol{C}$ として $V=M(m,n;K)$ 上の K に値をとる2変数関数 $\langle X, Y\rangle=\operatorname{tr}({}^tX\bar{Y})$ を考える．ただし $Y=(y_{ij})$ のとき $\bar{Y}=(\bar{y}_{ij})$，$\bar{y}_{ij}$ は y_{ij} の複素共役である．このとき

(1)　$\langle X, Y\rangle = \overline{\langle Y, X\rangle}$,

(2)　$\langle X_1+X_2, Y\rangle = \langle X_1, Y\rangle+\langle X_2, Y\rangle$,　$\langle \lambda X, Y\rangle = \lambda\langle X, Y\rangle$,

(3)　$\langle X, X\rangle \geqq 0$；　等号が成立 $\Leftrightarrow$ $X = O_{m,n}$.

(1)は一般に $A\in M_n(K)$ に対して $\mathrm{tr}\,({}^tA)=\mathrm{tr}\,A$ であることに注意して(2.34)を用いれば証明できる．(2)はトレースの線型性から明らかである．(3)を証明しよう．$X=(x_{ij})$ とおけば

$$\langle X, X\rangle = \mathrm{tr}\,({}^tX\bar{X}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\bar{x}_{ij} = \sum_{i,j}|x_{ij}|^2 \geqq 0$$

であり，等号が成立するのは $x_{ij}=0\ (1\leqq i\leqq m,\ 1\leqq j\leqq n)$ のとき，つまり $X=O$ のときに限る．

さらに(1), (2)を用いて

$$\langle X, Y_1+Y_2\rangle = \langle X, Y_1\rangle+\langle X, Y_2\rangle, \qquad \langle X, \lambda Y\rangle = \bar{\lambda}\langle X, Y\rangle$$

が得られる．——

§2.4 有限次元の線型空間

a) 底と次元

これから先，われわれは線型空間に一つの仮定をつけ加えて考えることになる．それは‘有限次元である’という仮定なのであるが，このためにいままでに述べてきたいくつかの例は考察の対象にはならなくなってしまう．‘無限次元’の線型空間の重要な例は解析学と関係する分野では多くあらわれるのであるが，それらのものすべてを含む一般論をつくることは，それぞれに固有の大切な性質を捨象することであり，意味がないのである．無限次元の線型空間を扱う場合には有限次元の線型空間に関する一般論がまず模型とされ，それとの本質的な相違を認識することから始まる．

はじめに第1章で $V(E^3)$ の場合に用いた線型独立，線型従属等の概念を一般の場合に定義しよう．V を体 K 上の線型空間とする．有限個のベクトル $a_1, a_2, \cdots, a_k\in V$ に対して $\sum\lambda_ia_i=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_ka_k\ (\lambda_i\in K)$ の形のベクトルを $a_1, a_2, \cdots, a_k$ の(K 係数の)**線型結合**という．スカラー $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k\in K$ を適当にとって

(2.37) $$\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_ka_k = o\in V$$

が成立するようにしたとき，(2.37)を $a_1, a_2, \cdots, a_k$ の間の**線型関係**という．$a_1, a_2, \cdots, a_k$ が V のどのようなベクトルであっても，その間には少なくとも一つの線型関係が成立する．それは(2.37)において $\lambda_1=\cdots=\lambda_k=0\in K$ とおいたものである

が，これを**自明な**線型関係という．自明な線型関係が $a_1, a_2, \cdots, a_k$ の間に成立する唯一の線型関係であるときに $a_1, a_2, \cdots, a_k$ は**線型独立**であるといい，そうではないとき，すなわち(2.37)において少なくとも一つのスカラー λ_i が 0 ではないようにできるときに $a_1, a_2, \cdots, a_k$ は**線型従属**であるというのである．

以上の定義によれば，とくに $k=1$ の場合，$a \in V$ の線型結合とは a のスカラー倍 λa $(\lambda \in K)$ のことであり，したがって a が線型独立(線型従属)であるというのは $a \neq o$ $(a=o)$ のことである．また $k \geqq 2$ のとき，$a_1, a_2, \cdots, a_k$ が線型従属であることは，このうちの一つが他の $(k-1)$ 個のベクトルの線型結合として表わされることと同じである．実際，(2.37)においてたとえば $\lambda_i \neq 0$ とすれば

$$a_i = \sum_{j \neq i} \mu_j a_j \qquad (\mu_j = -\lambda_j/\lambda_i) \tag{2.38}$$

と変形でき，逆に a_i が(2.38)のように表わされているならば $\lambda_i=-1$, $\lambda_j=\mu_j$ $(j \neq i)$ とおいて線型関係(2.37)が得られる．

$a_1, a_2, \cdots, a_k \in V$ が線型独立であるとき，$a \in V$ がこれ等の線型結合として表わされるならば，実はその表わし方は一意的にきまってしまう．実際，$a=\sum_{i=1}^{k} \mu_i a_i =\sum_{i=1}^{k} \mu_i' a_i$ とすれば，線型関係 $\sum (\mu_i - \mu_i') a_i = o$ から $\mu_i - \mu_i' = 0$，すなわち $\mu_i = \mu_i'$ $(1 \leqq i \leqq k)$ である．このことが線型独立性の本質的意義なのである．

例 2.58 体 K 上の多項式環 $K[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ を K 上の線型空間とみなすとき，その中で相異なる有限個の単項式は線型独立である．多項式は有限個の単項式の線型結合であり，それが多項式として 0 であるというのはその係数がすべて 0 であることを意味するのであった．——

例 2.59 n 次元列ベクトル空間 K^n の標準底を $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ とする．$\boldsymbol{c} = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{e}_i = {}^t(c_1, c_2, \cdots, c_n) = \boldsymbol{o} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$．したがって $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ は線型独立である．

一般に $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k \in K^n$ が線型独立か線型従属かを調べることは，$\sum_{j=1}^{k} c_j \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{o}$ をみたす $c_j \in K$ $(1 \leqq j \leqq k)$ が一意的$(c_1 = \cdots = c_k = 0)$かどうかを調べることと同じである．$\boldsymbol{a}_j$ $(1 \leqq j \leqq k)$ を第 j 列とする(n, k)型行列を $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k)$ とし，c_j を第 j 成分とする K^k の元を $\boldsymbol{c}$ とすれば，容易にわかるように $A\boldsymbol{c} = \sum c_j \boldsymbol{a}_j$．したがって問題は同次連立1次方程式 $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$ が解として $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o} \in K^k$(自明な解という)だけをもつかどうかというのと同意である．これはまた線型写像 $F_A : K^k \to K^n$

の核について $\mathrm{Ker}\, F_A=\{o\}$ かということ，つまり F_A が単射かということと同じである．――

線型空間 V が**有限次元**(**有限階数**，**有限生成**ともいうことがある)であるとは，有限個のベクトル $a_1, a_2, \cdots, a_n$ を適当に選ぶと任意の $a \in V$ がこれ等の線型結合で表わされることである．このとき V は有限集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ で生成されるともいう．有限次元でないとき V は無限次元であるというのである．以下では主として有限次元の線型空間を考える．したがってとくにことわらない限り線型空間の定義における I, II (p. 70) の他に，つねに次のことを仮定している：

III　V は有限生成である．

そこで V が $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $(n<\infty)$ で生成されるものとして，さらにそれ等が線型独立であるならば，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ は'V の底をなす'という．$a_1, a_2, \cdots, a_n$ が V の底をなすとき，さらにその順序も考えて $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ で表わし，これを V の一つの**底**というのである．したがって $(a_2, a_1, \cdots, a_n)$ のように順序を並べかえたものは，$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ とは別の底と考えるわけである．

零元だけからなる線型空間 $V=\{o\}$ では(当然 III をみたしているが)底を考えることはできない．ベクトル o は線型独立ではないからである．しかし $V \neq \{o\}$ ならば V はかならず底をもち，しかもどのように底をとってもその底をなすベクトルの個数は一定であることが，次の定理 2.4 によってわかる．その個数を V の**次元**といい，$\dim V$，詳しくは $\dim_K V$ で表わす．$V=\{o\} \Leftrightarrow \dim V=0$ である．

定理 2.4　V を体 K 上の線型空間とし，$V \neq \{o\}$ とする．

(1)　V にはかならず底があり，$(a_1, a_2, \cdots, a_n), (a_1', a_2', \cdots, a_m')$ を V の二つの底とすれば $m=n\,(=\dim V)$．

(2)　$b_1, b_2, \cdots, b_m$ が線型独立ならば $m \leqq \dim V=n$．とくに $m=n$ ならば $b_1, b_2, \cdots, b_m$ は V の底をなし，$m<n$ ならば適当に $b_{m+1}, \cdots, b_n \in V$ をつけ加えて $b_1, \cdots, b_n$ が V の底をなすようにできる．

以下この定理をいくつかの段階にわけて証明する．

補題 2.1　$v_1, \cdots, v_r \in V$ は線型独立であり，$v_{r+1} \in V$ は $v_1, \cdots, v_r$ の線型結合としては表わされないものとすれば，$v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}$ はまた線型独立である．

証明　この補題はまた“$v_1, \cdots, v_r \in V$ が線型独立であり，$v_1, \cdots, v_r, v_{r+1} \in V$ は

線型従属であるならば，v_{r+1} は $v_1, \cdots, v_r$ の線型結合として表わされる”(対偶)といいかえることができる．そこで $v_1, \cdots, v_r$ は線型独立として，$\sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i v_i = o$ は自明でない線型関係としよう．このとき $\alpha_{r+1} \neq 0$ であり，したがって $\gamma_j = -\alpha_j/\alpha_{r+1}$ $(1 \leqq j \leqq r)$ とおけば $v_{r+1} = \sum_{j=1}^{r} \gamma_j v_j$ である．実際 $\alpha_{r+1} = 0$ ならば $v_1, \cdots, v_r$ が線型独立であることから $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$ となって，上記の線型関係が自明でないことに反する．▌

補題 2.2 V の有限個の元からなる集合で少なくとも一つ o 以外の元を含むものを S とする．このとき S から線型独立な元 $v_1, \cdots, v_r$ を選んで，任意の $a \in S$ が $v_1, \cdots, v_r$ の線型結合として表わされるようにできる．

証明 S の元を一定の順序に並べて o でない最初の元を v_1，その後の元で v_1 のスカラー倍になっていないものがあればその最初の元を v_2，さらに v_2 より後の元で v_1, v_2 の線型結合として表わされないものがあればその最初の元を $v_3, \cdots$ というようにとる．補題 2.1 により v_1, v_2, v_3 は線型独立であり，また順序が v_3 より前の元はすべて v_1, v_2 の線型結合になっているわけである．以下同様の操作をくりかえせば，S は有限集合だから有限回の手順で，$v_1, \cdots, v_{r-1}$ の線型結合としては表わされない最初の元を v_r としたときに，$v_1, \cdots, v_r$ は線型独立で任意の $a \in S$ は $v_1, \cdots, v_r$ の線型結合で表わされることになる．▌

補題 2.2 の $v_1, \cdots, v_r$ を S の一つの**極大線型独立系**ということにする．

例 2.60 $\boldsymbol{R}^4$ の部分集合

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

の極大線型独立系を求めよう．まず元の順序をこのままで考えて $S = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5\}$ で表わす．S の元で $\boldsymbol{o}$ ではない最初のものは $\boldsymbol{a}_1$ であり，$\boldsymbol{a}_2$ は $\boldsymbol{a}_1$ のスカラー倍ではない．$\boldsymbol{a}_3 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ であるからこれははずす．$\boldsymbol{a}_4$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の線型結合ではない．最後に $\boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{a}_3 + 2\boldsymbol{a}_4 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4$ である．したがって $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ は S の一つの極大線型独立系である．

一方，S の元を $\boldsymbol{a}_5, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1$ の順序に並べて同様の方法を行なえば，$\boldsymbol{a}_5, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_2$ がまた S の極大線型独立系であり，$\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_5 - 2\boldsymbol{a}_4$，$\boldsymbol{a}_1 = (5/2)\boldsymbol{a}_5 - \boldsymbol{a}_4 - (1/2)\boldsymbol{a}_2$

となっていることがわかる. ——

この例からもわかるように, V の有限個の元からなる集合 S に対してその極大線型独立系の選び方はかならずしも一意的ではない. しかし極大線型独立系をなす元の個数は S だけによって一定にきまるものであることが, 次の補題2.3によってわかる.

補題 2.3　V の元 $u_1, \cdots, u_r$ は線型独立, また $v_1, \cdots, v_s$ も線型独立であるものとする. このとき $u_i\ (1 \leqq i \leqq r)$ が $v_1, \cdots, v_s$ の線型結合であり, 逆に $v_j\ (1 \leqq j \leqq s)$ が $u_1, \cdots, u_r$ の線型結合であるとすれば, 実は $r=s$ である.

証明　$v_1, \cdots, v_s$ の中には $u_1, \cdots, u_{r-1}$ だけの線型結合としては表わされないものが少なくとも一つはある. 実際 $v_j (1 \leqq j \leqq s)$ がすべて $u_1, \cdots, u_{r-1}$ の線型結合になっているものとすれば, u_r は $v_1, \cdots, v_s$ の線型結合だからまた $u_1, \cdots, u_{r-1}$ の線型結合でもあることになって, $u_1, \cdots, u_{r-1}, u_r$ が線型独立であることに矛盾する. そこで $v_1, \cdots, v_s$ の中から $u_1, \cdots, u_{r-1}$ の線型結合にはなっていないものを一つ選び, それを v_{j_r} としよう.

補題2.1により u_r を v_{j_r} でおきかえても $u_1, \cdots, u_{r-1}, v_{j_r}$ はまた線型独立である. v_{j_r} のとり方により $v_{j_r} = \sum_{j=1}^{r-1} \alpha_j u_j + \alpha_r u_r\ (\alpha_j \in K)$ とすれば $\alpha_r \neq 0$, したがって $u_r = (1/\alpha_r)\left(-\sum_{j=1}^{r-1} \alpha_j u_j + v_{j_r}\right)$ である. また任意の v_j は $u_1, \cdots, u_r$ の線型結合であることに注意すれば, 結局 $v_j\ (1 \leqq j \leqq s)$ はすべて $u_1, \cdots, u_{r-1}, v_{j_r}$ の線型結合であることがわかる.

以上と同様のことを $u_1, \cdots, u_{r-1}, v_{j_r}$ と $v_1, \cdots, v_s$ とについて行ない u_{r-1} を $v_{j_{r-1}}$ でおきかえて, $u_1, \cdots, u_{r-2}, v_{j_{r-1}}, v_{j_r}$ が線型独立, 各 $v_j\ (1 \leqq j \leqq s)$ が $u_1, \cdots, u_{r-2}, v_{j_{r-1}}, v_{j_r}$ の線型結合であるようにできる. このようなことは $u_i\ (1 \leqq i \leqq r)$ がすべて $v_{j_1}, v_{j_2}, \cdots, v_{j_r}$ によっておきかえられるまで行なうことができる. このとき $v_{j_1}, \cdots, v_{j_r}$ は線型独立であり, 各 $v_j\ (1 \leqq j \leqq s)$ はそれらの線型結合となっているわけであるが, もともと $\{v_{j_1}, \cdots, v_{j_r}\} \subset \{v_1, \cdots, v_s\}$ であり, $v_1, \cdots, v_s$ は線型独立なのであるから $r=s$ でなければならないことがわかる. ▌

この補題はさらに次の形に強化できる.

補題 2.4　$u_1, \cdots, u_p \in V$ は線型独立であり, 各 $u_i\ (1 \leqq i \leqq p)$ は $v_1, \cdots, v_s \in V$ の線型結合で表わされるものとする. このとき $p \leqq s$ であり, 等号が成立するのはさらに $v_1, \cdots, v_s$ も線型独立であって各 $v_j\ (1 \leqq j \leqq s)$ が $u_1, \cdots, u_p$ の線型結合であ

る場合に限る.

証明　V の有限部分集合 $\{u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_s\}$ からこの順序にしたがって補題2.2の証明の仕方で極大線型独立系を選び，それを $u_1, \cdots, u_p, v_{j_1}, \cdots, v_{j_t}$ として $p+t=r$ とおく．次に並べ方をかえて $\{v_1, \cdots, v_s, u_1, \cdots, u_p\}$ から同じ方法で極大線型独立系を選び出せば，仮定によりそれは $v_1, \cdots, v_s$ の中から選ばれ，補題2.3によってやはり r 個のベクトルからなる．したがって $p+t=r\leqq s$, すなわち $p\leqq s$. $p=s$ が成立するのは $t=0$, $r=s$ の場合に限る．$t=0$ であることは $v_1, \cdots, v_s$ が $u_1, \cdots, u_p$ の線型結合であることを意味するわけであり，$r=s$ は $v_1, \cdots, v_s$ が線型独立であることを示す. ▌

定理2.4の証明　仮定 III により V はある有限部分集合 S によって生成される．したがって $V\neq\{o\}$ ならば S は o でない元を含む．S の極大線型独立系 $a_1, \cdots, a_n$ を選べば明らかに $(a_1, \cdots, a_n)$ は V の一つの底である．$(a_1', \cdots, a_m')$ も V の底であれば $m=n$ であることは補題2.3からわかる．また $b_1, \cdots, b_m$ が線型独立であれば $m\leqq n$ であること，とくに $m=n$ ならば $(b_1, \cdots, b_m)$ がまた一つの底であることはいずれも補題2.4による．$m<n$ のときは $\{b_1, \cdots, b_m, a_1, \cdots, a_n\}$ からこの順序にしたがって補題2.2の証明の仕方で極大線型独立系を選べば V の一つの底が得られる. ▌

例2.61　'n 次元' 列ベクトル空間 K^n は確かに K 上 n 次元のベクトル空間である．実際 '標準底' は K^n の一つの底になっている．$\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{C}$ によって自然に $\boldsymbol{R}^n\subset\boldsymbol{C}^n$ と考えられるわけであるが，この意味で $\boldsymbol{R}^n$ の標準底は $\boldsymbol{C}^n$ の標準底であり，$\boldsymbol{R}^n$ の任意の底はまた $\boldsymbol{C}^n$ の底になる．$\boldsymbol{C}^n$ の底として $\boldsymbol{R}^n$ の底になっているものを考えるとき，この底は '$\boldsymbol{R}$ 上定義されている' という．$(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ を $\boldsymbol{C}^n$ の $\boldsymbol{R}$ 上定義された底とすれば，$(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \sqrt{-1}\boldsymbol{a}_1, \cdots, \sqrt{-1}\boldsymbol{a}_n)$ は $\boldsymbol{C}^n$ の $\boldsymbol{R}$ 上の線型空間としての底になっているわけである．すなわち $\dim_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}^n=2n$. これ等のことについては §3.4, c) でもう少し一般的な立場から説明する. ——

例2.62　n 次元列ベクトル空間 K^n の n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が線型独立ならば定理2.4により $(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ は K^n の一つの底である．このとき例2.59で述べたように，$\boldsymbol{a}_j$ を第 j 列ベクトルとする行列 $A=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)\in M_n(K)$ によって定まる K^n の線型変換 $F_A: \boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}$ は単射であるが，さらに F_A が全射であることもわかる．実際 K^n の標準底を $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ とすれば $F_A(\boldsymbol{e}_j)=\boldsymbol{a}_j$ であり，

したがって K^n の任意の元 $\boldsymbol{y}=\sum x_j\boldsymbol{a}_j$ をとり，これに対して $\boldsymbol{x}=\sum x_j\boldsymbol{e}_j$ とおけば $\boldsymbol{y}=F_A(\boldsymbol{x})$ となる．ゆえに F_A は全単射であり，A は正則行列である．

逆に $A=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\in M_n(K)$ が正則ならば列ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n\in K^n$ は線型独立である．例2.59により連立1次方程式 $A\boldsymbol{c}=\boldsymbol{o}$ の解が $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{o}$ だけであることをいえばよいが，A^{-1} をこの方程式の両辺に左側からかければ明らかである．

以上によって次のことがわかった：

$$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\in K^n \text{ が線型独立}$$
$$\Leftrightarrow A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\in M_n(K) \text{ は正則行列.}$$ ——

例 2.63 $M(m,n;K)$ の mn 個の行列単位 E_{ij} $(1\leqq i\leqq m,\ 1\leqq j\leqq n)$ は K 上の線型空間 $M(m,n;K)$ の一つの底をなす．したがって $\dim_K M(m,n;K)=mn$. ——

例 2.64 体 K 上の1変数多項式で n 次以下のもの全体のなす線型空間 V の一つの底として $(1=X^0,X,\cdots,X^n)$ をとることができる．したがって $\dim V=n+1$ である．

とくに $K=\boldsymbol{R}$ として $\alpha\in\boldsymbol{C}$ を零点とする n 次以下の実係数多項式全体を V_α とすれば，これは V の部分空間である．$\alpha\in\boldsymbol{R}$ のとき任意の $f\in V_\alpha$ は $X-\alpha$ を約数としてもち，$(X-\alpha,(X-\alpha)X,\cdots,(X-\alpha)X^{n-1})$ は V_α の一つの底となる．$\alpha\notin\boldsymbol{R}$ のときは $f\in V_\alpha$ は $(X-\alpha)(X-\bar{\alpha})$ を約数としてもち，$((X-\alpha)(X-\bar{\alpha}),\cdots,(X-\alpha)(X-\bar{\alpha})X^{n-2})$ は V_α の一つの底である．したがって $\alpha\in\boldsymbol{R}$ のとき $\dim V_\alpha=n$，$\alpha\notin\boldsymbol{R}$ のとき $\dim V_\alpha=n-1$ である．——

例 2.65 K 係数 p 次同次多項式のつくる線型空間 $V=K^{(p)}[X_1,\cdots,X_n]$ の中で単項式全体 $X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n}$ $(i_1+\cdots+i_n=p)$ は一つの底をなす．したがって

$$\dim V={}_nH_p \quad (n \text{ 個のものから } p \text{ 個を選び出す重複組合わせの個数})$$
$$=\binom{n+p-1}{p}.$$ ——

例 2.66 例2.30で述べた同次線型系

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}=A(t)\boldsymbol{y} \tag{2.19}$$

の解空間 V が仮定 III をみたすことについて述べる．線型系に関する基本定理により与えられた初期条件をみたす(2.19)の解は一意的に定まる．そこで $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,$

$\boldsymbol{b}_n \in \boldsymbol{R}^n$ を線型独立(したがって $\boldsymbol{R}^n$ の一つの底をなす)であるとして，$A(t)$ の定義域 J の1点 α において $\boldsymbol{b}_j$ を値にとる(2.19)の解(初期条件 $\boldsymbol{y}(\alpha)=\boldsymbol{b}_j$ で定まる解)を $\boldsymbol{y}_j$ $(1 \leqq j \leqq n)$ としよう．このとき $(\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n)$ が解空間 V の一つの底であることを示すのである．

まず $\sum c_j \boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{o}$ とおけば，$t=\alpha$ のとき $\sum c_j \boldsymbol{y}_j(\alpha) = \sum c_j \boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{o}$ であり，$\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ は線型独立であることから $c_1 = \cdots = c_n = 0$ となって $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ は線型独立であることがわかる．一方，任意の $\boldsymbol{y} \in V$ に対して $\boldsymbol{y}(\alpha) \in \boldsymbol{R}^n$ を $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ の線型結合として $\boldsymbol{y}(\alpha) = \sum c_j \boldsymbol{b}_j$ と表わしたものとする．同じ係数により $\boldsymbol{z} = \sum c_j \boldsymbol{y}_j$ とおけば $\boldsymbol{y}_j$ のとり方により $\boldsymbol{z}(\alpha) = \boldsymbol{y}(\alpha)$ である．したがって解の一意性によって $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}$，すなわち $\boldsymbol{y} = \sum c_j \boldsymbol{y}_j$ である．ゆえに $(\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n)$ は V の底であり，とくに $\dim_{\boldsymbol{R}} V = n$ である．

同次 n 階常微分方程式(2.20)の解空間の次元が n に等しいことも以上のことに帰着させて証明できる(第1章，(1.30)″参照)．その場合たとえば $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ として $\boldsymbol{R}^n$ の標準底をとることにより，初期条件 $y(\alpha) = \cdots = y^{(i-1)}(\alpha) = y^{(i+1)}(\alpha) = \cdots = y^{(n-1)}(\alpha) = 0$，$y^{(i)}(\alpha) = 1$ をみたす解 y_{i+1} $(0 \leqq i \leqq n-1)$ からなる底 $(y_1, \cdots, y_n)$ が得られるわけである．

解空間の底のことを，微分方程式論では微分方程式の1組の**解の基本系**という．——

b）線型同型と底の変換

V, V' をともに体 K 上の線型空間とする．ある線型写像 $F: V \to V'$ が全単射であるとき V, V' は(**線型**)**同型**であるといい，$V \cong V'$ で表わす．またこの線型写像 F を(線型)**同型写像**という．このとき $F^{-1}: V' \to V$ がまた同型写像になっている．$F: V \to V'$，$G: V' \to V''$ がともに同型写像ならば $G \circ F: V \to V''$ が同型写像であることも明らかである．したがって同型関係 $\cong$ は体 K 上の線型空間の間に同値関係を定めるのである．

同型写像 $F: V \to V'$ が与えられていれば，V の中で加法，スカラー乗法にもとづく諸種の議論を行なうことと，それ等を F を通して V' の中で行なうこととは同値である．いいかえれば線型空間としてだけの性質を考える限り，$x \in V$ と $F(x) \in V'$ とは同じものを別の記号で表わしただけの違いしかないと考えて同一視 $(x = F(x))$ してもよいのである．そのような意味で，これまでにも $V(E^3)$

と $\boldsymbol{R}^3$, $\boldsymbol{R}$ 上の線型空間としての $\boldsymbol{C}^n$ と $\boldsymbol{R}^{2n}$ 等をそれぞれ同一視したことがあった．ただし $V\cong V'$ だからといって同型写像 $F: V\to V'$，つまり同一視の仕方が一意的にきまるというわけではない．このことに注意した上で線型空間および線型写像を計算に都合のよい形で表現することは，必要ならばいつでも行なってよいのである．その方法の基礎になることを以下次の項 c) にわたって述べる．

定理 2.5　V, V' をともに体 K 上の線型空間とする．

(1)　ある線型写像 $F: V\to V'$ が全射ならば $\dim V'\leqq\dim V$ である．等号が成立するのは F がさらに単射である場合，したがって $V\cong V'$ である場合に限る．

(2)　$V\cong V'$ のとき，線型写像 $F: V\to V'$ が単射であることと全射であることとは同値である．

まず補題を二つ証明する．

補題 2.5　(1)　線型写像 $F: V\to V'$ が単射のとき，$v_1, \cdots, v_k\in V$ が型線独立であれば $F(v_1), \cdots, F(v_k)\in V'$ も線型独立である．

(2)　$(a_1, \cdots, a_n)$ を V の一つの底とすれば，線型写像 $F: V\to V'$ が値 $F(a_1), \cdots, F(a_n)\in V'$ を指定するだけで一意的に定まってしまう．

証明　(1)　$\sum_{i=1}^{k} c_iF(v_i)=o'$ (V' の零元) とおけば左辺は $F(\sum c_iv_i)$ に等しく，F が単射であることによって $\sum c_iv_i=o$ でなければならない．$v_1, \cdots, v_k$ は線型独立であるから $c_1=\cdots=c_k=0$.

(2)　任意の $x\in V$ は $x=\sum_{i=1}^{n} x_ia_i$ とかける．したがって値 $F(a_1), \cdots, F(a_n)$ が与えられれば x の値も $F(x)=\sum x_iF(a_i)$ によって定まってしまう．▌

補題 2.6　$V\cong V' \Longleftrightarrow \dim V=\dim V'$.

証明　まず $V\cong V'$ とする．したがって同型写像 $F: V\to V'$ がある．$n=\dim V$ として $(a_1, \cdots, a_n)$ を V の一つの底とすれば $(F(a_1), \cdots, F(a_n))$ が V' の底であることをいえばよい．$F(a_1), \cdots, F(a_n)$ は補題 2.5 により線型独立である．一方，任意の $y\in V'$ に対して $y=F(x)$ となる $x\in V$ をとり，$x=\sum x_ia_i$ とすれば $y=\sum x_iF(a_i)$ ($F(a_1), \cdots, F(a_n)$ の線型結合)．したがって $\dim V'=n=\dim V$ である．

逆に $\dim V=\dim V'=n$ のとき，$(a_1, \cdots, a_n)$ を V の底，$(a_1', \cdots, a_n')$ を V' の底として $F(a_i)=a_i'$ $(1\leqq i\leqq n)$ により線型写像 $F: V\to V'$ を定める(補題 2.5)．この F が全単射であることは容易にわかる．したがって $V\cong V'$. ▌

定理 2.5 の証明 (1) $n=\dim V$ として V の一つの底 $(a_1, \cdots, a_n)$ を考える. $F: V\to V'$ が全射ならば V' の任意の元は $F(a_1), \cdots, F(a_n)$ の線型結合で表わされるから $\dim V'\leqq n$. ここで等号が成立するのは $F(a_1), \cdots, F(a_n)$ が線型独立である場合に限るが, そのとき F が単射であることは容易にわかる. (Ker $F=\{o\}$ をいえばよい.)

(2) 補題 2.6 により $V\cong V'$ ならば $\dim V=\dim V'$ であるから $F: V\to V'$ が全射ならばまた単射であることは(1)で述べたとおりである. 逆に F が単射ならばまた全射であることは, 補題 2.5 および $\dim V=\dim V'$ であることから明らかである. ▌

以上のことから, とくに体 K 上の n 次元線型空間 V は列ベクトル空間 K^n と同型であることがわかる. 同型写像のつくり方も補題 2.5 によって保証されている. V の一つの底 $\mathfrak{A}=(a_1, \cdots, a_n)$ をとり, $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ を K^n の標準底として $\Phi(a_j)=\boldsymbol{e}_j$ $(1\leqq j\leqq n)$ によって線型写像 $\Phi: V\to K^n$ を定めればこれが同型写像を与えるわけである. この Φ を底 $\mathfrak{A}$ によって定まる同型写像ということにする.

逆に同型写像 $\Phi: V\to K^n$ が与えられたものとする. このとき $\Phi^{-1}: K^n\to V$ はまた同型写像であるから $a_j=\Phi^{-1}(\boldsymbol{e}_j)$ $(1\leqq j\leqq n)$ とおけば $(a_1, \cdots, a_n)$ は V の一つの底になる. つまり V に一つの底を考えることと, V から K^n への同型写像を一つ考えることとは同じことである.

V に二つの底 $\mathfrak{A}=(a_1, \cdots, a_n)$, $\mathfrak{B}=(b_1, \cdots, b_n)$ をとって, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ によって定まる同型写像 $V\to K^n$ をそれぞれ Φ, Ψ としよう. すなわち

$$\Phi: V\ni x=\sum \xi_i a_i \longmapsto \boldsymbol{x}=\sum \xi_i \boldsymbol{e}_i={}^t(\xi_1, \cdots, \xi_n)\in K^n,$$
$$\Psi: V\ni x=\sum \eta_j b_j \longmapsto \boldsymbol{y}=\sum \eta_j \boldsymbol{e}_j={}^t(\eta_1, \cdots, \eta_n)\in K^n.$$

このとき $\boldsymbol{x}=\Phi(x)$, $\boldsymbol{y}=\Psi(x)$ は同じベクトル $x\in V$ の異なる底による表現であるから, その間の関係を具体的な式によって表わしておくほうがよい. そこで

$$b_j=\sum_{i=1}^n \pi_{ij}a_i \quad (\pi_{ij}\in K), \qquad P=(\pi_{ij})\in M_n(K) \tag{2.39}$$

によって行列 P を定め, これを**底の変換** $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ の行列といって

$$P: \mathfrak{A}\longrightarrow\mathfrak{B} \quad \text{あるいは} \quad (b_1, \cdots, b_n)=(a_1, \cdots, a_n)P$$

で表わす. 底の変換 $P: \mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ と双対的に**成分の変換則**

(2.40)
$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y} \quad \text{すなわち} \quad \xi_i = \sum_{j=1}^{n} \pi_{ij}\eta_j$$

が成立するのである.

[(2.40) の証明]　$x = \sum_i \xi_i a_i = \sum_j \eta_j b_j$ の最右辺に(2.39)を代入すれば

$$\sum_i \xi_i a_i = \sum_j \eta_j \Big(\sum_i \pi_{ij} a_i\Big) = \sum_i \Big(\sum_j \pi_{ij}\eta_j\Big) a_i.$$

$a_1, \cdots, a_n$ は線型独立であるから $\xi_i = \sum_j \pi_{ij}\eta_j$ である. ▌

以上の議論は記号的には次のように簡明に表わすことができる:

$$x = (a_1, \cdots, a_n)\begin{bmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix} = (b_1, \cdots, b_n)\begin{bmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{bmatrix} = (a_1, \cdots, a_n)(\pi_{ij})\begin{bmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{bmatrix}.$$

定理 2.6　V を体 K 上の n 次元線型空間とし, $\mathfrak{A} = (a_1, \cdots, a_n)$ を V の一つの底とする.

(1)　$\mathfrak{B}$ を V のもう一つの底とすれば, 底の変換 $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ の行列 $P \in M_n(K)$ は正則である.

(2)　逆に $P = (\pi_{ij}) \in M_n(K)$ を任意の正則行列とすれば, $b_j = \sum_i \pi_{ij} a_i$ $(1 \leqq j \leqq n)$ とおいて V のもう一つの底 $\mathfrak{B} = (b_1, \cdots, b_n)$ が得られる.

証明　(1)　$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ によって定まる同型写像 $V \to K^n$ をそれぞれ Φ, Ψ とすれば $\Phi \circ \Psi^{-1} : K^n \to K^n$ は正則線型変換である. 一方(2.40)により $\Phi \circ \Psi^{-1} = F_P : K^n \ni \boldsymbol{y} \mapsto P\boldsymbol{y} \in K^n$ であるから P は正則行列である.

(2)　$\dim V = n$ であるから $b_1, \cdots, b_n$ が線型独立であることをいえばよい(定理2.4). $\sum_j \alpha_j b_j = o$ とおく. 左辺に $b_j = \sum_i \pi_{ij} a_i$ を代入すれば $\sum_i \Big(\sum_j \pi_{ij}\alpha_j\Big) a_i = o$. $a_1, \cdots, a_n$ は線型独立であるから $\sum_j \pi_{ij}\alpha_j = 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$, すなわち $P^t(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \boldsymbol{o} \in K^n$ である. 両辺に P^{-1} をかけて $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ が得られる. したがって $b_1, \cdots, b_n$ は線型独立である. ▌

定理 2.6 は n 次正則行列の一つの特徴づけを与えている. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ を V の底として $P : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $Q : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ とすれば

(2.41)
$$PQ : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{C}, \qquad P^{-1} : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A}$$

であること等も, 成分の変換則(2.40)を通して, $GL(n, K)$ が行列の乗法により群であるという事実に包含される性質としてとらえることができる.

問 (2.41)を直接証明せよ．——

例 2.67 体 K 上の線型空間 $V=\{f\in K[X]\mid \deg f\leqq 3\}$ の中で $\mathfrak{A}=(1, X, X^2, X^3)$ は V の一つの底である．一方 V の元 $1, X, X^2-X, X^3-3X^2+2X$ はまた一つの底をなす．実際

$$(1, X, X^2-X, X^3-3X^2+2X) = (1, X, X^2, X^3)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

であり，この行列 P は列ベクトルが線型独立であるから正則である(例 2.62 参照)．P の逆行列を求めることは，たとえば例 2.49 の結果(2.32)をくりかえし用いて簡単にできる：

$$P^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

これが底の変換 $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))\to(1, X, X^2, X^3)$ の行列を与えるわけである．簡単のため

$$X^{\{0\}} = 1, \qquad X^{\{k\}} = X(X-1)\cdots(X-k+1) \quad (k\geqq 1)$$

とおくことにしよう．多項式 $f(X)=a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3$ は

$$P^{-1}\cdot{}^t(a_0, a_1, a_2, a_3) = {}^t(a_0, a_1+a_2+a_3, a_2+3a_3, a_3)$$

であるから(2.40)により

$$f(X) = a_0+(a_1+a_2+a_3)X+(a_2+3a_3)X^{\{2\}}+a_3X^{\{3\}}$$

と表わすこともできる．——

例 2.68 $\boldsymbol{C}^n$ を $\boldsymbol{R}$ 上の線型空間とみなし，底 $\mathfrak{A}=(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n, \sqrt{-1}\boldsymbol{e}_1, \cdots, \sqrt{-1}\boldsymbol{e}_n)$ をとれば，一つの線型同型写像 $\Phi: \boldsymbol{C}^n\to\boldsymbol{R}^{2n}$ が得られ，$\boldsymbol{C}^n\cong\boldsymbol{R}^{2n}$ である．一方

$$P = \begin{bmatrix}I_n & I_n\\ I_n & -I_n\end{bmatrix} \in M_{2n}(\boldsymbol{R})$$

は列ベクトルが線型独立であるから正則行列であり，$P: \mathfrak{A}\to\mathfrak{B}=(\boldsymbol{e}_1+\sqrt{-1}\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n+\sqrt{-1}\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_1-\sqrt{-1}\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n-\sqrt{-1}\boldsymbol{e}_n)$ によって別の底 $\mathfrak{B}$ が得られる．このとき $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ に関する $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^n$ の列ベクトル表示をそれぞれ $\boldsymbol{x}={}^t(\xi_1, \cdots, \xi_{2n})$，$\boldsymbol{y}={}^t(\eta_1, \cdots, \eta_{2n})$ とすれば(2.40)により

$$\xi_i=\eta_i+\eta_{n+i},\qquad \xi_{n+i}=\eta_i-\eta_{n+i}\qquad (1\leqq i\leqq n)$$

である. ——

c) 線型写像の行列表示

V, V' を体 K 上の線型空間とし $F\colon V\to V'$ を線型写像とする. $\mathfrak{A}=(a_1,\cdots,a_n)$ $(n=\dim V)$ を V の底, $\mathfrak{A}'=(a_1',\cdots,a_m')$ $(m=\dim V')$ を V' の底とすれば, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ によってそれぞれ同型写像 $\Phi\colon V\to K^n$, $\Phi'\colon V\to K^m$ が定められる. このとき Φ,Φ' によって V, V' をそれぞれ K^n, K^m と同一視するならば, 線型写像 F は $\tilde{F}\colon K^n\to K^m$ で表わされるはずである. 実際それは次のように与えられる:

$$(2.42)\qquad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & V' \\ {\scriptstyle\Phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Phi'} \\ K^n & \xRightarrow{\tilde{F}} & K^m \end{array}\qquad \tilde{F}=\Phi'\circ F\circ\Phi^{-1}.$$

一方, 定理1.1により $\tilde{F}\colon K^n\to K^m$ は行列 $A\in M(m,n;K)$ によって一意的に $\tilde{F}=F_A\colon \boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}$ と表わされる. いまの場合 $y=F(x)$, $\boldsymbol{x}=\Phi(x)$, $\boldsymbol{y}=\Phi'(y)$ とすれば, $\boldsymbol{y}=F_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ である. この A を'線型写像 F の底 $\mathfrak{A},\mathfrak{A}'$ に関する行列'といい, F を(2.42)によって $\tilde{F}=F_A$ とみなすことを F の**行列表示**という.

とくに線型変換 $F\colon V\to V$ の場合には一つの底 $\mathfrak{A}$ だけ $(\mathfrak{A}'=\mathfrak{A})$ を考えて, 同様に定めた $A\in M_n(K)$ を F の $\mathfrak{A}$ に関する行列というのが普通である. このときもし F が正則であれば $\tilde{F}=F_A$ も正則であり, したがって A は正則行列である.

定理 2.7　V, V' を体 K 上の線型空間, $F\colon V\to V'$ を線型写像, $\mathfrak{A}=(a_1,\cdots,a_n)$, $\mathfrak{A}'=(a_1',\cdots,a_m')$ をそれぞれ V, V' の底とする. このとき

$$(2.43)\qquad F(a_j)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}a_i'\qquad (1\leqq j\leqq n)$$

とすれば, $A=(\alpha_{ij})\in M(m,n;K)$ が F の $\mathfrak{A},\mathfrak{A}'$ に関する行列を与える. 逆に底 $\mathfrak{A},\mathfrak{A}'$, $A=(\alpha_{ij})\in M(m,n;K)$ が与えられたとき, (2.43)によって $F\colon V\to V'$ が一意的に定まる.

証明　K^n, K^m の標準底をそれぞれ $(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$, $(\boldsymbol{e}_1',\cdots,\boldsymbol{e}_m')$ とすれば(2.42)の Φ,Φ' はそれぞれ $\Phi(a_j)=\boldsymbol{e}_j$, $\Phi(a_i')=\boldsymbol{e}_i'$ によって定められる(補題2.5). したがって $\boldsymbol{x}=\sum_j\xi_j\boldsymbol{e}_j\in K^n$ に対して $x=\Phi^{-1}(\boldsymbol{x})=\sum_j\xi_ja_j\in V$ であり,

$$\tilde{F}(\boldsymbol{x})=\Phi'\circ F\circ\Phi^{-1}(\boldsymbol{x})=\Phi'\circ F(x)=\Phi'\Bigl(\sum_j\xi_jF(a_j)\Bigr)$$

$$= \Phi'\Big(\sum_i \sum_j \alpha_{ij}\xi_j a_i'\Big) = \sum_i \Big(\sum_j \alpha_{ij}\xi_j\Big)\boldsymbol{e}_i'.$$

ゆえに $y=F(x)=\sum_i \eta_i a_i'$ とすれば，$\boldsymbol{y}=\Phi'(y)=\tilde{F}(\boldsymbol{x})$ は

$$\begin{bmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix} \tag{2.44}$$

で与えられ，$\tilde{F}=F_A$ である．

逆は補題2.5から明らかである．▌

記号的には(2.43)を

$$F((a_1, \cdots, a_n)) = (a_1', \cdots, a_m')A$$

と表わせばわかりやすい．

定理2.7により，V, V' の底 $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ をそれぞれ一つずつ定めれば，全単射 $M(m, n; K) \ni A \mapsto F \in L(V, V')$ が一つ定まる．この対応がまた線型写像であることも容易にわかる．実際 $F, G \in L(V, V')$，$\lambda \in K$ とすれば(2.42)により $\widetilde{F+G} = \tilde{F}+\tilde{G}$，$\widetilde{\lambda F}=\lambda\tilde{F}$．したがって $M(m, n; K) \cong L(V, V')$ であり，とくに

$$\dim V = n, \quad \dim V' = m \Longrightarrow \dim L(V, V') = mn \tag{2.45}$$

がわかる．

例 2.69 実係数の2変数同次多項式のつくる線型空間 $V=\boldsymbol{R}^{(5)}[X, Y]$，$V'=\boldsymbol{R}^{(3)}[X, Y]$ を考える．V, V' の底としてそれぞれ単項式からなるものをとれば線型写像 $\triangle=\partial^2/\partial X^2+\partial^2/\partial Y^2$ の行列は次のように与えられる：

$$\triangle\cdot(X^5, X^4Y, X^3Y^2, X^2Y^3, XY^4, Y^5)$$
$$=(X^3, X^2Y, XY^2, Y^3)\begin{bmatrix}20 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 12 & 0 & 6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0 & 12 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 20\end{bmatrix}. \qquad \text{——}$$

例 2.70 $\boldsymbol{C}^n$ において $j: \boldsymbol{C}^n \ni x \mapsto \sqrt{-1}x \in \boldsymbol{C}^n$ は明らかに線型変換であり $j^2=j\circ j=-1_{\boldsymbol{C}^n}$ をみたしている．これはまた $\boldsymbol{C}^n$ を $\boldsymbol{R}$ 上の線型空間と考えれば，$\boldsymbol{R}$ 上での線型変換になっている．標準底 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ から得られる $\boldsymbol{R}$ 上の線型空間としての $\boldsymbol{C}^n$ の底 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n, \sqrt{-1}\boldsymbol{e}_1, \cdots, \sqrt{-1}\boldsymbol{e}_n)$ に関する j の行列は

$$j\cdot(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n, \sqrt{-1}\boldsymbol{e}_1, \cdots, \sqrt{-1}\boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n, \sqrt{-1}\boldsymbol{e}_1, \cdots, \sqrt{-1}\boldsymbol{e}_n)J,$$

$$J=\begin{bmatrix} O_n & -I_n \\ I_n & O_n \end{bmatrix} \in M_{2n}(\boldsymbol{R}).$$ ——

例 2.71　定数係数の同次微分方程式

$$y^{(n)}+\alpha_1 y^{(n-1)}+\cdots+\alpha_n y = 0 \qquad (\alpha_i \in \boldsymbol{R},\ 1 \leqq i \leqq n)$$

の解空間 V の底として

$$(y_1, \cdots, y_n), \qquad y_j{}^{(i-1)}(0)=\delta_{ij} \qquad (1 \leqq i, j \leqq n)$$

をとる(例 2.66 参照). この底に関する線型変換 $D: V \ni y \mapsto y' \in V$ の行列を求めよう. 定理 2.7 により $Dy_j=\sum_i c_{ij} y_i$ $(1 \leqq j \leqq n)$ とおいて係数 c_{ij} を決定すればよい. 底のとり方から $c_{ij}=(Dy_j)^{(i-1)}(0)=y_j{}^{(i)}(0)$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$ である. これから容易に $Dy_1=-\alpha_n y_n$, $Dy_j=y_{j-1}-\alpha_{n-j+1} y_n$ $(2 \leqq j \leqq n)$ が得られる. すなわち

$$D\cdot(y_1, \cdots, y_n)=(y_1, \cdots, y_n)\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots\cdots & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix}$$

が得られる. ——

定理 2.7 では底 $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ をそれぞれ V, V' に一つずつ固定したときに線型写像 $F: V \to V'$ が一意的に行列 A で表わされることを示している. つまり A は底 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ に依存しているのである. 底をとりかえたときに行列 A がどのようにかわるかを示しておかなければならない.

定理 2.7(続き)　線型空間 V, V' の底を2組ずつとりそれぞれ $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ および $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ とする. また底の変換の行列をそれぞれ $P: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ および $Q: \mathfrak{A}' \to \mathfrak{B}'$ とする. このとき線型写像 $F: V \to V'$ の $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ に関する行列を A, $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ に関する行列を B とすれば $B=Q^{-1}AP$.

証明　$\dim V=n$, $\dim V'=m$ とし, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ によって定まる V から K^n への同型写像をそれぞれ Φ, Ψ, 同様に $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}'$ によって定まる V' から K^m への同型写像を Φ', Ψ' とすれば(2.40)により $F_P=\Phi\circ\Psi^{-1}: K^n \to K^n$, $F_Q=\Phi'\circ\Psi'^{-1}: K^m \to K^m$ のように線型変換が定められる. 一方(2.42)により

$$F_A=\Phi'\circ F\circ\Phi^{-1}, \qquad F_B=\Psi'\circ F\circ\Psi^{-1}.$$

したがって(2.23)により

$$F_B=\Psi'\circ(\Phi'^{-1}\circ F_A\circ\Phi)\circ\Psi^{-1}=(\Psi'\circ\Phi'^{-1})\circ F_A\circ(\Phi\circ\Psi^{-1})$$

$$= F_{Q^{-1}} \circ F_A \circ F_P = F_{Q^{-1}AP}.$$

ゆえに $B = Q^{-1}AP$ である. ▌

とくに線型変換 $T: V \to V$ の底 $\mathfrak{A}$ に関する行列を A, $\mathfrak{B}$ に関する行列を B, また底の変換の行列を $P: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ とすれば

(2.46)
$$B = P^{-1}AP.$$

体 K 上の n 次正方行列 $A \in M_n(K)$ に対しても線型変換の場合と同様に**最小多項式**を定義することができる. 任意の $f(X) = \sum_{i=0}^{l} a_i X^{l-i} \in K[X]$ に対して $f(A) = \sum_{i=0}^{l} a_i A^{l-i}$ とおけば $f(A) \in M_n(K)$ である. とくに $f(A) = O_n$ となる $f \in K[X]$, $f \neq 0$ のうちで次数が最小であり, 最高次の係数が 1 であるものを A の最小多項式というのである. これは A によって定まる線型変換 $F_A: K^n \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in K^n$ の最小多項式と言っても同じことである. 実際, 任意の $f \in K[X]$ に対して $f(F_A) = F_{f(A)}$ であるから, とくに

$$f(F_A) = O_{K^n}\,(K^n\text{ の零変換}) \Longleftrightarrow f(A) = O_n.$$

A の最小多項式を φ_A で表わすことにする. 一般に $f \in K[X]$, $P \in M_n(K)$ (P は正則行列) とすれば

$$f(P^{-1}AP) = \sum_{i=0}^{l} a_i P^{-1} A^{l-i} P = P^{-1} f(A) P$$

であるから, とくに

(2.47)
$$\varphi_{P^{-1}AP} = \varphi_A$$

が得られる.

一般に体 K 上の線型空間 V の次元が n であれば (2.45) により $\dim L(V, V) = n^2$ であるから $T \in L(V, V)$ に対して $I = T^0$, $T = T^1, \cdots, T^{n^2}$ は線型従属である. したがって自明でない線型関係 $\sum_{i=0}^{n^2} a_i T^{n^2-i} = O_V$ がかならず存在する. そこで $f(X) = \sum_{i=0}^{n^2} a_i X^{n^2-i}$ とおくことにより $f(T) = O_V$ となる $f \in K[X]$, $f \neq 0$ が得られる. このことから有限次元の線型空間 V の場合には, 任意の線型変換 $T: V \to V$ はかならず最小多項式 φ_T をもつことがわかる. 実は $\deg \varphi_T \leqq n = \dim V$ であるが, このことについては §3.3, a) で述べることにする.

V の底 $\mathfrak{A}$ を一つ定めれば線型空間として $L(V, V) \cong M_n(K)$ であり, $T \in L(V, V)$ の底 $\mathfrak{A}$ に関する行列を考えることにより同型対応が与えられることはすでに述べたが, この対応がさらに両者の乗法を保っていることも (2.23) によっ

て明らかである．したがってとくに $L(V, V)\ni T\leftrightarrow A\in M_n(K)$ ならば $T^k\leftrightarrow A^k$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$ であり，ゆえにまた

$$\varphi_T=\varphi_A \tag{2.48}$$

である．他の底 $\mathfrak{B}$ をとり，$\mathfrak{B}$ に関する T の行列 B をとっても $\varphi_T=\varphi_B$ であるから，$\varphi_A=\varphi_B$ でなければならないが，これはまた(2.46)，(2.47)によっても保証されているわけである．

$A, B\in M_n(K)$ に対して正則行列 $P\in M_n(K)$ を適当にとれば $B=P^{-1}AP$ となるとき，A は B に**相似**であるという．A が B に相似であるとき $A\sim B$ で表わせば，$\sim$ は K 上の n 次正方行列全体の集合 $M_n(K)$ に一つの同値関係を定める．実際 $I_n\in GL(n, K)$ により $A\sim A$ であり，$P\in GL(n, K)$ ならば $P^{-1}\in GL(n, K)$ であるから $A\sim B$ のとき $B\sim A$，また $P, Q\in GL(n, K)$ ならば $PQ\in GL(n, K)$ であることにより $A\sim B$, $B\sim C$ のとき $A\sim C$ である．相似関係に関する $M_n(K)$ の類の代表元をすべて決定することは，n 次元線型空間における線型変換の一種の分類を与えることと考えることができる．代表元をできるだけ単純で計算にも都合のよい形に表わしたものを‘標準形’という．標準形についての一般論および具体的な求め方についてはここでは述べないが，典型的な例を示しておく．

例 2.72　線型変換 $T: V\to V$ がある正の整数 ν に対して

$$T^\nu = T\circ T\circ\cdots\circ T\,(\nu\text{ 回}) = O_V$$

をみたすとき，T を**ベキ零変換**という．このとき V の任意の底 $\mathfrak{A}$ に関する T の行列 $N\in M_n(K)$ $(n=\dim V)$ もやはり $N^\nu=O_n$ をみたす．このような行列を**ベキ零行列**という．

$T: V\to V$ がベキ零変換で $\dim V=n$ ならば，実は $0<\nu\leqq n$ のような整数に対して $T^\nu=O_V$, $T^{\nu-1}\neq O_V$ (すなわち $\varphi_T(X)=X^\nu$) である．実際 T がベキ零変換であるから，ともかく $T^\nu=O_V$, $T^{\nu-1}\neq O_V$ となる正の整数 ν があり，したがってある $a\in V$ に対して $T^{\nu-1}a\neq o$ であるが，このとき $T^{\nu-1}a, T^{\nu-2}a, \cdots, Ta, a$ (ν 個のベクトル)が線型独立となるのである．もしこの ν 個のベクトルが線型従属であれば自明でない線型関係

$$\lambda_0 a+\lambda_1 Ta+\cdots+\lambda_{\nu-1}T^{\nu-1}a = o$$

が成立する．$\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{\nu-1}$ のうち0でない最初のものを λ_μ とするとき，上の式の両辺に $T^{\nu-\mu-1}$ をかけて

$$\lambda_\mu T^{\nu-1}a+\lambda_{\mu+1}T^\nu a+\cdots+\lambda_{\nu-1}T^{2\nu-\mu-2}a = \lambda_\mu T^{\nu-1}a = o,$$

したがって $T^{\nu-1}a=o$ となり，これは矛盾である．ゆえに $T^{\nu-1}a, T^{\nu-2}a, \cdots, Ta, a$ は線型独立であり，したがって $\nu\leqq n$ でなければならない．

とくに $\nu=n$ のとき，すなわち $\varphi_T(X)=X^n$ のとき，$\mathfrak{B}=(T^{n-1}a, T^{n-2}a, \cdots, a)$ は V の底をなすわけであるが，この底に関する T の行列は

$$T\cdot(T^{n-1}a, T^{n-2}a, \cdots, a) = (T^{n-1}a, T^{n-2}a, \cdots, a)\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

で与えられる．したがってまた $N\in M_n(K)$ の最小多項式が $\varphi_N(X)=X^n$ である場合には，適当な正則行列 P をとって $P^{-1}NP$ が上の形の行列になるわけである．

一般に $T\in L(V, V)$ の最小多項式が $\varphi_T(X)=(X-\alpha)^n$ $(\alpha\in K)$ であれば $T_0=T-\alpha I_V$ はベキ零変換であり，$\varphi_{T_0}(X)=X^n$ であるから，上の議論により適当な底 $\mathfrak{B}$ をとれば，T_0 の $\mathfrak{B}$ に関する行列が上の形に与えられる．したがって $T=T_0+\alpha I_V$ の底 $\mathfrak{B}$ に関する行列は

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \\ & & & \alpha \end{bmatrix} = J(\alpha, n)$$

となる．行列 $A\in M_n(K)$ の最小多項式が $\varphi_A(X)=(X-\alpha)^n$ である場合にも，適当な正則行列 $P\in M_n(K)$ をとって

$$P^{-1}AP = J(\alpha, n)$$

となることがわかる．——

例 2.73 定数係数の同次3階線型常微分方程式

$$(*)\qquad y'''-5y''+3y'+9y = 0$$

の解空間を V とする．V の底 (y_1, y_2, y_3) として $y_j^{(i-1)}(0)=\delta_{ij}$ $(1\leqq i, j\leqq 3)$ をみたすものをとれば，線型変換 $D: V\ni y\mapsto y'\in V$ のこの底に関する行列は例2.71により

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -9 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

で与えられる．一方(＊)を演算子法によって次のように解く．(2.12)により(＊)は体 $\mathscr{M}$ 上の1次方程式

$$(s^3-5s^2+3s+9)y = \beta_0 s^2+\beta_1 s+\beta_2$$

で表わされる．$s^3-5s^2+3s+9=(s-3)^2(s+1)$ であるから

$$\begin{aligned} y &= \frac{\beta_0 s^2+\beta_1 s+\beta_2}{(s-3)^2(s+1)} = \frac{C_1}{s-3}+\frac{C_2}{(s-3)^2}+\frac{C_3}{s+1} \\ &= C_1\{e^{3x}\}+C_2\{xe^{3x}\}+C_3\{e^{-x}\}. \end{aligned}$$

通常の関数の記号により $z_1=e^{3x}$，$z_2=xe^{3x}$，$z_3=e^{-x}$ とおけば，任意の $y\in V$ は $z_1, z_2, z_3\in V$ の線型結合で表わされるわけであり，$\dim V=3$ であるから (z_1, z_2, z_3) はまた V の底である．底 (z_1, z_2, z_3) に関する D の行列は

$$D\cdot(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2, z_3)\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

で与えられる．この行列を B とし，底の変換 $(y_i)\to(z_j)$ の行列を P で表わせば (2.46)により $B=P^{-1}AP$ である．

$P=(p_{ij})$ を具体的に求めるためには $z_j^{(k)}=\sum_{i=1}^{3} p_{ij}y_i^{(k)}$ $(k=0, 1, 2)$ の両辺の $x=0$ における値を比較すればよい．

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 9 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

が得られる．——

d）双対空間

体 K 上の線型空間 V から K への線型写像全体のつくる線型空間 $V^*=L(V, K)$ を V の**双対空間**という．ベクトルを変数とする多変数の‘関数’を考えなければならないときにその関数を表現する手段としてしばしば用いられるものである．V^* の元を V の**線型形式**という．以下ここでも V は有限次元の線型空間である．

双対空間 V^* の次元については，(2.45)の特別な場合としてただちに

(2.49) $$\dim V^* = \dim V$$

が得られる．とくに $\dim V=n$ とし $(a_1, \cdots, a_n)$ を V の一つの底とするとき，$a_i^* \in V^*$ を $a_i^*(a_j)=\delta_{ij}$ によって定めることができる(補題2.5)が，このとき $(a_1^*, \cdots, a_n^*)$ は V^* の一つの底である．実際 $\dim V^*=n$ であるから任意の $f\in V^*$ が $a_1^*, \cdots, a_n^*$ の線型結合として表わされることだけ示せばよいが，$f(a_j)=\lambda_j \in K$ $(1\leqq j\leqq n)$ とすれば明らかに $f=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^*$ である．このようにして V の底 $(a_1, \cdots, a_n)$ に対応して得られる V^* の底 $(a_1^*, \cdots, a_n^*)$ を $(a_1, \cdots, a_n)$ の**双対底**という．

さらに V^* の双対空間を考え，それを V^{**} で表わすことにしよう．すなわち $V^{**}=(V^*)^*=L(V^*, K)$．とくに $v\in V$ を一つ固定して

$$\phi_v : V^* \ni f \longmapsto f(v) \in K \tag{2.50}$$

とすれば $\phi_v \in V^{**}$ である．実際 $f, g\in V^*$，$\lambda \in K$ とすると

$$\phi_v(f+g) = f(v)+g(v) = \phi_v(f)+\phi_v(g),$$
$$\phi_v(\lambda f) = \lambda f(v) = \lambda\phi_v(f).$$

定理 2.8 $\phi: V\ni v\mapsto \phi_v \in V^{**}$ は線型同型写像である．ただし $\phi_v(f)=f(v)$ $(f\in V^*)$.

証明 定義により $x, y\in V$，$\lambda\in K$ のとき任意の $f\in V^*$ に対して

$$\phi_{x+y}(f) = f(x)+f(y) = (\phi_x+\phi_y)(f),$$
$$\phi_{\lambda x}(f) = \lambda f(x) = (\lambda\phi_x)(f).$$

したがって $\phi_{x+y}=\phi_x+\phi_y$，$\phi_{\lambda x}=\lambda\phi_x$ であり，ϕ は線型写像である．$(a_1, \cdots, a_n)$ $(n=\dim V)$ を V の一つの底とし，$(a_1^*, \cdots, a_n^*)$ をその双対底としよう．このとき

$$\phi_{a_j}(a_i^*) = a_i^*(a_j) = \delta_{ij}.$$

すなわち $(\phi_{a_1}, \cdots, \phi_{a_n})$ は $(a_1^*, \cdots, a_n^*)$ の双対底である．したがって ϕ は同型写像である．▌

定理2.8の同型写像は，もともと $v\in V$ の像 $\phi_v \in V^{**}$ を(2.50)によって定義すること自体が v そのものを V^{**} の元と考えることに他ならないという意味で，極めて自然なものである．たとえば底を一つ固定して考える等の人工的な要素をまったく仮定しないで，双対空間という概念を考えたときにすでに自動的に定義されていると考えることができるのである．そこで以下 $v\in V$ と $\phi_v \in V^{**}$ とを同一視して $V=\phi(V)=V^{**}$ とみなす．いいかえれば写像(2.50)の像 $f(v)$ を $\phi_v(f)$ で表わすか $v(f)$ で表わすかは，線型写像としては単に表記法だけの問題

となり区別する理由がまったくないから同じものとみなし，$v(f)$ で表わしてしまうわけである．したがってまた $V^{***}=V^*$，$V^{****}=V$，… であり，＊をつける(双対空間を考える)操作によっては，V, V^* の役割が交互に入れ換わるだけである．この意味での役割の双対性を強調するために $f(v)=v(f)$ を $\langle f, v\rangle=\langle v, f\rangle$ のように並列して表わすこともある．

次に V, V' を体 K 上の線型空間とし，$F\colon V\to V'$ を一つの線型写像とする．このとき V, V' の双対空間 V^*, V'^* に対して ${}^tF\colon V'^*\to V^*$ が

$$(2.51)\qquad {}^tF(f)=f\circ F \qquad (f\in V'^*)$$

によって定義される．$F\in L(V, V')$，$f\in L(V', K)$ であるからたしかに ${}^tF(f)\in V^*=L(V, K)$ である．この ${}^tF$ を F の**双対写像**という．${}^tF\colon V'^*\to V^*$ は線型写像である：

$$ {}^tF(f+g)=(f+g)\circ F={}^tF(f)+{}^tF(g),$$
$$ {}^tF(\lambda f)=\lambda f\circ F=\lambda{}^tF(f) \qquad (\lambda\in K).$$

定義式(2.51)はまた

$$\langle f, F(v)\rangle=\langle {}^tF(f), v\rangle \qquad (v\in V,\ f\in V'^*)$$

と表わすこともできる．したがって $\langle f, v\rangle=0\ (\forall f\in V^*)\Longrightarrow v=o$ により

$$(2.52)\qquad {}^t({}^tF)=F$$

は明らかである．

定理 2.9 $F\colon V\to V'$ を線型写像，${}^tF\colon V'^*\to V^*$ をその双対写像とする．このとき

(1) F が全射 $\Longleftrightarrow$ ${}^tF$ が単射，

(2) F が単射 $\Longleftrightarrow$ ${}^tF$ が全射．

証明 (1)を証明すれば(2)は(2.52)によって明らかである．F が全射$(F(V)=V')$であることは明らかに

$$\langle f, F(v)\rangle=0\ (\forall v\in V)\Longrightarrow f=o^*\in V'^*\ (\text{零元})$$

であることと同値である．$\langle f, F(v)\rangle=\langle {}^tF(f), v\rangle$ であるからこのことはまた $\mathrm{Ker}\,{}^tF=\{o^*\}$，すなわち ${}^tF$ が単射であることと同値である．▮

V, V' の底をそれぞれ $\mathfrak{A}=(a_1, \cdots, a_n)$，$\mathfrak{A}'=(a_1', \cdots, a_m')$ $(n=\dim V,\ m=\dim V')$ とし，$\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ に関する F の行列を $A\in M(m, n; K)$ とする．このとき $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ の双対底 $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{A}'^*$ に関する ${}^tF$ の行列 $B\in M(n, m; K)$ は A の転置行列に等し

い：$B={}^tA$. 実際 $A=(\alpha_{ij})$, $B=(\beta_{ji})$ とすれば

$$\langle a_i'^*, F(a_j)\rangle = \left\langle a_i'^*, \sum_k \alpha_{kj}a_k'\right\rangle = \alpha_{ij}$$

$$= \langle {}^tF(a_i'^*), a_j\rangle = \left\langle \sum_l \beta_{li}a_l^*, a_j\right\rangle = \beta_{ji}.$$

例 2.74　$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ を線型空間 V の二つの底とする．底の変換の行列 $P: \mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ を与えられたものとして，双対底の変換 $\mathfrak{A}^*\to\mathfrak{B}^*$ の行列を求めよう．$\mathfrak{A}=(a_1, \cdots, a_n)$, $\mathfrak{B}=(b_1, \cdots, b_n)$, $b_j=\sum_i \pi_{ij}a_i$ とすれば $P=(\pi_{ij})$. 同様に $b_j^*=\sum_i \pi_{ij}'a_i^*$ とすれば $P'=(\pi_{ij}'): \mathfrak{A}^*\to\mathfrak{B}^*$. 一方

$$\delta_{ij} = \langle b_i, b_j^*\rangle = \left\langle \sum_k \pi_{ki}a_k, \sum_l \pi_{lj}'a_l^*\right\rangle$$

$$= \sum_{k,l} \pi_{ki}\pi_{lj}'\delta_{kl} = \sum_k \pi_{ki}\pi_{kj}'.$$

したがって ${}^tPP'=I_n$ であり，$P'={}^tP^{-1}$ が得られる．(P が正則であることから定理 2.9 により ${}^tP$ も正則である.) すなわち ${}^tP^{-1}: \mathfrak{A}^*\to\mathfrak{B}^*$. ——

例 2.75　体 K 上の線型空間 V における 2 変数関数

$$B: V\times V \ni (x, y) \longmapsto B(x, y) \in K$$

が V 上の**双 1 次形式**(双線型形式)であるとは，B が

$$(2.53)\qquad \begin{cases} B(x_1+x_2, y) = B(x_1, y)+B(x_2, y), \\ B(x, y_1+y_2) = B(x, y_1)+B(x, y_2), \\ B(\lambda x, y) = B(x, \lambda y) = \lambda B(x, y) \qquad (\lambda\in K) \end{cases}$$

をみたしていることである．

V 上の双 1 次形式 B が与えられたとき

$$f_x(v) = \langle v, f_x\rangle = B(v, x) \qquad (v, x\in V)$$

によって 1 次形式 $f_x\in V^*$ が得られる．このとき写像

$$\Phi_B: V\ni x \longmapsto f_x\in V^*$$

は線型写像である．実際(2.53)により

$$f_{x+y}(v) = B(v, x+y) = B(v, x)+B(v, y) = (f_x+f_y)(v),$$

$$f_{\lambda x}(v) = B(v, \lambda x) = \lambda B(v, x) = (\lambda f_x)(v).$$

$V^{**}=V$ に注意すれば ${}^t\Phi_B$ はまた V から V^* への線型写像であり，

$$(2.54)\qquad B(x, y) = \langle x, \Phi_B(y)\rangle = \langle {}^t\Phi_B(x), y\rangle \qquad (x, y\in V).$$

線型写像 $\Phi_B: V\to V^*$ が同型写像になるとき，双1次形式 B は**非退化**であるという．$\dim V=\dim V^*$ であるから Φ_B が全単射であることと $\mathrm{Ker}\,\Phi_B=\{o\}$ であることとは同値であり，したがって B が

(2.55) $$B(x,y)=0\ \ (\forall x\in V)\implies y=o$$

をみたすときに B は非退化であると言っても同じである．さらに定理2.9により Φ_B が同型写像であれば ${}^t\Phi_B$ も同型写像であるから，(2.54)により

$$B(x,y)=0\ \ (\forall y\in V)\implies x=o$$

であることが，B が非退化であるための必要十分条件である．

双1次形式 B がさらに

(2.56) $$B(x,y)=B(y,x)\qquad(\forall x,y\in V)$$

をみたすとき，B を**対称**双1次形式という．これは(2.54)により Φ_B が ${}^t\Phi_B=\Phi_B$ をみたすことと言っても同じである．

以上の議論とは逆に，線型写像 $\Phi: V\to V^*$ がはじめに与えられたとすれば

$$B_\Phi(x,y)=\langle x,\Phi(y)\rangle=\langle {}^t\Phi(x),y\rangle\qquad(x,y\in V)$$

により V 上の双1次形式 B_Φ が定義できる．このとき Φ が同型写像であれば B_Φ は非退化であり，${}^t\Phi=\Phi$ であれば B_Φ は対称双1次形式である．たとえば V の一つの底 $\mathfrak{A}=(a_1,\cdots,a_n)$ を定め，$\mathfrak{A}^*=(a_1{}^*,\cdots,a_n{}^*)$ をその双対底とすれば $\Phi(a_i)=a_i{}^*$ $(1\leqq i\leqq n)$ によって同型写像 $\Phi: V\to V^*$ が定められるが，このとき $x=\sum_i\xi_i a_i$，$y=\sum_j\eta_j a_j$ とすれば

$$B_\Phi(x,y)=\left\langle\sum_i\xi_i a_i,\ \sum_j\eta_j a_j{}^*\right\rangle=\sum_i\xi_i\eta_i.$$

$\boldsymbol{x}={}^t(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$\boldsymbol{y}={}^t(\eta_1,\cdots,\eta_n)$ とおけば $B_\Phi(x,y)={}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ と表わすことができる．これは非退化な対称双1次形式である．

一般に体 K 上の n 次元線型空間 V における双1次形式 B は，V の底 $\mathfrak{A}=(a_1,\cdots,a_n)$ を一つ定めて $x=\sum_i\xi_i a_i$，$y=\sum_j\eta_j a_j$ とすれば

$$B(x,y)=\sum_{i,j}B(a_i,a_j)\xi_i\eta_j$$

と表わすことができる．$B(a_i,a_j)=\alpha_{ij}\in K$，$A=(\alpha_{ij})\in M_n(K)$，$\boldsymbol{x}={}^t(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$\boldsymbol{y}={}^t(\eta_1,\cdots,\eta_n)$ とおけば

(2.57) $$B(x,y)={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y}.$$

逆に任意の $A\in M_n(K)$ に対して(2.57)の右辺は K^n 上の双1次形式であり，V の底 $\mathfrak{A}$ が一つ定めてあれば V 上の双1次形式が(2.57)によって得られる．とくに B が対称双1次形式であるためには $B(a_i, a_j)=B(a_j, a_i)$ であること，すなわち A が対称行列 $({}^tA=A)$ であることが必要十分である．また B が非退化であるためには，

$$\sum_j B(a_i, a_j)\eta_j = 0 \Longrightarrow \eta_1 = \cdots = \eta_n = 0$$

が必要十分であり，これはまた A が正則であることと同値である．——

問 底の変換 $P:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ を行なえば，(2.57)の行列 A は ${}^tPAP$ にかわることを示せ．——

例 2.76 V, V' をともに体 K 上の線型空間とし，$\dim V=n$, $\dim V'=m$ とする．$f\in V^*$, $y\in V'$ を一つずつ定めたとき，V から V' への線型写像が

$$V\ni v\longmapsto f(v)y\in V'$$

によって定義される．この線型写像を $y\otimes f$ で表わすことにしよう．すなわち，$(y\otimes f)(v)=f(v)y$．明らかに

$$(y_1+y_2)\otimes f = y_1\otimes f+y_2\otimes f \qquad (y_1, y_2\in V',\ f\in V^*),$$
$$y\otimes(f_1+f_2) = y\otimes f_1+y\otimes f_2 \qquad (y\in V',\ f_1, f_2\in V^*),$$
$$(\lambda y)\otimes f = y\otimes(\lambda f) = \lambda(y\otimes f) \qquad (\lambda\in K,\ y\in V',\ f\in V^*)$$

が成立する．また

$$y\otimes f = O\in L(V, V')\ (\text{零元}) \Longrightarrow y = o' \ \text{または}\ f = o^*.$$

そこで $y\otimes f\in L(V, V')$ $(y\in V', f\in V^*)$ の形の線型写像有限個の和全体からなる集合を $V'\otimes V^*$ で表わすことにしよう：

$$V'\otimes V^* = \left\{\sum_\nu y_\nu\otimes f_\nu\,(\text{有限和})\,\middle|\, y_\nu\in V',\ f_\nu\in V^*\right\}.$$

明らかに $V'\otimes V^*$ は $L(V, V')$ の部分空間である．一方 V の底 $\mathfrak{A}=(a_1, \cdots, a_n)$, V' の底 $\mathfrak{A}'=(a_1', \cdots, a_m')$ をそれぞれ定めておけば，$a_i'\otimes a_j^*$ $(1\leqq i\leqq m,\ 1\leqq j\leqq n)$ が $L(V, V')$ の底をなすのである．実際，任意の $F\in L(V, V')$ に対して

$$F(a_j) = \sum_i \alpha_{ij}a_i' \Longrightarrow F = \sum_{i,j}\alpha_{ij}a_i'\otimes a_j^*$$

であり，$\dim L(V, V')=mn$ ((2.45)参照)であったから，mn 個の $a_i'\otimes a_j^*$ は底をなすわけである．したがって実は

$$L(V, V') = V' \otimes V^*.$$

$M(m, n; K)$ の行列単位を E_{ij} $(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$ とすれば，$\Phi(a_i' \otimes a_j^*) = E_{ij}$ によって同型写像

$$\Phi:\ L(V, V') \longrightarrow M(m, n; K)$$

が定められる．このとき $F \in L(V, V')$ の像 $\Phi(F) = A$ が F の底 $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ に関する行列に他ならない．——

§2.5　例——差分法

この章で述べてきた一般論を総括的に復習する意味で，ここでは一つの例として差分法の線型代数的な側面を簡単に説明する．

a）差分と和分

一般に実数のある区間で定義された実数値関数 u(連続とは限らない)に対して $(u(t+h)-u(t))/h$ (h は 0 ではない定数)が定義されているとき，これを $(\delta_h u)(t)$ で表わして u の(t における) **1階差分**という．以下では簡単のために関数は区間

$$[0, \infty) = \{t \in \boldsymbol{R} \mid t \geqq 0\}$$

で定義されているものを考え，$h=1$ の場合を扱うものとする．そこで $[0, \infty)$ で定義された実数値関数全体の集合を $\mathcal{F}$ で表わし，δ_1 を単に δ で表わすことにする．したがって $u \in \mathcal{F}$ に対して

$$(\delta u)(t) = u(t+1) - u(t) \qquad (\forall t \in [0, \infty)) \tag{2.58}$$

であり，関数 $\delta u \in \mathcal{F}$ が定まる．たとえば，数列 $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ は Gauss の記号 $[t]=k$ $(k \leqq t < k+1)$ を用いて $u(t) = u_{[t]}$ とおくことにより $u \in \mathcal{F}$ とみなすことができ，とくに整数 $k \in [0, \infty)$ においては $(\delta u)(k) = u_{k+1} - u_k$ である．

集合 $\mathcal{F}$ に加法，スカラー乗法をそれぞれ

$$(u_1+u_2)(t) = u_1(t) + u_2(t), \qquad (\lambda u)(t) = \lambda u(t)$$

によって定義すれば，例2.4で述べたように $\mathcal{F} = \boldsymbol{R}^{[0,\infty)}$ は $\boldsymbol{R}$ 上の線型空間である．(ただし有限次元ではない.) また

$$\delta: \mathcal{F} \ni u \longmapsto \delta u \in \mathcal{F}$$

が $\mathcal{F}$ の線型変換であることも容易にわかる．この線型変換を差分演算子という．

$u, v \in \mathcal{F}$ に対して積 uv を通常の関数の積 $(uv)(t) = u(t)v(t)$ として定義すれば

$$\delta(uv)(t) = v(t+1)(\delta u)(t) + u(t)(\delta v)(t) \tag{2.59}$$

が成立する．また $v(t)\neq 0$ のような $t\in[0,\infty)$ に対しては $1/v(t)$ が値としては定義されるが，その意味で $v(t)\neq 0$, $v(t+1)\neq 0$ のとき

$$\delta(u/v)(t)=(v(t)(\delta u)(t)-u(t)(\delta v)(t))/v(t)v(t+1) \tag{2.60}$$

が成立する．さらに一般の線型変換について定義したように $\delta^0=I_{\mathcal{F}}$, $\delta^n=\delta\circ\delta^{n-1}$ $(n\geqq 1)$ とすれば

$$(\delta^n u)(t)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}u(t+k) \tag{2.61}$$

の成立することが帰納法によって証明できる．$\delta^n u$ を u の n **階差分**という．これ等の公式は微分法においても類似のものがあるが，証明もまったく同様にできる．

問 (2.59), (2.60), (2.61) を証明せよ．——

例 2.77 $a\in\boldsymbol{R}$ のとき $\delta a^t=a^{t+1}-a^t=(a-1)a^t$. ——

例 2.78 微分法では $d(t^n)/dt=nt^{n-1}$ であるが，差分演算子 δ については，$n=0$ のとき $\delta t^0=0$, $n\geqq 1$ のとき

$$\delta t^n=(t+1)^n-t^n=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}t^k \tag{2.62}$$

となってやや複雑な形であり，多項式の差分の計算が容易ではない．しかしベキ乗 t^n のかわりに**階乗関数**

$$t^{\{0\}}=1,\qquad t^{\{n\}}=\begin{cases} t(t-1)\cdots(t-n+1) & (n=1,2,\cdots)\\ \dfrac{1}{(t+1)(t+2)\cdots(t+(-n))} & (n=-1,-2,\cdots)\end{cases}$$

を考えると，これについては

$$\delta t^{\{n\}}=nt^{\{n-1\}} \tag{2.63}$$

の成立していることが簡単にわかる．

$\boldsymbol{R}$ 係数1変数多項式で次数が n 以下のものによって表わされる $p\in\mathcal{F}$ の全体を V_n で表わせば，V_n は $\boldsymbol{R}$ 上の線型空間であり，$(1,t,\cdots,t^n)$ $(\dim V_n=n+1)$ がその一つの底を与えるのであった．ところで $t^{\{k\}}$ は k 次多項式であることから，$1,t^{\{1\}},\cdots,t^{\{n\}}$ が線型独立であることは容易に証明できる．したがって $(1,t^{\{1\}},\cdots,t^{\{n\}})$ も V_n の一つの底になっているわけである．$p\in V_n$ を $p(t)=\sum_{k=0}^{n}a_k t^{\{k\}}$ $(a_k\in\boldsymbol{R})$ で表わしたものとすると

$$a_k = \frac{1}{k!}(\delta^k p)(0) \qquad (k=0, 1, \cdots, n)$$

であることが(2.63)を用いて証明できる．とくに $t^l = \sum_{k=0}^{n} p_{kl} t^{\{k\}}$ $(0 \leqq l \leqq n)$ とすれば，(2.61)を用いて

$$p_{kl} = \frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} \nu^l \tag{2.64}$$

が得られる．t^l は l 次多項式であるから $l<k$ では(2.64)は実際には0を表わしているのである．また $t^{\{l\}}$ の最高次の係数が1であることに注意すれば $p_{ll}=1$ $(0 \leqq l \leqq n)$ である．したがって (i, j) 成分が $p_{i-1, j-1}$ で与えられる行列 $P \in M_{n+1}(\boldsymbol{R})$ は対角成分が1の上三角行列であり，これが底の変換 $(1, t^{\{1\}}, \cdots, t^{\{n\}}) \to (1, t, \cdots, t^n)$ の行列を与えるのである．——

問　差分演算子 δ を例2.78の V_n に制限して V_n の線型変換と考えたとき，底 $(1, t, \cdots, t^n)$ に関する δ の行列，$(1, t^{\{1\}}, \cdots, t^{\{n\}})$ に関する δ の行列をそれぞれ求めよ．——

関数 $u, U \in \mathscr{F}$ の間に $\delta U = u$ の関係があるとき，u を U の差分というわけであるが，逆に U を u の一つの**和分**という．U_1, U_2 をともに u の和分であるとすれば

$$\delta U_1 = \delta U_2 \quad したがって \quad \delta(U_1 - U_2) = 0$$

であり，$\pi = U_2 - U_1$ は $(\delta\pi)(t) = \pi(t+1) - \pi(t) = 0$ をみたさなければならない．すなわち π は周期1をもつ関数である．逆に U を u の一つの和分とし，π を周期1をもつ任意の関数とすれば $U+\pi$ がまた u の一つの和分となることは明らかである．したがって周期1をもつ関数全体の集合 $\mathscr{C} = \mathrm{Ker}\,\delta = \{\pi \in \mathscr{F} \mid \delta\pi = 0\}$ と u の一つの和分 U とによって u の和分全体は $\delta^{-1}u = U + \mathscr{C}$ のように表わすことができる．この集合 $\delta^{-1}u$ を u の**不定和分**という．明らかに $\delta^{-1}(u+v) = \delta^{-1}u + \delta^{-1}v$，$\delta^{-1}(\lambda u) = \lambda\delta^{-1}u$ $(u, v \in \mathscr{F},\ \lambda \in \boldsymbol{R})$ が成立する．

たとえば整数 $n \neq -1$ に対しては(2.63)から

$$\delta^{-1} t^{\{n\}} = \frac{1}{n+1} t^{\{n+1\}} + \mathscr{C} \tag{2.65}$$

が得られる．

例 2.79　実数列 $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ は前にも述べたとおり $u(t) = u_{[t]}$ とおくことにより関

数 $u\in\mathscr{F}$ とみなすことができる．この u の一つの和分 $U\in\delta^{-1}u$ をとれば $(\delta U)(t)=u(t)=u_{[t]}$，すなわち $U(t+1)-U(t)=u_{[t]}$ である．したがってとくに

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{n}(U(k+1)-U(k)) = U(n+1)-U(m).$$

たとえば級数 $\sum_{k=1}^{n}(k+2)(k+1)k = \sum_{k=1}^{n}(k+2)^{\{3\}}$ については関数 $u(t)=(t+2)^{\{3\}}$ の一つの和分 $U(t)=(1/4)(t+2)^{\{4\}}$ ((2.65)参照)を用いて上と同様に考えれば

$$\sum_{k=1}^{n}(k+2)(k+1)k = U(n+1)-U(1)$$
$$= \frac{1}{4}(n+3)(n+2)(n+1)n.$$

このさい t が整数であるときの値だけが必要なのであり，$u(t)$ として，ことさら $([t]+2)^{\{3\}}$ を考えないでもよいのである．同様にたとえば

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n}\{(k+1)k-k\} = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^{\{2\}}-\sum_{k=1}^{n}k^{\{1\}}$$
$$= \frac{1}{3}(n+2)(n+1)n-\frac{1}{2}(n+1)n$$
$$= \frac{1}{6}(2n+1)(n+1)n.$$

——

b) Bernoulli 多項式と Bernoulli 数

たとえば級数 $\sum_{k=1}^{N} k^n$ の和を求める必要がある場合に関数 $u(t)=t^n$ の一つの和分 U さえわかっていれば，例2.79で述べた方法により $\sum_{k=1}^{N} k^n=U(N+1)-U(1)$ が得られる．実際にこの形の級数の和を求める必要がある場合，あるいは本質的にそれと同等である場合はしばしばある．

そこでここではまず $u(t)=nt^{n-1}$ の和分を多項式の形で求めることにしよう．$\mathscr{F}$ の元で変数 t の $\boldsymbol{R}$ 係数の多項式として表わされるもの全体 $\boldsymbol{R}[t]$ を以下 $\mathscr{F}_0$ で表わすことにする．$[0,\infty)$ では明らかに $\mathscr{F}_0$ は $\mathscr{F}$ の部分空間であり，$\mathscr{F}_0\cap\operatorname{Ker}\delta=\boldsymbol{R}$ (周期1をもつ多項式関数は定数だけ)である．差分演算子 δ および微分 $D=d/dt$ はいずれも多項式関数を多項式関数にうつすから，これ等を $\mathscr{F}_0$ に制限して $\mathscr{F}_0$ の線型変換とみなしたものもそれぞれ δ, D で表わすことにする．このとき

$$D\circ\delta(t^k) = D((t+1)^k-t^k) = k(t+1)^{k-1}-kt^{k-1}$$

$$= \delta(kt^{k-1}) = \delta\circ D(t^k)$$

であるから任意の多項式関数 $p\in\mathscr{F}_0$ に対して $D\circ\delta(p)=\delta\circ D(p)$ となる．すなわち $\mathscr{F}_0$ 上で δ, D は可換である．そこで各 $n=0,1,2,\cdots$ について

(2.66) $$B_n(t) = D(\delta^{-1}t^n)$$

とおけば $B_n(t)$ は n 次の多項式関数であり，たしかに

(2.67) $$(\delta B_n)(t) = nt^{n-1}$$

をみたしていることがわかる．したがって $\mathscr{F}_0$ の中では

$$\delta^{-1}(nt^{n-1}) = B_n(t)+\boldsymbol{R}$$

となっている．ゆえに問題は(2.66)で定義された多項式関数 $B_n(t)$ を具体的に書き表わすことに帰着される．

定義から明らかに $B_0(t)=1$ である．さらに(2.67)を用いて

$$B_{n-1}(t) = D(\delta^{-1}t^{n-1}) = \frac{1}{n}D(\delta^{-1}(\delta B_n))(t) = \frac{1}{n}(DB_n)(t)$$

であるから

(2.68) $$(DB_n)(t) = nB_{n-1}(t) \qquad (n\geqq 1).$$

したがって一般に $B_n(t)$ の ν 階導関数 $B_n{}^{(\nu)}(t)$ は $n^{\{\nu\}}B_{n-\nu}(t)$ (ただし $\nu>n$ では $B_{n-\nu}=0$ とする)と一致し，$B_n(t_0+t)$ の t に関する Taylor 展開は，

$$\frac{1}{\nu!}B_n{}^{(\nu)}(t_0) = \binom{n}{\nu}B_{n-\nu}(t_0)$$

に注意すれば

(2.69) $$B_n(t_0+t) = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}B_{n-\nu}(t_0)t^\nu$$

で与えられることがわかる．一般に $B_n(0)=b_n$ ($B_n(t)$ の定数項)とおけば，(2.69)において $t_0=0$ とおくことにより

(2.70) $$B_n(t) = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}b_{n-\nu}t^\nu = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}b_\nu t^{n-\nu}$$

が得られる．したがって b_ν ($\nu=0,1,2,\cdots$) が決定できればよい．まず $B_0(t)=1$ により $b_0=1$ である．次に(2.67)により $n\geqq 1$ ならば

$$(\delta B_{n+1})(t) = B_{n+1}(t+1)-B_{n+1}(t) = (n+1)t^n$$

であり，$t=0$ とおけば $B_{n+1}(1)=B_{n+1}(0)=b_{n+1}$ が得られる．そこで(2.70)を $n+1$ のときに用いて

$$b_{n+1}=B_{n+1}(1)=\sum_{\nu=0}^{n+1}\binom{n+1}{\nu}b_\nu,$$

すなわち

(2.71) $$b_n=-\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n+1}{\nu}b_\nu \qquad (n\geqq 1)$$

であることがわかる．$b_0=1$ と(2.71)とを用いて順次

$$b_0=1,\quad b_1=-\frac{1}{2},\quad b_2=\frac{1}{6},\quad b_3=0,\quad b_4=-\frac{1}{30},\quad \cdots$$

のように決定されるわけである．実はさらに変数 t の多項式としての $B_n(t)$ は(実数全体 $\boldsymbol{R}$ 上の関数として)，

(2.72) $$B_n(1-t)=(-1)^nB_n(t) \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

をみたすのであり，したがってとくに $n\geqq 2$ ならば $t=0$ とおいて $b_n=(-1)^nb_n$ ($n\geqq 2$ ならば $B_n(1)=B_n(0)=b_n$) が得られる．ゆえに

(2.73) $$b_{2\nu+1}=0 \qquad (\nu=1,2,\cdots)$$

[(2.72)の証明] $\tilde{B}_n(t)=B_n(1-t)$ とおけば

$$(\delta\tilde{B}_n)(t)=\tilde{B}_n(t+1)-\tilde{B}_n(t)=B_n(-t)-B_n(1-t)$$
$$=-(\delta B_n)(-t)=(-1)^nnt^{n-1}.$$

したがって $\delta\tilde{B}_n=(-1)^n\delta B_n$ で，$\tilde{B}_n, B_n$ はともに多項式だから $\tilde{B}_n=(-1)^nB_n+C$ (C は定数)，すなわち

$$B_n(1-t)=(-1)^nB_n(t)+C$$

である．ゆえに n が偶数のときは $t=0$ とおいて $B_n(1)=B_n(0)$ ($n\geqq 2$) に注意すれば $C=0$ である．n が奇数のときは，いま証明したことによって $B_{n+1}(1-t)=B_{n+1}(t)$ であるから，この両辺を t で微分して(2.68)を用いれば $B_n(1-t)=-B_n(t)$ が得られる．▌

以上によって決定された多項式 $B_n(t)$ を **Bernoulli 多項式**，またその定数項 b_n を **Bernoulli 数**というのである．

問 $B_n(t)$ ($0\leqq n\leqq 10$) を具体的に書き表わせ．——

実は Bernoulli 数 b_n ($n\geqq 1$) は

(2.74) $$b_n=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^\nu\frac{1}{k+1}\binom{k}{\nu}\nu^n$$

で与えられることがわかる．

[(2.74)の証明]　$t^n=\sum_{k=0}^{n} p_k t^{\{k\}}$ $(p_k \in \boldsymbol{R})$ とおけば，(2.65)を $\mathscr{F}_0$ 上で用いて

$$\delta^{-1}t^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} p_k t^{\{k+1\}} + C,$$

したがって $B_n(t)=D(\delta^{-1}t^n)=\sum_{k=0}^{n} (1/(k+1))p_k Dt^{\{k+1\}}$ である．一方，$Dt^{\{k+1\}}=\sum_{l=0}^{k} t^{\{k+1\}}/(t-l)$，とくに $t=0$ のときには $(Dt^{\{k+1\}})_{t=0}=(-1)^k k!$ となるから

$$b_n = B_n(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}(-1)^k p_k k!.$$

ここで(2.64)を用いれば(2.74)が得られる $(p_k=p_{kn})$．▌

例 2.80　(2.67)からわかるように $(1/(n+1))B_{n+1}(t)$ は t^n の一つの和分である．したがって例2.79と同様の考え方によって

$$\sum_{k=1}^{N} k^n = \frac{1}{n+1}(B_{n+1}(N+1)-B_{n+1}(1)). \qquad ——$$

c) 漸化式をみたす数列

一般に変数 t の未知関数 $u \in \mathscr{F}$ とその差分の間の関係式

(2.75)　　　　$$F(t, u, \delta u, \cdots, \delta^n u) = 0$$

を n 階**差分方程式**という．この形からも想像できるとおり，差分方程式についても常微分方程式と類似の理論を考えることができるのであるが，実際には両者の解は一般に異質のものである．しかし常微分方程式の数値解法等とも関連して，差分方程式論自体も応用上重要なものである．ここでは特殊な例にすぎないが，漸化式をみたす数列だけに関して説明する．

差分方程式は応用上別の形で表わされることが多い．任意の正の実数 α に対して $(\tau_\alpha u)(t)=u(t+\alpha)$ により線型変換 $\tau_\alpha : \mathscr{F} \ni u \mapsto \tau_\alpha u \in \mathscr{F}$ を定義することができる．この τ_α を**移動演算子**という．ここでは $\alpha=1$ の場合だけを考えるから τ_1 を単に τ で表わすことにする．差分演算子は $\delta=\tau-I$ (I は恒等変換)とかけるから $(\tau^k u)(t)=u(t+k)$ であることに注意すれば，実は(2.61)は $(\tau-I)^n$ の2項展開を行なうだけで簡単に証明できるのである：

(2.76)　　　　$$\delta^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\tau^k \qquad (\tau^0=I).$$

同様に $\tau=\delta+I$ であるから

$$\tau^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta^k \tag{2.77}$$

が得られる．(2.76)を用いて(2.75)を

$$G(t, u, \tau u, \cdots, \tau^n u) = 0 \tag{2.78}$$

の形に変形することができる．逆に(2.77)を用いて(2.78)を(2.75)の形に変形することも可能である．したがって移動演算子を用いて表わされた関係式(2.78)のことを差分方程式とよんでもよいのであり，実際にこの形で表現されることが多い．

とくに $a_1(t), \cdots, a_n(t), b(t) \in \mathscr{F}$ を与えられたものとするとき

$$\tau^n u + \sum_{k=1}^{n} a_k(t) \tau^{n-k} u = b(t) \tag{2.79}$$

の形のものを n 階線型差分方程式という．また n 個の未知関数 $u_1, \cdots, u_n$ に関する差分方程式系

$$\tau u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) u_j + b_i(t) \qquad (1 \leqq i \leqq n), \tag{2.80}$$

あるいは $A(t) = (a_{ij}(t))$，$\boldsymbol{u} = {}^t(u_1, \cdots, u_n)$，$\boldsymbol{b}(t) = {}^t(b_1(t), \cdots, b_n(t))$ とおいてこれを

$$\tau \boldsymbol{u} = A(t)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b}(t) \tag{2.81}$$

で表わしたものを線型差分方程式系という．とくに $b=0$ あるいは $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$ である場合に(2.79), (2.81)は同次形であるという．(2.79)は $u=u_1$，$\tau u_k = u_{k+1}$ $(k=1, \cdots, n-1)$ とおくことにより(2.81)の形に帰着させることもできる．このとき

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_n(t) & \cdots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix} \tag{2.82}$$

である．

さて，数列 $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ を $u(t) = u_{[t]}$ で定義される $u \in \mathscr{F}$ と同一視して，数列全体からなる $\mathscr{F}$ の部分集合を $\mathscr{F}_1$ で表わせば，明らかに $\mathscr{F}_1$ は $\mathscr{F}$ の部分空間である．また $u \in \mathscr{F}_1$ とすれば $(\tau u)(t) = u(t+1) = u_{[t+1]}$ であり，$\tau u \in \mathscr{F}_1$ であることがわかる．そこで τ を $\mathscr{F}_1$ に制限して $\mathscr{F}_1$ の線型変換と考えたものを同じ記号 τ で表わす．$\mathscr{F}_1$ の元で漸化式

(2.83) $$u_{N+n}+\sum_{k=1}^{n} a_k u_{N+n-k} = 0 \qquad (N=0,1,2,\cdots)$$

をみたすもの全体，すなわち定数係数($a_k \in \boldsymbol{R}$, $1 \leqq k \leqq n$)の n 階線型差分方程式

(2.83)′ $$\tau^n u+\sum_{k=1}^{n} a_k \tau^{n-k} u = 0$$

の $\mathscr{F}_1$ における解全体を $\mathscr{V}$ で表わすことにしよう．$\mathscr{V}$ は線型変換

$$L = \tau^n+\sum_{k=1}^{n} a_k \tau^{n-k}:\ \mathscr{F}_1 \longrightarrow \mathscr{F}_1$$

の核($\mathscr{V}=\mathrm{Ker}\, L$)であるから $\mathscr{F}_1$ の部分空間である．

線型空間 $\mathscr{V}$ は有限次元である．実際 $u \in \mathscr{V}$ は $t=0,1,\cdots,n-1$ における値 u_0, $u_1,\cdots,u_{n-1}$ を指定すれば，つまり $(\tau^k u)(0)$ $(0 \leqq k \leqq n-1)$ の値を定めておけば，任意の $t \in [0,\infty)$ における値 $u_{[t]}$ も(2.83)によって自動的に定まってしまう．$u^{(l)} \in \mathscr{V}$ $(l=1,2,\cdots,n)$ を

$$(\tau^{l-1}u^{(l)})(0) = 1, \qquad (\tau^k u^{(l)})(0) = 0 \qquad (0 \leqq k \leqq n-1,\ k \neq l-1)$$

によって定めれば $(u^{(1)},\cdots,u^{(n)})$ が $\mathscr{V}$ の一つの底を与え，したがって $\dim \mathscr{V}=n$ が得られるというわけである．$\mathscr{F}_1$ の線型変換として $L\circ\tau=\tau\circ L$ であるから $u \in \mathscr{V}$ ならば $L(\tau u)=\tau(Lu)=0$，したがって $\tau u \in \mathscr{V}$．そこで τ を $\mathscr{V}$ に制限して $\mathscr{V}$ の線型変換とみなすことができるわけであるが，このとき τ の $(u^{(1)},\cdots,u^{(n)})$ に関する行列は(2.82)の形になる．

この辺の議論は n 階の定数係数同次常微分方程式の解空間に関する議論とまったく同様であるから詳細は省略する．ところでこの議論の類似性は単に形式上のものではなく，差分方程式(2.83)′の一つの解法を与えるという意味で本質的である．次に一つだけ例をあげて説明する．

例 2.81 数列 $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ で漸化式

(♯) $$u_{N+3}-5u_{N+2}+3u_{N+1}+9u_N = 0 \qquad (N=0,1,2,\cdots)$$

をみたすものを求めよう．上述のように(♯)の解全体 $\mathscr{V}$ は $\boldsymbol{R}$ 上の3次元線型空間をなし，$\mathscr{F}_1$ 上の線型変換

$$L = \tau^3-5\tau^2+3\tau+9I$$

の核になっている．底 $(u^{(1)},u^{(2)},u^{(3)})$ を上述のようにとれば，この底に関する τ の行列は

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -9 & -3 & 5\end{bmatrix}.$$

ところでこの行列は例2.73において微分方程式

$$(*)\qquad y'''-5y''+3y'+9y=0$$

の解空間 V における線型変換 $D: y\to y'$ の底 (y_1, y_2, y_3) に関する行列として求めたものと同一である．したがってそこで述べたように

$$B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix},\qquad P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 9 & 6 & 1\end{bmatrix}.$$

$\mathcal{V}$ の底の変換 $P: (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})\to(v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)})$ を行なえば，新しい底に関する τ の行列が B で与えられるというわけである．$v^{(j)}=\{v^{(j)}{}_k\}_{k=0}^{\infty}$ $(1\leqq j\leqq 3)$ を求めよう．τ^k の底 $(v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)})$ に関する行列は

$$B^k=\begin{bmatrix}3^k & k3^{k-1} & 0\\ 0 & 3^k & 0\\ 0 & 0 & (-1)^k\end{bmatrix}\qquad (k=0, 1, 2, \cdots)$$

である．したがって $v^{(j)}{}_k=v^{(j)}(k)=(\tau^k v^{(j)})(0)$ に注意すれば

$$v^{(1)}{}_k=3^k v^{(1)}(0),\qquad v^{(2)}{}_k=k3^{k-1}v^{(1)}(0)+3^k v^{(2)}(0),$$
$$v^{(3)}{}_k=(-1)^k v^{(3)}(0)$$

である．一方 $v^{(j)}=\sum_{i=1}^{3} p_{ij}u^{(i)}$ $(P=(p_{ij}))$ により

$$v^{(1)}(0)=v^{(3)}(0)=1,\qquad v^{(2)}(0)=0.$$

したがって数列としては

$$v^{(1)}=\{3^k\}_{k=0}^{\infty},\qquad v^{(2)}=\{k3^{k-1}\}_{k=0}^{\infty},\qquad v^{(3)}=\{(-1)^k\}_{k=0}^{\infty}.$$

$\mathcal{V}$ の任意の元はこれ等の線型結合として表わされる：

$$\mathcal{V}\ni u=\{\alpha 3^k+\beta k3^{k-1}+\gamma(-1)^k\}_{k=0}^{\infty}\qquad (\alpha, \beta, \gamma\in \boldsymbol{R}).$$

あるいは次のように考えてもよい．$u=\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ に関する差分方程式(#)は，$u=u^{(1)}$，$\tau u=u^{(2)}$，$\tau u^{(2)}=u^{(3)}$ とおくことにより (2.81) の形

$$\tau\boldsymbol{u}=A\boldsymbol{u},\qquad \boldsymbol{u}={}^t(u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})$$

で表わされる．行列 A は上記のものと同じであり，したがって $B=P^{-1}AP$ と変形できる．このとき $\boldsymbol{v}=P^{-1}\boldsymbol{u}$ とおけば $\tau(P\boldsymbol{v})=AP\boldsymbol{v}$．$\tau$ の線型性によって $\tau(P\boldsymbol{v})$

$=P(\tau\boldsymbol{v})$ であるから $\tau\boldsymbol{v}=P^{-1}AP\boldsymbol{v}=B\boldsymbol{v}$ となる．$\boldsymbol{v}(0)={}^t(\alpha,\beta,\gamma)$ とすれば，$\boldsymbol{v}(k)=(\tau^k\boldsymbol{v})(0)=(B^k\boldsymbol{v})(0)$ により

$$\boldsymbol{v}(k)={}^t(\alpha 3^k+\beta k3^{k-1},\ \beta 3^k,\ \gamma(-1)^k).$$

$\boldsymbol{u}=P\boldsymbol{v}$ を計算すれば $\boldsymbol{u}(k)={}^t(\alpha 3^k+\beta k3^{k-1}+\gamma(-1)^k,\ *,\ *)$ であり，したがって $u=u^{(1)}=\{\alpha 3^k+\beta k3^{k-1}+\gamma(-1)^k\}_{k=0}^{\infty}$ $(\alpha,\beta,\gamma\in\boldsymbol{R})$ が得られる．——

例2.81で述べた第1の解法では漸化式(差分方程式)(#)の解空間 $\mathcal{V}$ と微分方程式(＊)の解空間 V との間の $\boldsymbol{u}^{(i)}\to y_i$ によって定まる同型対応を介して，移動演算子 τ と微分作用素 $D: y\to y'$ とが同じ行列で表わされることを用いている．すなわち(#)の解を求めることを(＊)の解を求めることに帰着させたのである．第2の解法でも同じ行列に関する変形を(＊)を解くことに帰着させている．定数係数の線型微分方程式については，われわれはすでに演算子法による解法を知っているのであるから，同様の方法は一般に(2.83)の解を求める際にも適用できるわけである．

問　　題

1　K を実数体 $\boldsymbol{R}$ の部分体とする．3変数 i,j,k の1次以下の多項式全体のつくる K 上の4次元線型空間を

$$\boldsymbol{H}=\{\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k\mid \alpha,\beta,\gamma,\delta\in K\}$$

で表わす．以下の命題を証明せよ．

(1)　$\boldsymbol{H}$ の乗法を，多項式としての積において

$$i^2=j^2=k^2=-1,$$
$$ij=-ji=k,\quad jk=-kj=i,\quad ki=-ik=j$$

とおきかえることにより定義する．この乗法により $\boldsymbol{H}^{\times}=\boldsymbol{H}-\{0\}$ は非可換な群になる．(この意味で $\boldsymbol{H}$ は‘非可換な体’である．体 K 上の**4元数体**とよばれる．)

(2)　$x=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k\in\boldsymbol{H}$ に対して $\bar{x}=\alpha-\beta i-\gamma j-\delta k$ とおく．$x,y\in\boldsymbol{H}$，$\lambda\in K$ とすれば

$$\overline{x+y}=\bar{x}+\bar{y},\quad \overline{\lambda x}=\lambda\bar{x},\quad \overline{xy}=\bar{y}\bar{x}.$$

(3)　$x=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k\in\boldsymbol{H}$ に対して $Nx=x\bar{x}=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2\in K$ とおく．$N(xy)=Nx\cdot Ny$ $(x,y\in\boldsymbol{H})$ が成立する．

(4)　R を K の1を含む部分環とする．このとき

$$\boldsymbol{H}_R=\{x=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k\mid \alpha,\beta,\gamma,\delta\in R\}$$

は $\boldsymbol{H}$ の1を含む部分環である．また $x\in\boldsymbol{H}_R$ が環 $\boldsymbol{H}_R$ の正則元であるためには $Nx\in R^{\times}$

(R の正則元)であることが必要十分である.

2　$\boldsymbol{H}, i, j, k$ は問題1のとおりとする．このとき線型空間としての $\boldsymbol{H}$ から $M_4(K)$ への線型写像 F を

$$F(1) = I_4 \qquad (\text{単位行列}),$$

$$F(i) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F(j) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

によって定めれば，F は単射であり，$F(xy)=F(x)F(y)$ $(x, y \in \boldsymbol{H})$ をみたすことを証明せよ．また $A=(a_{ij}) \in \mathrm{Im}\, F$, $A \neq O_4$ とするとき，A の逆行列を求めよ．

3　次のベクトルの集合の極大線型独立系を一つ求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^4.$

(2) 実係数の1変数多項式で3次以下のもの全体からなる線型空間において

$$X^2+1, \quad X, \quad X^2+X+1, \quad (X+1)^3, \quad X(X-1)(X-2), \quad X^3.$$

4　次の線型空間の次元を求めよ．

(1) $\{\boldsymbol{x}={}^t(x_1, \cdots, x_n) \in K^n \mid x_1+\cdots+x_n=0\}$.

(2) $\{A \in M_n(\boldsymbol{R}) \mid \mathrm{tr}\, A=0\}$.

(3) $\{A \in M_n(\boldsymbol{R}) \mid {}^tA=A\}$.

(4) $\{A \in M_n(\boldsymbol{R}) \mid {}^tA=-A\}$.

(5) 微分方程式 $y^{(3)}-4y''+5y'-2y=0$ および $y^{(4)}-4y^{(3)}+3y''+4y'-4y=0$ の解空間の ($C^\infty([0, \infty))$ の部分空間としての)共通部分.

5　$A, B \in M_n(K)$ が可換 $(AB=BA)$ であるとき，

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \qquad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

が成立することを証明せよ．

6　$A, B, C, D, Z \in M_n(\boldsymbol{C})$ とする．$M_{2n}(\boldsymbol{C})$ の乗法に関して

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & Z \\ O_n & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & Z_1 \\ O_n & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & O_n \\ O_n & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & O_n \\ Z_2 & I_n \end{bmatrix}$$

が成立するような $Z_1, Z_2 \in M_n(\boldsymbol{C})$, $U, V \in GL(n, \boldsymbol{C})$ が存在するものとして，U, V, Z_1, Z_2 を A, B, C, D, Z によって表わせ．

7　次の行列が正則であるとき，その逆行列を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & \sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (\theta \in \boldsymbol{R}).$

(2) $\begin{bmatrix} \alpha & a & b \\ 0 & \beta & c \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$　$(\in M_3(K))$.

(3) $\begin{bmatrix} A & -A \\ A & A \end{bmatrix}$　$(A \in M_n(K))$.

8　k を正の整数として，次の行列の k 乗を求めよ．また最小多項式を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} O_n & -I_n \\ I_n & O_n \end{bmatrix}$.　(2) $\begin{bmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha \end{bmatrix}$　$(\alpha \in K)$.

(3) $\begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$.　(4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_n & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$　$(a_i \in K)$.

9　次の線型写像の適当な底に関する行列を求めよ．

(1)　$V=\{f \in K[X] \mid \deg f \leqq n\}$，$\alpha \in K$ のとき

$$\tau_\alpha : V \ni f \longmapsto \tau_\alpha f \in V, \quad (\tau_\alpha f)(X) = f(X+\alpha).$$

(2)　$L : \boldsymbol{R}^{(5)}[X, Y] \ni f \longmapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial X^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial Y^2} \in \boldsymbol{R}^{(3)}[X, Y]$.（ただし $\boldsymbol{R}^{(p)}[X, Y]$ は実係数2変数の p 次同次多項式のつくる線型空間.）

(3)　$V=\{f \in \boldsymbol{R}[X] \mid \deg f \leqq n\}$ のとき

$$T : V \ni f \longmapsto Tf \in V, \quad (Tf)(X) = e^X \frac{d}{dX}(e^{-X} f(X)).$$

10　$\boldsymbol{R}$ 上の線型空間 $V=\{X \in M_n(\boldsymbol{R}) \mid \mathrm{tr}\, X=0\}$ 上で

$$B(X, Y) = \mathrm{tr}\,(XY)$$

は非退化な対称双1次形式であることを証明せよ．

11　次の微分方程式を解け．

(1)　$y''-y'-6y = 2$.

(2)　$y''+\lambda y' = 0$　($\lambda \neq 0$，実数).

(3)　$y^{(4)}+y^{(3)} = \cos x$.

(4)　$y^{(8)}+2y^{(6)}-2y''-y = 0$.

(5)　$\dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 6 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

12　多項式 $f(X)=X^n+\alpha_1 X^{n-1}+\cdots+\alpha_n \in \boldsymbol{R}[X]$ は $\boldsymbol{C}$ 上で

$$f(X) = (X-\lambda_1)^{m_1}(X-\lambda_2)^{m_2}\cdots(X-\lambda_t)^{m_t}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad (i \neq j)$$

と因数分解されるものとする．このとき適当な正則行列 $P \in M_n(\boldsymbol{C})$ をとれば

$$P^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -\alpha_n & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} J(\lambda_1, m_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_t, m_t) \end{bmatrix}$$

であることを示せ．ただし $J(\lambda, m) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \in M_m(\boldsymbol{C})$.

13　次の漸化式をみたす数列 $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ を求めよ．$(N=0, 1, 2, \cdots)$

(1)　$u_{N+2}-u_{N+1}-6u_N = 0$.

(2)　$u_{N+4}+u_{N+3} = 0$.

(3)　$u_{N+2}+\lambda u_{N+1} = 0$　($\lambda \neq 0$，実数).

(4)　$u_{N+4}-4u_{N+3}+3u_{N+2}+4u_{N+1}-4u_N = 0$.

14　$d \in \boldsymbol{Z}$ を平方因数をもたないものとし，体 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ の元 $\alpha=a+b\sqrt{d}$ $(a, b \in \boldsymbol{Q})$ に対して $\alpha^\sigma=a-b\sqrt{d}$ とおく．また $\mathfrak{o}=\{\alpha \in \boldsymbol{Q}(\sqrt{d}) \mid \alpha+\alpha^\sigma,\ \alpha\alpha^\sigma \in \boldsymbol{Z}\}$ とする．次のことを証明せよ．

(1)　$\alpha = a+b\sqrt{d} \in \mathfrak{o} \Leftrightarrow 2a, 2b \in \boldsymbol{Z},\ 4a^2 \equiv 4b^2d\ (4)$.

(2)　$d\equiv 2, 3\ (4)$ のとき $\mathfrak{o}=\{a+b\sqrt{d} \mid a, b \in \boldsymbol{Z}\}$，$d\equiv 1\ (4)$ のとき $\mathfrak{o}=\{(p+q\sqrt{d})/2 \mid p, q \in \boldsymbol{Z},\ p\equiv q\ (2)\}$ である．

(3)　$d\equiv 2, 3\ (4)$ のとき $\omega=\sqrt{d}$，$d\equiv 1\ (4)$ のとき $\omega=(1+\sqrt{d})/2$ とおく．$\boldsymbol{Q}$ 上の線型空間としての線型写像 $F: \boldsymbol{Q}(\sqrt{d}) \to \boldsymbol{Q}^2$ を $F(1)={}^t(1, 0)$，$F(\omega)={}^t(0, 1)$ によって定義すれば $F(\mathfrak{o})=\boldsymbol{Z}^2=\{(\xi_1, \xi_2) \mid \xi_1, \xi_2 \in \boldsymbol{Z}\}$ である．

(4)　ω を (3) で定めたものとする．$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \omega & \omega^\sigma \end{vmatrix}^2$ とおけば，$d\equiv 2, 3\ (4)$ のとき $D=4d$，$d\equiv 1\ (4)$ のとき $D=d$.

(5)　ω を (3) で定めたものとし，$\boldsymbol{Q}$ 上の線型空間 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ の底の変換 $(1, \omega) \to (\omega_1, \omega_2)$ の行列を $P \in GL(2, \boldsymbol{Q})$ とする．$G(\omega_1)={}^t(1, 0)$，$G(\omega_2)={}^t(0, 1)$ によって定義される線型写像 $G: \boldsymbol{Q}(\sqrt{d}) \to \boldsymbol{Q}^2$ により $G(\mathfrak{o})=\boldsymbol{Z}^2$ となるための必要十分条件は P の全成分が整数で $\det P=\pm 1$ となることである．

第3章　準同型定理

§3.1　線型写像と商空間

以下ではとくに断わらないかぎり線型空間は有限次元のものだけを考えることにする.

a）商空間の構成

体 K 上の線型空間 V に一つの部分空間 W を固定しておき, $x, y \in V$ が $x-y \in W$ をみたすとき $x \sim y$ とおけば, この関係 $\sim$ は V に一つの同値関係を定める. 実際, $x-x=o \in W$ により $x \sim x$ (反射律), $x \sim y$ ならば $y-x=-(x-y) \in W$ であるから $y \sim x$ (対称律), また $x \sim y$, $y \sim z$ ならば $x-z=(x-y)+(y-z) \in W$ により $x \sim z$ (推移律) が得られる. この同値関係 $\sim$ による V の商集合を以下 V/W で表わし, また V から V/W への射影を ϖ で表わすことにする. すなわち, $x \in V$ の ϖ による像 $\varpi(x)$ は同値関係 $\sim$ に関する x で代表される類である. 次の定理3.1で示されるように, V/W には自然に体 K 上の線型空間の構造が定義される. このようにして新しく構成した線型空間 V/W を V の W による**商空間**というのである.

定理 3.1　V, W, ϖ は上述のとおりとする. 商集合 V/W に加法, スカラー乗法を次のように定義すれば, V/W はまた K 上の線型空間である:

$$\varpi(x)+\varpi(y) = \varpi(x+y), \qquad \lambda\varpi(x) = \varpi(\lambda x).$$

このとき射影 $\varpi: V \ni x \mapsto \varpi(x) \in V/W$ は線型写像であり, $\mathrm{Ker}\,\varpi = W$. また

$$\dim(V/W) = \dim V - \dim W \tag{3.1}$$

が成立する.

証明　加法, スカラー乗法の定義が代表元 x, y のとり方によらないことが本質的である. $\varpi(x)=\varpi(x')$, $\varpi(y)=\varpi(y')$ としよう. このとき同値関係の定義により

$$x-x' \in W, \qquad y-y' \in W$$

であり, したがって

$$(x+y)-(x'+y') = (x-x')+(y-y') \in W,$$
$$\lambda x-\lambda x' = \lambda(x-x') \in W$$

であるから $\varpi(x+y)=\varpi(x'+y')$，$\varpi(\lambda x)=\varpi(\lambda x')$ が成立し，たしかに定義自体に問題はないことがわかる．これらの演算によって V/W が線型空間になることは V の演算に関する性質からの自然な帰結にすぎない．とくに V/W の零元は $\varpi(o)$ であり，また $-\varpi(x)=\varpi(-x)$ である．$\varpi: V\to V/W$ が線型写像であり，$\mathrm{Ker}\,\varpi=W$ であることも定義から明らかである．

そこで $\dim V=n$，$\dim W=r$ として $\dim(V/W)=n-r$ を証明しよう．$(u_1, \cdots, u_r)$ を W の底として，これを拡張した V の底 $(u_1, \cdots, u_r, u_{r+1}, \cdots, u_n)$ を考える（定理 2.4 参照）．このとき $(\varpi(u_{r+1}), \cdots, \varpi(u_n))$ が V/W の一つの底であることをいえばよい．$x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i u_i \in V$ とすれば $\varpi(u_i)=\varpi(o)=\bar{o}$ $(1\leqq i\leqq r)$ であるから

$$\varpi(x) = \sum_{i=r+1}^{n} \xi_i \varpi(u_i),$$

すなわち，V/W の任意の元 $\varpi(x)$ は $\varpi(u_{r+1}), \cdots, \varpi(u_n)$ の線型結合で表わされる．一方 $\sum_{i=r+1}^{n}\lambda_i\varpi(u_i)=\bar{o}$ とおけば，左辺は $\varpi\left(\sum_{i=r+1}^{n}\lambda_i u_i\right)$ に等しく，したがって $\sum_{i=r+1}^{n}\lambda_i u_i \in W$ でなければならない．$(u_1, \cdots, u_r)$ が W の底であることから

$$\sum_{i=r+1}^{n}\lambda_i u_i = \sum_{j=1}^{r}\mu_j u_j.$$

ところが $u_1, \cdots, u_r, u_{r+1}, \cdots, u_n$ は線型独立であるから，この等式が成立するのは $\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=\mu_1=\cdots=\mu_r=0$ のときに限る．したがって，$\varpi(u_{r+1}), \cdots, \varpi(u_n)$ は線型独立である．▌

例 3.1 $\bar{a}\in V/W$ に対して $a\in V$ を $\varpi(a)=\bar{a}$ のように一つ定めれば

$$\varpi^{-1}(\bar{a}) = a+W = \{a+w \mid w\in W\},$$

すなわち，a で代表される類は $a+W$ で表わされる．実際

$$\begin{aligned} b\in\varpi^{-1}(\bar{a}) &\Leftrightarrow a\sim b \\ &\Leftrightarrow a-b\in W \\ &\Leftrightarrow \exists w\in W:\ b=a+w \\ &\Leftrightarrow b\in a+W. \end{aligned}$$

——

b）線型写像の階数と退化次数

商空間は線型空間としては幾分人工的な感じがするにしても，はじめに与えられた線型空間の構造から自然に導入された演算によって定義されているために，計算上扱いやすいという性質をもっている．たとえば線型写像といういわば無形のものの性質を，定理3.2で述べるように，商空間という具象的なもので表現することができるのである．

定理3.2(**準同型定理**)　V, V' を同じ体 K 上の線型空間とし，$F: V\to V'$ を線型写像とする．このとき

$$\mathrm{Im}\, F \cong V/\mathrm{Ker}\, F.$$

とくに

$$\dim(\mathrm{Im}\, F) = \dim V - \dim(\mathrm{Ker}\, F). \tag{3.2}$$

証明　$\mathrm{Ker}\, F = W$ とおく．射影 $\varpi: V\to V/W$ によって，$\varpi(x)=\varpi(y)$ $(x, y\in V)$ であるものとすれば，$x-y\in W$ であるから $F(x-y)=o$，したがって $F(x)=F(y)$．ゆえに写像 $\varphi: V/W\ni\varpi(x)\mapsto F(x)\in \mathrm{Im}\, F$ を定義することができる．これは明らかに全射であるが，いまの議論を逆にたどって単射であることもわかる．すなわち φ は全単射である．

一方

$$\begin{aligned}\varphi(\varpi(x)+\varpi(y)) &= \varphi(\varpi(x+y)) = F(x+y)\\ &= F(x)+F(y) = \varphi(\varpi(x))+\varphi(\varpi(y)),\\ \varphi(\lambda\varpi(x)) &= \varphi(\varpi(\lambda x)) = F(\lambda x)\\ &= \lambda F(x) = \lambda\varphi(\varpi(x)).\end{aligned}$$

したがって φ は線型同型写像である．線型空間として同型であることと，次元が等しいこととは同値(補題2.6)であるから，(3.1)により(3.2)が得られる．▌

線型写像 $F: V\to V'$ に対して $\dim(\mathrm{Im}\, F)$ を F の**階数**(rank)といい，以下では $\mathrm{rk}\, F$ で表わす．V の一つの底を $(a_1, \cdots, a_n)$ とすれば，$\mathrm{Im}\, F$ は $S=\{F(a_1), \cdots, F(a_n)\}$ で生成される．したがって，$\mathrm{rk}\, F$ は S の極大線型独立系の元の個数に等しい(補題2.2, 2.3参照)．

また，$\dim(\mathrm{Ker}\, F)$ を F の**退化次数**(nullity)といい，以下では $\mathrm{nul}\, F$ で表わす．したがって

$$\mathrm{rk}\, F = \dim V - \mathrm{nul}\, F. \tag{3.2)'$$

例 3.2　V, V' をそれぞれ n 次元，m 次元の線型空間とする．線型写像 $F: V \to V'$ が全射であるためには，階数の定義により $\mathrm{rk}\,F=m$ であることが必要十分である．また定理3.2により，F が単射であるための必要十分条件は $\mathrm{nul}\,F=0$ であること，したがって $\mathrm{rk}\,F=n$ であることである．とくに $m=n$ ならば

$$F: \text{全射} \Leftrightarrow F: \text{単射} \Leftrightarrow \mathrm{rk}\,F = n. \qquad ——$$

例 3.3　実係数1変数多項式で n 次以下のもの全体のつくる $\boldsymbol{R}$ 上の $(n+1)$ 次元線型空間を V とし，$\alpha \in \boldsymbol{C}$ に対して写像 $T_\alpha: V \ni f \mapsto f(\alpha) \in \boldsymbol{C}$ を考える．$\boldsymbol{C}$ を $\boldsymbol{R}$ 上の2次元線型空間と考えれば T_α は $\boldsymbol{R}$ 上の線型写像であり，$V_\alpha = \mathrm{Ker}\,T_\alpha$ は α を零点とする多項式全体からなる．

$\alpha \notin \boldsymbol{R}$ のとき，$n \geqq 1$ ならば T_α は全射である．実際 $\alpha=a+b\sqrt{-1}$ $(a, b \in \boldsymbol{R},\ b \neq 0)$ とし，$p+q\sqrt{-1}$ $(p, q \in \boldsymbol{R})$ に対して $f(X)=(q/b)X+p-aq/b$ をとれば

$$T_\alpha f = f(\alpha) = p+q\sqrt{-1}.$$

したがってこのとき $\mathrm{rk}\,T_\alpha=2$，ゆえにまた(3.2)′により，$\dim V_\alpha = \mathrm{nul}\,T_\alpha = (n+1)-2=n-1$ が得られる．

$\alpha \in \boldsymbol{R}$ ならば $\mathrm{Im}\,T_\alpha = \boldsymbol{R}$ であり，したがって $\mathrm{rk}\,T_\alpha=1$, $\dim V_\alpha=(n+1)-1=n$ である．——

例 3.4　体 K 上の (m, n) 型行列

$$A = \begin{bmatrix} I_r & C \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix} \qquad (C \in M(r, n-r\,; K))$$

が定める線型写像 $F_A: K^n \to K^m$ の核を求めよう．$\boldsymbol{x}={}^t(x_1, \cdots, x_n)$ が $\mathrm{Ker}\,F_A$ の元であるとすれば

$$F_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \in K^m$$

であるから，C の列ベクトルを $\boldsymbol{c}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{c}_n \in K^r$ とすれば，すなわち $C=(\boldsymbol{c}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{c}_n)$ とすれば

$${}^t(x_1, \cdots, x_r) + \sum_{j=r+1}^{n} x_j \boldsymbol{c}_j = \boldsymbol{o} \in K^r$$

である．逆に，$x_{r+1}=\lambda_1, \cdots, x_n=\lambda_{n-r}$ を任意の K の元として $x_1, \cdots, x_r$ を ${}^t(x_1, \cdots, x_r) = -\sum_{j=1}^{n-r} \lambda_j \boldsymbol{c}_{r+j}$ によって定めれば

$$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \cdots, x_n) \in \mathrm{Ker}\,F_A$$

となる．そこで

$$\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{c}_{r+1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad\cdots,\quad\boldsymbol{u}_j=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{c}_{r+j}\\0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}_{(r+j},\quad\cdots,\quad\boldsymbol{u}_{n-r}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{c}_n\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

とおけば，$(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{n-r})$ は $\mathrm{Ker}\,F_A$ の一つの底である．すなわち

$$\boldsymbol{x}\in\mathrm{Ker}\,F_A\iff\exists\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-r}\in K:\ \boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^{n-r}\lambda_j\boldsymbol{u}_j.$$

ゆえにまた $\mathrm{nul}\,F_A=n-r$, $\mathrm{rk}\,F_A=r$ である．——

定理 3.3 V, V' を同じ体 K 上の線型空間とし，$\dim V=n$, $\dim V'=m$ とする．また $F: V\to V'$ を線型写像として $\mathrm{rk}\,F=r$ とする．このとき，V の底 $\mathfrak{A}$, V' の底 $\mathfrak{A}'$ を適当にとって，$\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ に関する F の行列が

$$\begin{bmatrix}I_r & O_{r,n-r}\\O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r}\end{bmatrix}$$

であるようにできる．

証明 $\dim(\mathrm{Ker}\,F)=n-r$ だから $\mathrm{Ker}\,F$ の底を $(u_{r+1},\cdots,u_n)$ として，これを V の底 $(u_1,\cdots,u_r,u_{r+1},\cdots,u_n)$ に拡張する．$\mathrm{Im}\,F$ は $u_1'=F(u_1),\cdots,u_r'=F(u_r)$ によって生成されているから，$\mathrm{rk}\,F=r$ であることにより $u_1',\cdots,u_r'$ は線型独立である．すなわち，$(u_1',\cdots,u_r')$ は $\mathrm{Im}\,F$ の一つの底である．これを拡張した V' の底を $(u_1',\cdots,u_r',u_{r+1}',\cdots,u_m')$ とすればよい．▮

定理2.7(続き)により，定理3.3は次のように言い換えることができる：

定理 3.3′ 体 K 上の (m,n) 型行列 A に対して正則行列 $P\in M_m(K)$ および $Q\in M_n(K)$ を適当にとって

$$PAQ=\begin{bmatrix}I_r & O_{r,n-r}\\O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r}\end{bmatrix}$$

とできる．このとき r は線型写像 $F_A: K^n\to K^m$ の階数に等しく，したがって P, Q のとり方には無関係に A だけで定まる．——

定理3.3′の r を行列 $A\in M(m,n;K)$ の**階数**といい，やはり $\mathrm{rk}\,A$ で表わすことにする．すなわち

$$\mathrm{rk}\,A=\mathrm{rk}\,F_A. \tag{3.3}$$

例 3.5　$A=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \in M(m, n; K)$ の階数は列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n \in K^n$ の極大線型独立系の元の個数に等しい．それは線型写像 $F_A: K^n \to K^m$ の像が K^n の標準底 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ の像 $F_A(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{a}_1, \cdots, F_A(\boldsymbol{e}_n)=\boldsymbol{a}_n$ で生成されているからである．とくに§2.4, 例2.62により

$$A \in M_n(K) \text{ が正則} \Leftrightarrow \operatorname{rk} A = n. \qquad ——$$

例 3.6　$\boldsymbol{R}$ 上の (4, 5) 型行列

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

については，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ が線型独立であり，$\boldsymbol{a}_3=2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_5=2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_4$ であるから，$\operatorname{rk} A=3$ である．そこで $\boldsymbol{R}^5$ の標準底を $\mathfrak{A}=(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_5)$，$\boldsymbol{R}^4$ の標準底を $\mathfrak{A}'=(\boldsymbol{e}_1', \cdots, \boldsymbol{e}_4')$ で表わし，底の変換 $P_1: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_1=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_5)$，$Q_1: \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}_1'=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{c})$ ($\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^4$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{c}$ が線型独立であるように任意にとる) を行なえば，$F_A(\boldsymbol{e}_j)=\boldsymbol{a}_j$ $(1 \leqq j \leqq 5)$ であるから，線型写像 $F_A: \boldsymbol{R}^5 \to \boldsymbol{R}^4$ の底 $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ に関する行列は定理2.7(続き)により

$$A_1 = Q_1^{-1} A P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

で与えられる．これは例3.4で考えた型の行列であり，$\operatorname{rk} A_1=\operatorname{rk} A=3$ である．A のかわりに A_1 を考えれば，$F_{A_1}: \boldsymbol{x} \mapsto A_1\boldsymbol{x}$ の核の底として，例3.4でみたとおり

$$\boldsymbol{u}_4 = {}^t(-2, -1, 0, 1, 0), \qquad \boldsymbol{u}_5 = {}^t(-2, -1, -2, 0, 1)$$

をとることができる．$\boldsymbol{R}^5$ の底として $\mathfrak{A}_2=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{u}_4, \boldsymbol{u}_5)$ をとり，底の変換 $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_2$ の行列を P_2 とすれば $A_1P_2(=Q_1^{-1}AP_1P_2)$ が定理3.3′で与えられた型のものになるわけである．——

問　例3.6の P_1, P_2, Q_1 を求めよ．——

例 3.7　$A \in M(m, n; K)$，$P \in M_m(K)$，$Q \in M_n(K)$ とし，P, Q は正則である

ものとする．このとき

$$\text{(3.4)} \qquad \mathrm{rk}(PAQ) = \mathrm{rk}(PA) = \mathrm{rk}(AQ) = \mathrm{rk}\,A.$$

これは定理2.7(続き)と定理3.3′とから明らかである．

また $A \in M(l, m; K)$，$B \in M(m, n; K)$ とすれば

$$\text{(3.5)} \qquad \mathrm{rk}\,A + \mathrm{rk}\,B - m \leqq \mathrm{rk}(AB) \leqq \mathrm{rk}\,A,\ \mathrm{rk}\,B.$$

実際

$$\mathrm{rk}(AB) = \dim(\mathrm{Im}(F_A \circ F_B)) \leqq \dim(\mathrm{Im}\,F_A),\ \dim(\mathrm{Im}\,F_B)$$

によって右側の不等式は明らかである．左側の不等式は

$$\mathrm{rk}(AB) = \dim(F_A(\mathrm{Im}\,F_B)) = \dim(\mathrm{Im}\,F_B) - \dim(\mathrm{Ker}\,F_A \cap \mathrm{Im}\,F_B)$$
$$\geqq \mathrm{rk}\,F_B - \mathrm{nul}\,F_A = \mathrm{rk}\,B - (\dim K^m - \mathrm{rk}\,A)$$

によって証明できる．

$$A \in M_n(K) \text{ が正則} \iff \exists X \in M_n(K) : AX = I_n \qquad (XA = I_n)$$

を証明しよう．$\Longrightarrow$ は明らか．$\Longleftarrow$ を示す．$AX = I_n$ のとき

$$n = \mathrm{rk}\,I_n = \mathrm{rk}(AX) \leqq \mathrm{rk}\,A \qquad ((3.5)\text{ による}).$$

本来 $\mathrm{rk}\,A \leqq n$ だから $\mathrm{rk}\,A = n$ (例3.5参照)．——

c) 部分空間の双対性

V を体 K 上の線型空間とし，V^* をその双対空間とする．V の部分空間 W に対して V^* の部分空間

$$W^\wedge = \{f \in V^* \mid f(v) = 0 (\forall v \in W)\}$$

を W の零化空間(annihilator)という．一般に $V^* \ni f : V \to K$ を W に制限して $f|W \in W^*$ が得られる．逆に，任意の $g \in W^*$ は，たとえば W の底 $(u_1, \cdots, u_r)$ を拡張した V の底 $(u_1, \cdots, u_r, u_{r+1}, \cdots, u_n)$ をとり，$\tilde{g}(u_i) = o$ $(r+1 \leqq i \leqq n)$，$\tilde{g}|W = g$ とおくことにより $\tilde{g} \in V^*$ に拡張できる．ゆえに

$$r_W:\ V^* \ni f \longmapsto f|W \in W^*$$

は線型全射であり，W の零化空間 $W^\wedge$ とはこの r_W の核のことに他ならない：$W^\wedge = \mathrm{Ker}\,r_W$．したがって定理3.2により

$$\text{(3.6)} \qquad W^* \cong V^*/W^\wedge, \qquad \dim W^\wedge = n - \dim W.$$

具体的には，上記のように V の底をとり，その双対底 $(f_1, \cdots, f_r, f_{r+1}, \cdots, f_n)$ $(f_i(u_j) = \delta_{ij})$ を考えれば，$f_{r+1}, \cdots, f_n$ で生成される V^* の部分空間として $W^\wedge$ が得られるのである．

定理2.8によって V を V^* の双対空間 V^{**} と同一視すれば，$W^\wedge$ の零化空間 $(W^\wedge)^\wedge=W^{\wedge\wedge}$ が V の部分空間として定義できる．このとき明らかに $W\subset W^{\wedge\wedge}$ であるが，次元の関係(3.6)を用いれば

(3.7)
$$W^{\wedge\wedge}=W.$$

したがって V の部分空間全体と V^* の部分空間全体との間に，零化空間をとるという操作によって1対1の対応がつけられる．このとき

$$W_1\subset W_2 \Longrightarrow W_1{}^\wedge \supset W_2{}^\wedge.$$

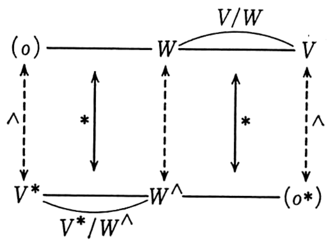


図3.1

(3.6)において W を $W^\wedge$ に，V を V^* にそれぞれおきかえて両辺の双対空間を考えれば，$V^{**}=V$, $W^{\wedge\wedge}=W$ に注意して

(3.6)′
$$W^\wedge \cong (V/W)^*$$

が得られる．

V, V' を同じ体上の線型空間，$F: V\to V'$ を線型写像，その双対写像を ${}^tF: V'^*\to V^*$ とする．このとき任意の部分空間 $W\subset V$, $W'\subset V'$ に対して

(3.8)
$$F(W)^\wedge=({}^tF)^{-1}(W^\wedge),\qquad (F^{-1}(W'))^\wedge={}^tF(W'^\wedge).$$

[証明]
$$F(W)^\wedge=\{f'\in V'^*\mid f'(F(v))=0\ (\forall v\in W)\},$$
$$({}^tF)^{-1}(W^\wedge)=\{f'\in V'^*\mid {}^tF(f')\in W^\wedge\}$$

であるから，${}^tF$ の定義により第1の式は明らかである．第2の式は第1の式において $W=F^{-1}(W')$ とおき，両辺の ${}^tF$ による像をとれば得られる．▌

(3.8)において，とくに $W=V$, $W'=(o)$ とおけば

(3.9)
$$(\mathrm{Im}\,F)^\wedge=\mathrm{Ker}\,{}^tF,\qquad (\mathrm{Ker}\,F)^\wedge=\mathrm{Im}\,{}^tF$$

であり，したがってまた $\dim(\mathrm{Im}\,{}^tF)=n-\dim(\mathrm{Ker}\,F)=\dim(\mathrm{Im}\,F)$ により

(3.10)
$$\mathrm{rk}\,{}^tF=\mathrm{rk}\,F.$$

ただし(3.10)は定理3.3の行列の転置行列を考えればすでに明らかではある．

例 3.8 $V=M_n(\boldsymbol{R})$, $W=\{X\in V \mid \mathrm{tr}\,X=0\}$ とする．$\mathrm{tr}: V\to\boldsymbol{R}$ は線型全射であるからその階数は1であり，したがって $\dim W=n^2-1$，ゆえに $\dim W^\wedge=1$ である．つまり $\sigma\in V^*$ で W 上0になるものは tr のスカラー倍で表わされるものだけである：

$$\sigma\in W^\wedge \iff \sigma(X)=c\,\mathrm{tr}\,X \qquad (c\in\boldsymbol{R}).$$

一方，§2.3, d) で述べたとおり，任意の $\sigma\in V^*$ は $A\in M_n(\boldsymbol{R})$ を適当にとって $\sigma(X)=\mathrm{tr}(AX)$ で表わすことができる．この A は一意的であり，とくに $\sigma\in W^\wedge \iff A=cI_n\ (c\in\boldsymbol{R})$ であることがわかる．ところで任意の $A\in M_n(\boldsymbol{R})$ は

$$A=cI_n+A_0 \qquad (c\in\boldsymbol{R},\ \mathrm{tr}\,A_0=0)$$

と一意的に分解できる．実際，$c=\mathrm{tr}\,A$, $A_0=A-cI_n$ とおけばよく，$cI_n+A_0=c'I_n+A_0'$ ($c'\in\boldsymbol{R}$, $\mathrm{tr}\,A_0'=0$) ならば，$(c-c')I_n=A_0'-A_0$ の両辺のトレースをとって $c=c'$, $A_0'=A_0$ が得られる．これらのことから $W^*\cong V^*/W^\wedge$ の元 σ_0 は，$A_0\in W$ によって一意的に $\sigma_0(X)=\mathrm{tr}(A_0X)$ で表わされることがわかる．これは W 上の対称双1次形式

$$B(X,Y)=\mathrm{tr}(XY) \qquad (X,Y\in W)$$

が非退化であるということに他ならない(§2.4, 例2.75参照)．——

例 3.9 同様の例であるが，今度は

$$V=M_{2n}(\boldsymbol{R}), \qquad W=\{X\in V \mid {}^tXJ+JX=O\}, \qquad J=\begin{bmatrix} O_n & -I_n \\ I_n & O_n \end{bmatrix}$$

としよう．$X=\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$ ($X_i\in M_n(\boldsymbol{R})$) とすれば

$${}^tXJ+JX=O \iff X_4=-{}^tX_1, \quad {}^tX_2=X_2, \quad {}^tX_3=X_3.$$

したがって $\dim W=n^2+2\times(1/2)n(n+1)=n(2n+1)$, $\dim W^\wedge=\dim V-\dim W=n(2n-1)$ である．任意の $A\in M_{2n}(\boldsymbol{R})$ が

$$A=C+D \qquad \left(C\in W,\ D=\begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & {}^tD_1 \end{bmatrix},\ \begin{cases} D_i\in M_n(\boldsymbol{R}), \\ {}^tD_2=-D_2,\ {}^tD_3=-D_3 \end{cases}\right)$$

の形に一意的に分解できることに注意しよう．実際

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \iff C=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} A_1-{}^tA_4 & A_2+{}^tA_2 \\ A_3+{}^tA_3 & A_4-{}^tA_1 \end{bmatrix},$$

$$D=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} A_1+{}^tA_4 & A_2-{}^tA_2 \\ A_3-{}^tA_3 & {}^tA_1+A_4 \end{bmatrix}$$

である．そこでこのような D の型の行列全体を W' で表わせば，W' は $n(2n-1)$ 次元の部分空間である．任意の $\sigma \in V^*$ は $\sigma(X)=\mathrm{tr}(AX)\ (A \in M_{2n}(\boldsymbol{R}))$ で表わされるが，とくに $A \in W'$ ならば $\sigma \in W^\wedge$ である．実際

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & {}^tA_1 \end{bmatrix} \in W', \qquad X=\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & -{}^tX_1 \end{bmatrix} \in W$$

とすれば $\mathrm{tr}(AX)=\mathrm{tr}(A_1X_1+A_2X_3)+\mathrm{tr}(A_3X_2-{}^tA_1{}^tX_1)$ であるが，A_2, A_3 は交代行列，X_2, X_3 は対称行列であるから

$$\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(A_2X_3)+\mathrm{tr}(A_3X_2) = 0.$$

一方，対応

$$V = M_{2n}(\boldsymbol{R}) \ni A \longmapsto \sigma \in V^*, \qquad \sigma(X) = \mathrm{tr}(AX)$$

は線型全単射である．(線型であることは明らかである．行列単位 E_{ji} における値 $\sigma(E_{ji})=a_{ij}$ が A の (i,j) 成分を与えることから単射であることがわかり，$\dim V=\dim V^*$ により全単射である．) したがって $\dim W^\wedge=\dim W'$ に注意すれば，任意の $\sigma \in W^\wedge$ に対して $\sigma(X)=\mathrm{tr}(DX)$ であるような $D \in W'$ が一意的に定まるわけである．このことからさらに，$W^* \cong V^*/W^\wedge$ の元は

$$\sigma(X) = \mathrm{tr}(CX) \qquad (C \in W)$$

のように一意的に表わされることがわかる．いいかえれば，W 上の対称双1次形式 $B(X, Y)=\mathrm{tr}(XY)$ は非退化である．——

§3.2　直和分解

a）直和と直和分解

線型空間 V の有限個の部分空間 $W_1, W_2, \cdots, W_t$ が与えられたものとする．このとき，共通部分 $\bigcap_{i=1}^{t} W_i$ は必ず V の部分空間であるのに対し，合併集合 $\bigcup_{i=1}^{t} W_i$ は一般には V の部分空間ではない(§2.2，例2.24参照)．

一般に V の部分集合 $S\ (\neq \phi)$ に対して，S の有限個の元の線型結合として表わされる V の元全体 $\langle S \rangle$ は，V の部分空間であり，S で**生成された**部分空間とよばれる．V の部分空間 W が S を部分集合として含むならば，W はまた $\langle S \rangle$ を含むわけであり，この意味で $\langle S \rangle$ は S を含む最小の部分空間である．部分空間の合併集合 $\bigcup_{i=1}^{t} W_i$ で生成された部分空間 $\left\langle \bigcup_{i=1}^{t} W_i \right\rangle$ を $W_1, \cdots, W_t$ の**和空間**という．これはまた

$$\sum_{i=1}^{t} W_i = W_1+\cdots+W_t = \left\{\sum_{i=1}^{t} x_i \mid x_i \in W_i\right\}$$

とも一致することが容易に証明できる.

問 $\sum_{i=1}^{t} W_i = \left\langle \bigcup_{i=1}^{t} W_i \right\rangle$ を証明せよ. ——

例 3.10 W_1, W_2 を V の部分空間とすれば, 零化空間について

(3.11) $$(W_1+W_2)^\wedge = W_1{}^\wedge \cap W_2{}^\wedge$$

が成立する. 実際, $f\in V^*$ が $f\in W_1{}^\wedge \cap W_2{}^\wedge$ ならば, 任意の $x_1\in W_1$, $x_2\in W_2$ に対して

$$f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2) = 0$$

であるから, $f\in (W_1+W_2)^\wedge$. 一方 $W_1, W_2 \subset W_1+W_2$ であるから, $(W_1+W_2)^\wedge \subset W_1{}^\wedge \cap W_2{}^\wedge$ は明らかである.

(3.11) において W_1, W_2 をそれぞれ $W_1{}^\wedge, W_2{}^\wedge$ でおきかえて (3.7) を用いれば

(3.12) $$(W_1\cap W_2)^\wedge = W_1{}^\wedge + W_2{}^\wedge$$

が得られる. ——

次に $V_1, V_2, \cdots, V_t$ を同じ体 K 上の有限個の線型空間とする. このとき直積集合 $V_1\times\cdots\times V_t$ に次のように加法とスカラー乗法を定義して, K 上の線型空間と考えることができる:

加法: $(x_1, \cdots, x_t)+(y_1, \cdots, y_t) = (x_1+y_1, \cdots, x_t+y_t)$,

スカラー乗法: $\lambda(x_1, \cdots, x_t) = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_t)$.

(ただし, $x_i, y_i \in V_i\,(1\leqq i\leqq t)$, $\lambda\in K$.) たとえば, 零元は $o=(o_1, \cdots, o_t)$ (o_i は V_i の零元) であり, $-(x_1, \cdots, x_t)=(-x_1, \cdots, -x_t)$ である.

直積集合 $V_1\times\cdots\times V_t$ にこのようにして線型空間の構造を考えたものを以下では $V_1\oplus\cdots\oplus V_t$ で表わし, $V_1, \cdots, V_t$ の**直和**という.

とくに $\dim V_i=n_i$ とすれば

(3.13) $$\dim(V_1\oplus\cdots\oplus V_t) = \sum_{i=1}^{t}\dim V_i = \sum_{i=1}^{t} n_i$$

である. 実際 $V_i\,(1\leqq i\leqq t)$ の一つの底を $(u_i{}^{(1)}, \cdots, u_i{}^{(n_i)})$ とすれば, $V_1\oplus\cdots\oplus V_t$ の底として

$$(o_1, \cdots, u_i{}^{(\nu_i)}, \cdots, o_t) \qquad (1\leqq \nu_i\leqq n_i,\ 1\leqq i\leqq t)$$

からなるものがとれる.

ところで線型写像

$$\varphi_i:\ V_i \ni x_i \longmapsto (o_1, \cdots, \overset{i}{\smile}{x_i}, \cdots, o_t) \in V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$$

は，$\varphi_i^{-1}(o) = o_i$ により単射であり，したがって

$$V_i \cong \varphi_i(V_i) \subset V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$$

である．しかも明らかに

$$\sum_{i=1}^{t} \varphi_i(V_i) = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t.$$

つまり φ_i によって V_i を $V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$ の部分空間 $\varphi_i(V_i)$ と同一視すれば，直和 $V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$ は和空間 $\sum_{i=1}^{t} V_i$ として表わされるわけであり，とくに (3.13) により

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{t} V_i\right) = \sum_{i=1}^{t} \dim V_i.$$

それでは前に戻って，有限次元の線型空間 V の部分空間 $W_1, \cdots, W_t$ の和空間 $\sum_{i=1}^{t} W_i$ の次元は $\dim W_1, \cdots, \dim W_t$ の和に等しいであろうか．実は一般にはそうはならないのである．

例 3.11 簡単のためにまず $t=2$ の場合を考える．このとき

(3.14) $$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

が成り立つことを証明しよう．W_1, W_2 をそれぞれ独立に線型空間と考えて直和 $W_1 \oplus W_2$ をつくり，

$$F:\ W_1 \oplus W_2 \ni (x_1, x_2) \longmapsto x_1 + x_2 \in W_1 + W_2$$

とする．このとき

$$\begin{aligned} F((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) &= F((x_1+y_1, x_2+y_2)) = (x_1+y_1) + (x_2+y_2) \\ &= F((x_1, x_2)) + F((y_1, y_2)), \end{aligned}$$

$$F(\lambda(x_1, x_2)) = F((\lambda x_1, \lambda x_2)) = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda F((x_1, x_2))$$

により，F は線型写像である．さらに F が全射であることは明らかである．したがって定理 3.2 により

$$W_1 + W_2 \cong W_1 \oplus W_2 / \mathrm{Ker}\, F$$

であるが，一方

$$(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}\, F \iff x_1 + x_2 = o \iff x_2 = -x_1 \in W_1 \cap W_2$$

であるから，$\mathrm{Ker}\, F = \{(x, -x) \mid x \in W_1 \cap W_2\}$．対応

$$W_1 \cap W_2 \ni x \longleftrightarrow (x, -x) \in \operatorname{Ker} F$$

によって Ker F と $W_1 \cap W_2$ とは同型であるから

$$\begin{aligned}\dim(W_1 + W_2) &= \dim(W_1 \oplus W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)\\ &= \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).\end{aligned}$$

以上の証明により，とくに

$$W_1 + W_2 \cong W_1 \oplus W_2 \iff W_1 \cap W_2 = \{o\}.$$

(3.14) はまた概略次のように証明することもできる．$W_1 \cap W_2$ の一つの底を $(w_1, \cdots, w_r)$ とし，これを拡張した W_1, W_2 の底をそれぞれ $(w_1, \cdots, w_r, u_1, \cdots, u_p)$，$(w_1, \cdots, w_r, v_1, \cdots, v_q)$ とすれば，$w_1, \cdots, w_r, u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_q$ は線型独立であり，したがって $W_1 + W_2$ の底をなす．

$$r + p + q = (r + p) + (r + q) - r$$

によって (3.14) が得られる．——

さて，一般に次の定理を証明しよう．

定理 3.4 有限次元線型空間の有限個の部分空間を $W_1, \cdots, W_t$ とし，$W = \sum_{i=1}^{t} W_i$ とおけば，一般に

$$\dim W \leqq \sum_{i=1}^{t} \dim W_i$$

である．このとき次の 6 条件はたがいに同値である：

(1) $\dim W = \sum_{i=1}^{t} \dim W_i$.

(2) $W \cong W_1 \oplus \cdots \oplus W_t$.

(3) $\sum_{i=1}^{t} x_i = o \ (x_i \in W_i) \Longrightarrow x_i = o \ (1 \leqq i \leqq t)$.

(4) $W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_t) = \{o\} \quad (1 \leqq i \leqq t)$.

(5) $(W_1 + \cdots + W_i) \cap W_{i+1} = \{o\} \quad (1 \leqq i \leqq t-1)$.

(6) 任意の $x \in W$ に対して $x = \sum_{i=1}^{t} x_i$ となる $x_i \in W_i$ $(1 \leqq i \leqq t)$ は一意的に定まる．

証明 例 3.11 と同様に

$$F : W_1 \oplus \cdots \oplus W_t \ni (x_1, \cdots, x_t) \longmapsto \sum_{i=1}^{t} x_i \in W$$

が線型全射であることは容易に証明できる．したがって

$$W \cong (W_1 \oplus \cdots \oplus W_t)/\mathrm{Ker}\, F$$

であり，とくに

$$\dim W = \dim(W_1 \oplus \cdots \oplus W_t) - \dim(\mathrm{Ker}\, F) \leqq \sum_{i=1}^{t} \dim W_i$$

である．ここで

$$\mathrm{Ker}\, F = \left\{(x_1, \cdots, x_t) \mid x_i \in W_i,\ \sum_{i=1}^{t} x_i = o\right\}$$

であることに注意すれば，

$$\dim W = \sum_{i=1}^{t} \dim W_i \iff W \cong W_1 \oplus \cdots \oplus W_t \iff \mathrm{Ker}\, F = \{(o, \cdots, o)\}$$

であり，(1) ⟺ (2) ⟺ (3) がわかる．

(3) ⟹ (4)：$x \in W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_t)$ とすれば $x = \sum_{\nu \neq i} x_\nu$, $x_\nu \in W_\nu$ とかけるから，$x = -x_i \in W_i$ とおけば $\sum_{\nu=1}^{t} x_\nu = o$．したがって (3) により $x_\nu = o\ (1 \leqq \nu \leqq t)$，とくに $x = o$ である．

(4) ⟹ (5)：$W_1 + \cdots + W_i \subset W_1 + \cdots + W_i + W_{i+2} + \cdots + W_t$ だからこれは明らかである．

(5) ⟹ (3)：$x_i \in W_i$, $\sum_{i=1}^{t} x_i = o$ とおく．これを $\sum_{i=1}^{t-1} x_i = -x_t$ とかきかえれば，

$$(\text{左辺}) \in W_1 + \cdots + W_{t-1}, \qquad (\text{右辺}) \in W_t$$

だから (5) により $x_t = o$, $\sum_{i=1}^{t-1} x_i = o$ となる．同様の議論を $\sum_{i=1}^{t-1} x_i = o$ について行なえば $x_{t-1} = -\sum_{i=1}^{t-2} x_i = o$．以下くり返して $x_t = x_{t-1} = \cdots = x_1 = o$ が得られる．

(3) ⟺ (6)：(6) ⟹ (3) は明らかであるから (3) ⟹ (6) をいえばよい．$x \in W$ が $x = \sum_{i=1}^{t} x_i = \sum_{i=1}^{t} x_i'$ $(x_i, x_i' \in W_i)$ のように2通りに表わせたとする．$\sum_{i=1}^{t}(x_i - x_i') = o$ であるから，(3) により $W_i \ni x_i - x_i' = o$，したがって $x_i = x_i'$ $(1 \leqq i \leqq t)$ でなければならない．▌

部分空間 $W_1, \cdots, W_t$ の和空間 $W = \sum_{i=1}^{t} W_i$ が定理3.4のたがいに同値な条件 (1)～(6) の一つをみたしているとき，W は $W_1, \cdots, W_t$ の直和である，あるいは'直和に分解されている'といい，以下ではこのとき

(3.15) $$W = W_1 \dot{+} \cdots \dot{+} W_t$$

で表わすことにする．また各 W_i をこの直和分解に関する**直和因子**という．$x \in$

W を直和分解(3.15)に従って $x=\sum_{i=1}^{t} x_i\ (x_i\in W_i)$ と一意的に表わしたとき，x_i を直和分解(3.15)に関する x の W_i **成分**という．

例 3.12 線型空間 V が二つの部分空間 W, W' の直和であるとき，商空間 V/W は W' と同型である：

$$V = W\dotplus W' \implies V/W \cong W'.$$

単に線型空間として同型であることだけならば，両辺の次元を比較すれば明らかである．しかしこの場合，さらに対応が**自然な**同型写像で与えられることに注意しよう．任意の $x\in V$ は $x=x_0+x_1\ (x_0\in W,\ x_1\in W')$ と一意的に分解できるが，類 $\varpi(x)=\varpi(x_1)\in V/W$ を x の W' 成分 x_1 に対応させる写像が同型写像 $V/W\to W'$ を与えているのである．

逆に任意の商空間 V/W に対して V の部分空間 W' で V/W に同型なものをとり，$V=W\dotplus W'$ とすることができる．実際それは W の一つの底$(u_1, \cdots, u_r)$を拡張して V の底$(u_1, \cdots, u_r, u_{r+1}, \cdots, u_n)$をつくることと同じであり，$\{u_{r+1}, \cdots, u_n\}$ で生成される V の部分空間を W' とすればよい．ただし，このつくり方からもわかるように，W に対して $V=W\dotplus W'$ となる W' が一意的に定まるというわけではない．たとえば $(u_1, \cdots, u_r, u_{r+1}, \cdots, u_n)$ が V の底であれば $(u_1, \cdots, u_r, u_1+u_{r+1}, u_{r+2}, \cdots, u_n)$ も V の底であるが，$\{u_1+u_{r+1}, u_{r+2}, \cdots, u_n\}$ で生成される部分空間はすでに上で作った W' とは異なるのである．——

例 3.13 $\boldsymbol{R}^4$ の中で

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\3\\-3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\-5\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4=\begin{bmatrix}-1\\2\\-2\\-1\end{bmatrix}$$

$$W_1=\langle\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}\rangle,\qquad W_2=\langle\{\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}\rangle$$

とする．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は線型独立だから $\dim W_1=2$，同様に $\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ も線型独立だから $\dim W_2=2$ である．一方，$W_1+W_2=\langle\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}\rangle$ については，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は線型独立，$\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$ であるから $\dim(W_1+W_2)=3$．したがって(3.14)により

$$\begin{aligned}\dim(W_1\cap W_2) &= \dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1+W_2)\\ &=1.\end{aligned}$$

——

例 3.14 実係数2変数 p 次同次多項式のつくる $\boldsymbol{R}$ 上の線型空間 $\boldsymbol{R}^{(p)}[X, Y]$

を以下簡単に V_p で表わす．各 $p\,(\geqq 2)$ について，Laplace 作用素 $\triangle=\partial^2/\partial X^2+\partial^2/\partial Y^2$ は V_p から V_{p-2} への線型写像を定めるが，この核 $\mathrm{Ker}(\triangle|V_p)=H_p$ の元を p 次同次調和多項式というのであった(§2.2，例2.37)．ここでは任意の $f\in V_p$ が

$$f=h+(X^2+Y^2)g \qquad (h\in H_p,\ g\in V_{p-2})$$

の形に一意的に表わされることを示す．

$S_p=\{(X^2+Y^2)g\mid g\in V_{p-2}\}$ とおけば，これは明らかに V_p の部分空間であるから，$V_p=H_p\dot{+}S_p$ を証明すればよい．V_p の底として，たとえば $\mathfrak{A}_p=(X^p, X^{p-1}Y,\cdots,XY^{p-1},Y^p)$ をとれば，$\triangle: V_p\to V_{p-2}$ の底 $\mathfrak{A}_p,\mathfrak{A}_{p-2}$ に関する行列の最初の $(p-1)$ 列が線型独立であることから

$$\mathrm{rk}(\triangle\mid V_p)=p-1,\qquad \dim H_p=(p+1)-(p-1)=2.$$

一方，$V_{p-2}\ni g\mapsto (X^2+Y^2)g\in S_p$ は線型全単射だから $\dim S_p=\dim V_{p-2}=p-1$ である．したがって $H_p\cap S_p=\{0\}$ を証明すればよいのである．そのためには $f_i=(X^2+Y^2)X^{p-2-i}Y^i\ (0\leqq i\leqq p-2)$ とおけば $(f_0,f_1,\cdots,f_{p-2})$ が S_p の底であることに注意して $\triangle f_i\neq 0\ (0\leqq i\leqq p-2)$ をいえば十分であり，それほど複雑な計算を必要とするわけではない．しかしここではまず

$$(*)\qquad \triangle((X^2+Y^2)^k g)=4k(k+l)(X^2+Y^2)^{k-1}g+(X^2+Y^2)^k\triangle g$$

が任意の正の整数 k および任意の $g\in V_l\ (l\geqq 0)$ について成立することに注意しよう．実際，簡単な計算により

$$\triangle((X^2+Y^2)^k g)=4k^2(X^2+Y^2)^{k-1}g$$
$$+4k(X^2+Y^2)^{k-1}\left(X\frac{\partial g}{\partial X}+Y\frac{\partial g}{\partial Y}\right)+(X^2+Y^2)^k\triangle g.$$

ところが g は l 次同次多項式だから，任意の実数 t に対し $g(tX,tY)=t^l g(X,Y)$ であり，この両辺を t で微分して $t=1$ とおけば $X(\partial g/\partial X)+Y(\partial g/\partial Y)=lg$ となり $(*)$ がいえる．

さて $f\in H_p\cap S_p$, $f\neq 0$ とすれば，まず $f\in S_p$ であることにより，$(X^2+Y^2)^k|f$, $(X^2+Y^2)^{k+1}\nmid f$ であるような正の整数 k が定まり，$f=(X^2+Y^2)^k g$, $g\in V_{p-2k}$ と表わすことができる．そこで $(*)$ を用いれば，$f\in H_p$ だから

$$4k(p-k)(X^2+Y^2)^{k-1}g+(X^2+Y^2)^k\triangle g=0$$

となる．したがって $g\neq 0$ により $\triangle g\neq 0$ であり，$(X^2+Y^2)|g$ でなければならな

い．これは $(X^2+Y^2)^{k+1}\nmid f$ に矛盾する．以上によって $H_p\cap S_p=\{0\}$，したがって $V_p=H_p\dot{+}S_p$ となることがわかった．

ここでは簡単のために2変数の場合について説明したが，同様の議論は $V_p=\boldsymbol{R}^{(p)}[X_1,\cdots,X_n]$ でも可能であり，任意の $f\in V_p$ は $f=h+\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)g$ $(h\in H_p,\ g\in V_{p-2})$ と一意的に表わされる．——

b）不変部分空間

線型空間 V の部分空間 W が線型変換 $T: V\to V$ によって不変である，あるいは T 不変であるとは，$TW\subset W$ となることであり，このとき W を T の**不変部分空間**というのである．また $G\subset L(V,V)$ のとき，任意の $T\in G$ に対して W が T 不変ならば，W は G 不変であるという．

W が T の不変部分空間であるとき，$\varpi: V\to V/W$ を自然射影とすれば

$$\begin{aligned}\varpi(x)=\varpi(y) &\Longleftrightarrow x-y\in W\\ &\Longrightarrow T(x-y)\in W\\ &\Longrightarrow \varpi(Tx)-\varpi(Ty)=\varpi(T(x-y))=\bar{o}\in V/W\end{aligned}$$

であるから，$\bar{T}: V/W\to V/W$ を $\bar{T}(\varpi(x))=\varpi(Tx)$ によって定義することができる：

$$\bar{T}\circ\varpi=\varpi\circ T. \tag{3.16}$$

ϖ, T の線型性により $\bar{T}$ は V/W 上の線型変換である．この $\bar{T}$ を T から**導入された** V/W 上の線型変換という．

一般に V の任意の部分空間 W に対して $V=W\dot{+}W'$，したがって $V/W\cong W'$ となる部分空間 W' をとることができることは例3.12で述べたとおりである．これは V/W から V の中への線型写像 $\sigma: V/W\to V$ で

$$\varpi\circ\sigma=I_{V/W}\qquad (V/W\ \text{上の恒等変換}) \tag{3.17}$$

となるものが存在するということに他ならない．実際，$W=\{o\}$ または V のときは明らかだから，そうではないものとして，W' が上のように与えられたとき，$(u_1,\cdots,u_r)$ を W の底，$(u_{r+1},\cdots,u_n)$ を W' の底とすれば，$\bar{u}_{r+1}=\varpi(u_{r+1}),\cdots,\bar{u}_n=\varpi(u_n)$ は V/W の底をなす．したがって $\sigma(\bar{u}_j)=u_j$ $(r+1\leqq j\leqq n)$ によって線型写像 $\sigma: V/W\to V$ が定義されるが，これは明らかに(3.17)をみたし，$W'=\operatorname{Im}\sigma$ である．逆に線型写像 $\sigma: V/W\to V$ が(3.17)をみたすものとすれば，これは単射である：

$$\sigma(\bar{x}) = \sigma(\bar{y}) \Longrightarrow \varpi\circ\sigma(\bar{x}) = \varpi\circ\sigma(\bar{y}) \Longrightarrow \bar{x} = \bar{y}.$$

したがって $W'=\mathrm{Im}\,\sigma$ とおけば，これは V の部分空間で V/W と同型であるから $V=W\dotplus W'$ となる．(実際 $u\in W\cap W'$ とすれば $u=o$ であることは (3.17) から明らか.) いいかえれば，線型写像 $\sigma: V/W\to V$ で (3.17) をみたすものを一つ定めることは，すべての類 $\bar{x}\in V/W$ の代表元 $x=\sigma(\bar{x})$ を，全体で V の部分空間 $W'=\mathrm{Im}\,\sigma$ をなすように選ぶことと同値である．このような σ を $\varpi: V\to V/W$ の**断面**(正確には**線型断面**)ということにする．これはかならず存在するが，一意的ではない(例 3.12 参照).

そこで，$W\subset V$ を T の一つの不変部分空間とし，$\varpi: V\to V/W$ の一つの断面 $\sigma: V/W\to V$ を定めておく．このとき $W'=\mathrm{Im}\,\sigma$ は T 不変とは限らないが，直和分解 $V=W\dotplus W'$ に従って

(3.18) $$T\sigma(\bar{x}) = y+z \qquad (y\in W',\ z\in W)$$

という分解が任意の $\bar{x}\in V/W$ に対して一意的に成立する．一方，(3.16), (3.17) を用いて

$$\varpi(y) = \varpi(y+z) = \varpi(T\sigma(\bar{x})) = \bar{T}\bar{x}$$

であるから，実は $y=\sigma(\bar{T}\bar{x})$ である．したがって $z=\sigma_T(\bar{x})$ とおくことにより線型写像

(3.19) $$\sigma_T = T\circ\sigma-\sigma\circ\bar{T}: V/W \longrightarrow W$$

が定義される．このとき (3.18) からわかるように

$$W' = \mathrm{Im}\,\sigma \text{ も } T \text{ 不変} \Leftrightarrow \sigma_T = o$$

となっているわけである．

いま線型写像 $T': W'\to W'$ および $s_T: W'\to W$ をそれぞれ

$$T'\circ\sigma = \sigma\circ\bar{T}, \qquad s_T\circ\sigma = \sigma_T$$

によって定義すれば，(3.18)，したがってまた (3.19) は

(3.20) $$T|W' = T'+s_T$$

で表わされる．以下 $W=\{o\}$ または $=V$ の場合は自明なものとして除いて考える．

そこで，$(u_1, \cdots, u_r)$ を W の底，$(\bar{u}_{r+1}, \cdots, \bar{u}_n)$ を V/W の底として，$u_j=\sigma(\bar{u}_j)$ $(r+1\leqq j\leqq n)$ とおけば V の底 $(u_1, \cdots, u_r, u_{r+1}, \cdots, u_n)$ が得られるが，この底に関する T の行列は，W が T 不変であること，および (3.20) によって

$$A(T) = \begin{bmatrix} A_1(T) & A_{12}(T) \\ O & A_2(T) \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

で与えられることがわかる．このとき

$A_1(T)$ は $T|W$ の底 $(u_1, \cdots, u_r)$ に関する行列,

$A_2(T)$ は $\bar{T}$ の底 $(\bar{u}_{r+1}, \cdots, \bar{u}_n)$ に関する行列,

$A_{12}(T)$ は σ_T の底 $(\bar{u}_{r+1}, \cdots, \bar{u}_n)$, $(u_1, \cdots, u_r)$ に関する行列

とそれぞれ一致しているわけである．

例 3.15 線型変換 $T: V \to V$ に対して $W = \mathrm{Ker}\, T$ は明らかに T 不変である: $TW = \{o\} \subset W$. また $\mathrm{Im}\, T$ も T 不変である: $T(\mathrm{Im}\, T) \subset TV = \mathrm{Im}\, T$. 一方, $\mathrm{Im}\, T \cong V/W$ であるが，これが必ずしも $V = \mathrm{Ker}\, T \dotplus \mathrm{Im}\, T$ を意味するわけではないことに注意しよう．一般には $\mathrm{Ker}\, T \cap \mathrm{Im}\, T = \{o\}$ とは限らないのである．たとえば，T がベキ零変換 $(\neq O)$ のとき，$T^{\nu-1} \neq O$, $T^{\nu} = O$ $(\nu \geqq 2$, 整数) とすれば，$v \in V$ を適当にとって $u = T^{\nu-1}v \neq o$ とできるが，このとき $u = T(T^{\nu-2}v) \in \mathrm{Im}\, T$, また $Tu = T^{\nu}v = o$ により $u \in \mathrm{Ker}\, T$ であり，$\mathrm{Ker}\, T \cap \mathrm{Im}\, T \neq \{o\}$.

$V = \mathrm{Ker}\, T \dotplus \mathrm{Im}\, T$ となるとき，T は分離するということにしよう．零変換および正則線型変換は明らかに分離する線型変換である．一般に $T \neq O$ を分離する線型変換とし，$W = \mathrm{Ker}\, T$, $\varpi: V \to V/W$ を自然射影とすれば，$\varpi(\mathrm{Im}\, T) = V/W$ である．したがって T から導入された線型変換 $\bar{T}: V/W \to V/W$ は (3.16) により全射，したがってまた V/W 上の正則線型変換である．いいかえれば，不変部分空間 $W' = \mathrm{Im}\, T$ への T の制限 $T|W'$ は W' の正則線型変換である．逆に，$T|\mathrm{Im}\, T$ が $\mathrm{Im}\, T$ 上の正則線型変換ならば，したがってまた T から導入された線型変換 $\bar{T}: V/W \to V/W$ が正則ならば，$\mathrm{Ker}\, T \cap \mathrm{Im}\, T = \{o\}$ であるから，T は分離する．——

例 3.16 定数係数の同次 4 階線型微分方程式

$$y^{(4)} - 3y^{(3)} + y^{(2)} + 4y = 0 \tag{$*$}$$

の解空間を V とする．§2.1 で述べたように，(＊) は演算子の体 $\mathcal{M}$ 上の 1 次方程式

$$(s^4 - 3s^3 + s^2 + 4)y = \beta_0 s^3 + \beta_1 s^2 + \beta_2 s + \beta_3$$

で表わされる．ここで $\omega = (1/2)(-1 + \sqrt{-3})$ とおけば

$$s^4 - 3s^3 + s^2 + 4 = (s-2)^2(s-\omega)(s-\overline{\omega})$$

であり，したがって $\mathscr{M}$ の中で

$$y=\frac{C_1}{s-2}+\frac{C_2}{(s-2)^2}+\frac{C_3}{s-\omega}+\frac{C_4}{s-\bar{\omega}}$$
$$=C_1\{e^{2x}\}+C_2\{xe^{2x}\}+C_3\{e^{\omega x}\}+C_4\{e^{\bar{\omega}x}\}$$

と解くことができる．

$$e^{\omega x}=e^{(-1/2)x}\left(\cos\frac{\sqrt{3}\,x}{2}+\sqrt{-1}\sin\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right),$$
$$e^{\bar{\omega}x}=e^{(-1/2)x}\left(\cos\frac{\sqrt{3}\,x}{2}-\sqrt{-1}\sin\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)$$

であることから，けっきょく $\boldsymbol{R}$ 上の線型空間 V の一つの底としては(通常の関数の記号を用いて)

$$(y_1,y_2,y_3,y_4)=\left(e^{2x},xe^{2x},e^{(-1/2)x}\cos\frac{\sqrt{3}\,x}{2},e^{(-1/2)x}\sin\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)$$

が得られる．

そこで y_1,y_2 で生成される部分空間を W，また y_3,y_4 で生成される部分空間を W' とすれば $V=W\dot{+}W'$ である．容易にわかるように，W,W' はどちらも線型変換 $D\colon V\ni y\mapsto y'\in V$ の不変部分空間であり，したがって $T=D$ に対して (3.21) で定義される A_{12} は零行列である．実際，D の底 (y_1,y_2,y_3,y_4) に関する行列は

$$D(y_1,y_2,y_3,y_4)=(y_1,y_2,y_3,y_4)\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&0&0\\0&1&0&0\\\hline 0&0&-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

で与えられる．——

V を体 K 上の線型空間，W を線型変換 T,T_1,T_2 の共通の不変部分空間とし，それ等から導入された V/W 上の線型変換をそれぞれ $\bar{T},\bar{T}_1,\bar{T}_2$ とする．このとき W は明らかに $\alpha T\ (\alpha\in K)$，T_1+T_2，T_1T_2 によっても不変であり，(3.16) を用いて

$$(3.22)\qquad \overline{\alpha T}=\alpha\bar{T},\qquad \overline{T_1+T_2}=\bar{T}_1+\bar{T}_2,\qquad \overline{T_1T_2}=\bar{T}_1\bar{T}_2$$

であることがわかる．また断面 $\sigma: V/W \to V$ が与えられたとき，(3.19) によって定義される線型写像 $V/W \to W$ については

$$\sigma_{\alpha T} = \alpha\sigma_T, \qquad \sigma_{T_1+T_2} = \sigma_{T_1} + \sigma_{T_2} \tag{3.23}$$

となることが (3.22) を用いてわかる．さらに

$$T_1 T_2 \circ \sigma - \sigma \circ \overline{T_1 T_2} = T_1 \circ (T_2 \circ \sigma - \sigma \circ \bar{T}_2) + (T_1 \circ \sigma - \sigma \circ \bar{T}_1) \circ \bar{T}_2$$

であるから

$$\sigma_{T_1 T_2} = T_1 \circ \sigma_{T_2} + \sigma_{T_1} \circ \bar{T}_2 \tag{3.24}$$

が得られる．行列表示 (3.21) を用いれば (3.22), (3.23), (3.24) は

$$\begin{cases} A_i(\alpha T) = \alpha A_i(T), \qquad A_i(T_1 + T_2) = A_i(T_1) + A_i(T_2), \\ A_i(T_1 T_2) = A_i(T_1) A_i(T_2) \qquad (i=1, 2); \\ A_{12}(\alpha T) = \alpha A_{12}(T), \qquad A_{12}(T_1 + T_2) = A_{12}(T_1) + A_{12}(T_2), \\ A_{12}(T_1 T_2) = A_1(T_1) A_{12}(T_2) + A_{12}(T_1) A_2(T_2) \end{cases} \tag{3.25}$$

で表わされるのであり，

$$A(\alpha T) = \alpha A(T), \qquad A(T_1 + T_2) = A(T_1) + A(T_2),$$
$$A(T_1 T_2) = A(T_1) A(T_2)$$

等の両辺を比較することによっても容易に証明できることである．

$T \in L_K(V, V)$ に対して $K[T] = \{f(T) \mid f \in K[X]\}$ とおけば T 不変な部分空間 W はまた明らかに $K[T]$ 不変である．したがって (3.22) を用いて

$$\overline{f(T)} = f(\bar{T}) \qquad (f \in K[X]) \tag{3.26}$$

が得られる．

c) 不変直和因子

V の T 不変な部分空間 W に対して $V = W \dotplus W'$ となるようなもう一つの不変部分空間 W' がある場合には，行列表示 (3.21) において $A_{12}(T) = O$ となることからもわかるように，T の性質を調べることは $T|W$, $T|W'$ の性質を調べることに完全に帰着される．したがって可能な限りこのような分解を行なうことは重要である．

一般に線型変換の集合 $G \subset L(V, V)$ に対して G 不変な部分空間 W が与えられたとき，$V = W \dotplus W'$ となるような G の不変部分空間 W' が存在するための条件を求めよう．このような W' が存在するとき，W を（したがって W' も）G **不変直和因子**ということにする．

定理 3.5 $W\subset V$ を $G\subset L(V,V)$ の不変部分空間，任意の $T\in G$ に対して $\bar{T}$ を T から導入された線型変換 $V/W\to V/W$ とする．W が G 不変直和因子であるための必要十分条件は，任意の断面 $\sigma: V/W\to V$ に対して線型写像 $c: V/W\to W$ を適当にとれば

$$\sigma_T = c\circ\bar{T} - T\circ c \qquad (\forall T\in G) \tag{3.27}$$

となることである．ただし $\sigma_T = T\circ\sigma-\sigma\circ\bar{T}$．このとき $W'=\mathrm{Im}(\sigma+c)$ も G 不変であり，$V=W\dotplus W'$ となる．

証明 σ, σ' を二つの断面 $V/W\to V$ とする．このとき $\varpi\circ\sigma=\varpi\circ\sigma'=I_{V/W}$ であるから $c=\sigma'-\sigma\in L(V/W, W)$ である．つまり σ を一つ任意に固定しておけば他の断面 σ' は $\sigma'=\sigma+c$, $c\in L(V/W, W)$ で与えられる．このとき任意の $T\in G$ に対して

$$\sigma'_T = T\circ\sigma'-\sigma'\circ\bar{T} = \sigma_T+(T\circ c-c\circ\bar{T}).$$

W が G 不変直和因子であるためには，ある断面 σ' については $\mathrm{Im}\,\sigma'=\mathrm{Im}(\sigma+c)$ が G 不変であること，すなわち $\sigma'_T=O$ となることが必要十分であり，この σ' を定める c に対して (3.27) が成立するわけである．▌

定理 3.5 の W の底 $(u_1, \cdots, u_r)$, V/W の底 $(\bar{u}_{r+1}, \cdots, \bar{u}_n)$ を一つずつ定めておけば，断面 $\sigma: V/W\to V$ を考えることは V の底 $(u_1, \cdots, u_r, u_{r+1}, \cdots, u_n)$, $u_j=\sigma(\bar{u}_j)$ $(r+1\leqq j\leqq n)$ を考えることと同じであった．その意味でもう一つの断面 $\sigma'=\sigma+c$ $(c\in L(V/W, W))$ を考えることは，正則行列

$$P=\begin{bmatrix} I_r & C \\ O & I_{n-r}\end{bmatrix} \qquad (C\in M(r, n-r\,; K))$$

による底の変換を考えることと同じである．行列表示 (3.21) に関していえば，$A'(T)=P^{-1}A(T)P$ とおくとき

$$\begin{cases} A_i'(T)=A_i(T) \qquad (i=1,2), \\ A_{12}'(T)=A_{12}(T)+A_1(T)C-CA_2(T) \end{cases}$$

であるが，$\sigma'_T=O$ であることは $A_{12}'(T)=O_{r,n-r}$ であることに他ならないのであり，このことからも定理 3.5 が証明される．

一般に線型変換の集合 $G\subset L(V,V)$ が $\{o\}$, V 以外に G 不変部分空間をもたないとき，G は**既約**であるという．G が既約でないとき，すなわち $\{o\}$, V 以外に G 不変部分空間があるとき，G は**可約**であるという．また任意の G 不変部分空間

が G 不変直和因子であるとき，G は**完全可約**（あるいは**半単純**）であるという．既約な G は当然完全可約であるが，可約でも完全可約とは限らない．

例 3.17 $A=\begin{bmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{bmatrix}\in M_2(K)$ で定められる線型変換 $F_A: K^2\ni \boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}\in K^2$ は可約である．実際，$\boldsymbol{e}_1={}^t(1,0)\in K^2$ で生成される1次元の部分空間 W は T 不変である．しかしこの部分空間 W は T 不変直和因子ではない．実際，$\gamma\in \boldsymbol{R}$ をどのようにとっても正則行列

$$P=\begin{bmatrix}1 & \gamma\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad \left(P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -\gamma\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)$$

によって $P^{-1}AP=A$ である．したがって線型変換 F_A は完全可約ではない．——

問
$$A=\begin{bmatrix}\alpha & 1 & & \\ & \alpha & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1\\ & & & \alpha\end{bmatrix}\in M_n(K)$$

で定められる線型変換 $F_A: K^n\ni \boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}\in K^n$ は可約であり，完全可約ではないことを示せ．——

例 3.18 V を実数体 $\boldsymbol{R}$ 上の線型空間とする．このときに線型変換の集合 $G\subset L(V,V)$ が写像の結合によって有限群をなすならば，G は完全可約であることを証明しよう．任意の G 不変部分空間 W が G 不変直和因子であることをいうのである．断面 $\sigma: V/W\to V$ を任意に一つ定める．このとき (3.24) により $\sigma_{TT'}=T\circ\sigma_{T'}+\sigma_T\circ\bar{T}'$ $(T, T'\in G)$ であるから

$$\begin{aligned}\sum_{T\in G} T^{-1}\circ\sigma_{TT'} &= \sum_{T\in G} T'(TT')^{-1}\circ\sigma_{TT'}\\ &= \sum_{T\in G}(\sigma_{T'}+T^{-1}\circ\sigma_T\circ\bar{T}').\end{aligned}$$

G は群であるから T が G 全体を動けば TT' も G 全体を動くのであり，したがって $|G|=\nu$ とすれば

$$\nu\sigma_{T'}+\left(\sum_{T\in G}T^{-1}\circ\sigma_T\right)\circ\bar{T}' = T'\circ\left(\sum_{T\in G}T^{-1}\circ\sigma_T\right).$$

そこで $c=-(1/\nu)\sum_{T\in G}T^{-1}\circ\sigma_T$ とおけば $c\in L(V/W, W)$ であり，$\sigma_{T'}=c\circ\bar{T}'-T'\circ c$ が任意の $T'\in G$ に対して成立する．したがって定理3.5により W は G 不変直和因子である．

以上の議論は，一般の体 K 上の線型空間 V の場合でも，$G\subset L(V, V)$ の元の個数を $\nu=|G|$ とするとき，$\nu\cdot 1_K\neq 0$ であれば，そのまま通用する．たとえば，$K=\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{Z}/(2)$ でも ν が奇数であればよい．——

例 3.19(**Schur の補題**) V_1, V_2 をともに同じ体 K 上の線型空間とし，線型変換の集合 $G_1\subset L(V_1, V_1)$ および $G_2\subset L(V_2, V_2)$ はどちらも既約であるとする．線型写像 $F: V_1\to V_2$ は次の条件をみたすものとしよう：

“任意の $T_1\in G_1$ に対して $F\circ T_1=T_2\circ F$ をみたす $T_2\in G_2$ が存在し，また，任意の $T_2\in G_2$ に対して $T_2\circ F=F\circ T_1$ をみたす $T_1\in G_1$ が存在する.”

このとき F は零写像(すなわち $\mathrm{Im}\, F=\{o\}\subset V_2$)であるか，または線型同型写像(したがって $V_1\cong V_2$, $G_2=\{F\circ T_1\circ F^{-1} \mid T_1\in G_1\}$)である．

この事実は一般に Schur の補題とよばれ，有限群の表現論等において重要であるが，証明は容易である．まず $W_1=\mathrm{Ker}\, F(\subset V_1)$ が G_1 不変であることに注意しよう．実際，$T_1\in G_1$ に対して $T_2\in G_2$ を $F\circ T_1=T_2\circ F$ であるようにとれば，任意の $v\in W_1$ に対して

$$F\circ T_1(v) = T_2\circ F(v) = T_2 o = o.$$

したがって $T_1 W_1\subset \mathrm{Ker}\, F=W_1$ である．仮定により G_1 は既約であるから，$W_1=\{o\}$ または $=V_1$ であり，したがって F は単射であるかまたは $\mathrm{Im}\, F=\{o\}$ である．$\mathrm{Im}\, F\neq\{o\}$ (したがって F は単射) である場合に，さらに F は全射であることを示せばよい．$W_2=\mathrm{Im}\, F$ $(\neq\{o\})$ とおけば，これは G_2 不変であることがわかる．実際，$T_2\in G_2$ に対して $T_1\in G_1$ を $T_2\circ F=F\circ T_1$ であるようにとれば，任意の $v\in V_1$ に対して

$$T_2\circ F(v) = F\circ T_1(v)\in F(V_1).$$

したがって $T_2 W_2\subset \mathrm{Im}\, F=W_2$ である．ところが G_2 は既約であり，$W_2\neq\{o\}$ であるから $W_2=V_2$ でなければならない．すなわち F は全射である．以上によって Schur の補題は証明された．

とくに $V_1=V_2=V$, $G_1=G_2=G$ として，線型変換 $Z: V\to V$ が G の任意の元と可換である場合を考えよう：

$$Z\circ T = T\circ Z \qquad (\forall T\in G).$$

このときもし

$$(*) \qquad Zv_0=\alpha v_0, \quad v_0\in V, \quad v_0\neq o, \quad \alpha\in K$$

であるような $v_0 \in V$ および $\alpha \in K$ が存在すれば, $Z=\alpha I_V$ であることがわかる. 実際, $F=Z-\alpha I_V$ は G の任意の元と可換であるが, G は既約であるから $F=O_V$ (零変換) でなければならない. $v_0 \neq o$, $Fv_0=o$ だから F は正則ではあり得ないのである.

$K=\boldsymbol{C}$ の場合には, 任意の線型変換 Z に対して (*) をみたす v_0, $\alpha\ (\in \boldsymbol{C})$ が必ず存在する (後述). したがってこの場合, $G\subset L(V, V)$ が既約であれば, G の任意の元と可換な $Z\in L(V, V)$ はすべて $Z=\alpha I_V\ (\alpha\in \boldsymbol{C})$ の形であることがわかる. ——

例 3.20 $G\subset L(V, V)$ に対して G 不変部分空間 W が既約であるとは, G の W への制限 $G|W$ が既約となることである. G が完全可約であるためには, V が既約な G 不変直和因子の直和に分解されることが必要十分であることを証明しよう.

まず G を完全可約であるものとする. $\dim V=0$ のときは明らかである. $\dim V<n$ のときは証明できたものとして, $\dim V=n$ とし, $W_1 \neq \{o\}$ を G 不変部分空間のうちで次元が (0 ではない) 最小のものとする. W_1 は $\{o\}$, W_1 以外に G 不変部分空間をもたないから既約である. G の完全可約性によって $V=W_1 \dotplus W'$ となる G 不変部分空間 W' が存在する. $\dim W'<n$ だから仮定により

$$W' = W_2 \dotplus \cdots \dotplus W_t \qquad (W_i \text{ は既約な } G \text{ 不変直和因子})$$

と分解できる. すなわち $V=W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_t$.

逆に, $V=W_1\dotplus\cdots\dotplus W_t$ で, W_i は既約な G 不変直和因子であるものとしよう. W を任意の G 不変部分空間としてこれが G 不変直和因子であることをいえばよい. $V=W$ ならば明らか. $V\neq W$ とする. $W_i\ (1\leqq i\leqq t)$ の既約性により, $W\cap W_i=\{o\}$ か $W_i\subset W$ かのどちらかである. したがって添字の集合 $\{1, 2, \cdots, t\}$ を

$$\{1, 2, \cdots, t\} = \{i_1, \cdots, i_k\} \cup \{j_1, \cdots, j_{t-k}\},$$
$$W_{i_\nu} \subset W \quad (\nu=1, \cdots, k), \qquad W_{j_\mu} \cap W = \{o\} \quad (\mu=1, \cdots, t-k)$$

のように分ければ

$$V = W \dotplus W_{j_1} \dotplus \cdots \dotplus W_{j_{t-k}}, \qquad W = W_{i_1} \dotplus \cdots \dotplus W_{i_k}$$

であり, W は G 不変直和因子である. ——

§3.3　最小多項式と特性多項式

a)　線型変換の自然標準形

線型変換 $T\in L(V, V)$ の性質を調べる一般的な方法は，V を T 不変直和因子の直和に分解し，各直和因子上で T のわかりやすい行列表示を求めることである．このような V の直和分解にはいくつかの種類があり，ある一定の基準に沿った直和分解によって定められる T の‘わかりやすい’行列表示を（その基準に従った）T の標準形というのである．ここでは‘自然標準形’（有理形ともよばれる）について述べる．これは必ずしも諸種の計算に役に立つ標準形であるとはいえないが，任意の体の上の線型空間について適用できるという意味では，もっとも一般的なものの一つである．したがって理論的には見通しのよいものであり，その一意性にもとづいて，線型変換の‘特性多項式’のいわば intrinsic な定義を与えることもできる．さらに，ここでは述べないが，特殊な体で成立する計算上もっと実用的な‘Jordan 標準形’は，自然標準形から導くこともできるのである[1]．

まず不変直和因子と最小多項式の関係を調べることからはじめる．以下 V は体 K 上の有限次元線型空間とする．

補題 3.1　T を V 上の線型変換，W を V の一つの T 不変部分空間とし，$\bar{T}$ を T から導入された V/W 上の線型変換とする．このとき T, $T|W$, $\bar{T}$ の最小多項式をそれぞれ φ_T, φ_0, $\varphi_{\bar{T}}$ とすれば，φ_T は $\varphi_0\varphi_{\bar{T}}$ の約数である．とくに W が T 不変直和因子である場合には，φ_T は φ_0, $\varphi_{\bar{T}}$ の最小公倍数と一致する．

証明　(3.26) により $\overline{\varphi_{\bar{T}}(T)}=\varphi_{\bar{T}}(\bar{T})=O$ だから，$\bar{T}$ の定義 (3.16) によって $\mathrm{Im}\,\varphi_{\bar{T}}(T)\subset\mathrm{Ker}\,\varpi=W$．したがって

$$(\varphi_0\varphi_{\bar{T}})(T)=\varphi_0(T)\varphi_{\bar{T}}(T)=O$$

であり，$\varphi_T|\varphi_0\varphi_{\bar{T}}$ でなければならない（§2.2, b)）．

W が T 不変直和因子であれば，T 不変部分空間 W' で $V=W\dot{+}W'$ となるものをとることができ，$W'\ni x\leftrightarrow\varpi(x)\in V/W$ の対応により，$W'=V/W$, $\bar{T}=T|W'$ と同一視することができる（(3.16) 参照）．すなわち $T|W'$ の最小多項式は $\varphi_{\bar{T}}$．さて $\varphi_T(T|W)=\varphi_T(T)|W=O$ により，φ_0 は φ_T の約数，同様に $\varphi_{\bar{T}}$ も φ_T の約数である．したがって φ_T は φ_0, $\varphi_{\bar{T}}$ の公倍数．一方，ψ を φ_0, $\varphi_{\bar{T}}$ の任

---

1)　本選書，杉浦光夫・横沼健雄“ジョルダン標準形，テンソル代数”参照．

意の公倍数とし，任意の $x \in V$ を $x=x_0+x'$, $x_0 \in W$, $x' \in W'$ と分解すれば

$$\psi(T)x = \psi(T|W)x_0+\psi(T|W')x' = o.$$

すなわち $\psi(T)=O$ であり，$\varphi_T|\psi$ である．ゆえに φ_T は φ_0, φ_T の最小公倍数である．▌

$v \in V$ を任意に一つ固定し，線型変換 T に対して

(3.28) $$W_v = K[T]v = \{f(T)v \,|\, f \in K[X]\}$$

とおけば，W_v は明らかに T 不変部分空間である．このとき任意の $p \in K[X]$ に対して $p(T)(K[T]v)=K[T](p(T)v)$ であるから

(3.29) $$p(T)W_v = W_{p(T)v}.$$

また (3.28) で定義された W_v に対して

(3.30) $$J_v = \{f \in K[X] \,|\, f(T|W_v)=O\}$$

とおけば，これは $K[X]$ のイデアルであり，$T|W_v$ の最小多項式を φ_v とすれば $J_v=(\varphi_v)$ である．とくに $v=o$ ならば $\varphi_v=1$, $J_v=K[X]$．また

(3.31) $$f \in J_v \Leftrightarrow f(T|W_v) = f(T)|W_v = O \Leftrightarrow f(T)v = o.$$

したがってまた，任意の $p \in K[X]$ に対して，p, φ_v の最大公約数を d とすれば

(3.32) $$J_{p(T)v} = (\varphi_v/d)$$

であることも容易に示すことができる．

問 (3.32) を証明せよ．——

補題 3.2 線型変換 $T: V \to V$, および $v \in V$, $v \neq o$ に対して，T の最小多項式を φ_T, $T|W_v$ の最小多項式を φ_v とすれば

$$\deg \varphi_v = \dim W_v, \qquad \varphi_v|\varphi_T.$$

証明 $v, Tv, \cdots, T^{\nu-1}v$ は線型独立であり，

$$T^\nu v+\alpha_1 T^{\nu-1}v+\cdots+\alpha_\nu v = o \qquad (\alpha_i \in K)$$

であるものとする．$\varphi_0(X)=X^\nu+\alpha_1X^{\nu-1}+\cdots+\alpha_\nu \in K[X]$ とおき，$f \in K[X]$ に対して $f=q\varphi_0+r$, $\deg r<\deg \varphi_0$ のように q, $r \in K[X]$ を定めれば，$f(T)v=r(T)v$ は $\{v, Tv, \cdots, T^{\nu-1}v\}$ の線型結合である．したがって $\varphi_0=\varphi_v$ であり，$(v, Tv, \cdots, T^{\nu-1}v)$ は W_v の底．ゆえに $\deg \varphi_v=\dim W_v=\nu$ である．$\varphi_T(T)=O$ だから，とくに $\varphi_T \in J_v$ であり，$\varphi_v|\varphi_T$．▌

第2章，§2.4, c) で述べたように，有限次元線型空間の任意の線型変換は必ず最小多項式をもつ．その次数について次のことがわかる．

系 $\dim V=n\geqq 1$ とすれば，任意の線型変換 T に対して $\deg\varphi_T\leqq n$ である．

証明 n に関する帰納法で証明する．$\dim V=1$ のときは $T=\alpha I$ $(\alpha\in K)$ であるから $\varphi_T(X)=X-\alpha$，すなわち $\deg\varphi_T=1$ である．$\dim V<n$ のときは証明できたものとして，$\dim V=n$, $v\in V$, $v\neq o$ とする．W_v, φ_v を前と同様に定め，$\nu=\deg W_v$ とおく．$\nu=n$ すなわち $V=W_v$ のときは $\varphi_T=\varphi_v$ だから，たしかに $\deg\varphi_T=n$．$\nu\leqq n$ ならば

$$\dim(V/W_v)=\dim V-\dim W_v=n-\nu$$

であるから，T から導入される線型変換 $\bar{T}: V/W_v\to V/W_v$ の最小多項式については仮定により $\deg\varphi_{\bar{T}}\leqq n-\nu$．一方，補題3.1により $\varphi_T|\varphi_v\varphi_{\bar{T}}$ だから

$$\deg\varphi_T\leqq\deg\varphi_v+\deg\varphi_{\bar{T}}\leqq\nu+(n-\nu)=n.$$ ▌

W を V の一つの T 不変部分空間とし，$\varpi: V\to V/W$ を射影，$\bar{T}$ を T から導入される V/W 上の線型変換とする．$\bar{v}\in V/W$ に対して

(3.33) $$J_{\bar{v}}=\{f\in K[X]\,|\,f(\bar{T})\bar{v}=\bar{o}\}$$

とおけば，$J_{\bar{v}}$ は $K[X]$ のイデアルであり，$\bar{T}$ 不変部分空間 $K[\bar{T}]\bar{v}$ 上で $f(\bar{T})=O$ となる $f\in K[X]$ 全体と一致している．したがって $\bar{T}$ の $K[\bar{T}]\bar{v}$ への制限の最小多項式を $\varphi_{\bar{v}}$ で表わせば，$J_{\bar{v}}=(\varphi_{\bar{v}})$ であり，また補題3.2により $\bar{v}\neq\bar{o}$ ならば $\deg\varphi_{\bar{v}}=\dim(K[\bar{T}]\bar{v})$，$\varphi_{\bar{v}}|\varphi_T$ である．

$\bar{v}\in V/W$ に対して $v\in V$ を $\varpi(v)=\bar{v}$ のようにとれば

$$f\in J_{\bar{v}}\iff f(\bar{T})\bar{v}=\bar{o}\iff f(T)v\in W$$

であることに注意しよう．

補題3.3 W を T 不変部分空間とし，$v\in V$, $\varpi(v)=\bar{v}\in V/W$ とするとき，次の四つの条件は同値である：

(1) $J_{\bar{v}}=J_v$.

(2) $\varphi_{\bar{v}}=\varphi_v$.

(3) $\varphi_{\bar{v}}(T)v=o$.

(4) $W\cap W_v=\{o\}$ $(W_v=K[T]v)$.

証明 (1) $\iff$ (2) $\Longrightarrow$ (3) は明らかである．

(3) $\Longrightarrow$ (1)：$\varphi_{\bar{v}}(T)v=o$ ならば $J_{\bar{v}}=(\varphi_{\bar{v}})\subset J_v$ であるが，一方，任意の $f\in J_v$ は $f(T)v=o\in W$ をみたすから $J_v\subset J_{\bar{v}}$．したがって $J_v=J_{\bar{v}}$.

(3) $\iff$ (4)：W_v の元は $f(T)v$ $(f\in K[X])$ と表わされているから

$$W\cap W_v=\{o\}\iff (f(T)v\in W\Longrightarrow f(T)v=o)$$
$$\iff (f\in J_{\bar v}\Longrightarrow f\in J_v)$$
$$\iff \varphi_{\bar v}(T)v=o. \qquad ▮$$

そこで T 不変部分空間 $W\subset V$ に関する次の条件を考える:

(A)　任意の $\bar v\in V/W$ に対して $v\in V$: $\varpi(v)=\bar v$ を適当にとれば $\varphi_{\bar v}(T)v=o$.

補題3.3により，この条件は次の各条件と同値である:

$(A)_1$　$\forall\bar v\in V/W\ \exists v\in V$:　$\varpi(v)=\bar v$,　$W\cap W_v=\{o\}$.

$(A)_2$　$\forall u\in V\ \exists v\in V$:　$u-v\in W$,　$W\cap W_v=\{o\}$.

さらに $\varpi\circ T=\bar T\circ\varpi$ に注意すれば次とも同値である:

$(A)_3$　$\forall\bar v\in V/W\ \exists v\in V$:　$\varpi(W_v)(=K[\bar T]\bar v)\cong W_v$.

とくに W が T 不変直和因子であれば，W は条件(A)をみたす．実際 W' を $V=W\dotplus W'$ であるような T 不変部分空間とし，$x\in V$ をこの分解に従って

$$x=w+v \qquad (w\in W,\ v\in W')$$

とすれば，$f(T)w\in W$, $f(T)v\in W'$ $(\forall f\in K[X])$ だから

$$f(T)x=f(T)w+f(T)v\in W\iff f(T)v=o.$$

すなわち，$\varpi(x)=\varpi(v)=\bar v$ とおけば $f(\bar T)\bar v=\bar o\iff f(T)v=o$ である．いいかえれば，W が T 不変直和因子ならば，線型断面 $\sigma: V/W\to V$ を適当に($\mathrm{Im}\,\sigma$ が T 不変であるように)とり，任意の $\bar v$ において $\varphi_{\bar v}(T)\sigma(\bar v)=o$ となるようにできる．後にこの逆も成立すること，すなわち，T 不変部分空間 W が(A)をみたすならば，実は W は T 不変直和因子であることが証明される(定理3.6).

補題 3.4　$v_0\in V$ を

$$\dim(K[T]v_0)=\max_{v\in V}\dim(K[T]v)$$

であるようにとる．このとき V の T 不変部分空間 $W_0=K[T]v_0$ は(A)をみたす．また $T|W_0$ の最小多項式を φ_0 とすれば，$W_0\cap W_v=\{o\}$ のとき φ_v は φ_0 の約数である．

証明　$\varpi: V\to V/W_0$ を射影，$\bar T: V/W_0\to V/W_0$ を T から誘導された線型変換とする: $\bar T\circ\varpi=\varpi\circ T$. $\sigma: V/W_0\to V$ を任意の断面とすれば，任意の $\bar v\in V/W_0$ に対して

$$\varpi(\varphi_{\bar v}(T)\sigma(\bar v))=\varphi_{\bar v}(\bar T)\bar v=\bar o.$$

したがって $\varphi_{\bar{v}}(T)\sigma(\bar{v})\in W_0$ であり，$f\in K[X]$ を適当にとって，$\varphi_{\bar{v}}(T)\sigma(\bar{v})=f(T)v_0$ と表わすことができる．$q,r\in K[X]$ を $f=q\varphi_{\bar{v}}+r$, $\deg r<\deg\varphi_{\bar{v}}$ のようにとり，$v=\sigma(\bar{v})-q(T)v_0$ とおけば $\varpi(v)=\bar{v}$ であり，

$$\varphi_{\bar{v}}(T)v=f(T)v_0-(q\varphi_{\bar{v}})(T)v_0=r(T)v_0.$$

W_0 が (A) をみたすことを示すためには $r=0$ をいえばよい．φ_v は $T|W_v$ の最小多項式だから $\varphi_v(T)v=o$，したがって $\varphi_v(\bar{T})\bar{v}=\bar{o}$，ゆえに $\varphi_{\bar{v}}|\varphi_v$ である．そこで $\rho\in K[X]$ を $\varphi_v=\rho\varphi_{\bar{v}}$ のようにとれば

$$o=(\rho\varphi_{\bar{v}})(T)v=\rho(T)\varphi_{\bar{v}}(T)v=(\rho r)(T)v_0$$

だから $\varphi_0|\rho r$ である．したがって $r\neq 0$ とすれば

$$\deg\varphi_0\leqq\deg(\rho r)=\deg\rho+\deg r<\deg(\rho\varphi_{\bar{v}})=\deg\varphi_v$$

となり，これは v_0 のとり方に矛盾する（補題3.2）．ゆえに $r=o$ であり，W_0 は (A) をみたす．

$W_0\cap W_v=\{o\}$ のとき $u=v_0+v$ とおけば $W_u\subset W_0\dotplus W_v$ であり，さらに v_0 のとり方から $\deg\varphi_u\leqq\deg\varphi_0$ であることに注意しよう．このとき

$$o=\varphi_u(T)u=\varphi_u(T)v_0+\varphi_u(T)v$$

であるが，$\varphi_u(T)v_0\in W_0$, $\varphi_u(T)v\in W_v$ であるから $\varphi_u(T)v_0=o$, $\varphi_u(T)v=o$，すなわち $\varphi_0|\varphi_u$, $\varphi_v|\varphi_u$ である．ゆえに $\varphi_u=\varphi_0$, $\varphi_v|\varphi_0$. ▌

補題3.4の φ_0 は，実は T の最小多項式と一致することがわかる（定理3.7の証明参照）.

補題 3.5　V の T 不変部分空間 W は条件 (A) をみたすものであるとし，$\bar{v}_1\in V/W$ を

$$\dim(K[\bar{T}]\bar{v}_1)=\max_{\bar{v}\in V/W}\dim(K[\bar{T}]\bar{v})$$

であるものとする．このとき $v_1\in V$ を $\varpi(v_1)=\bar{v}_1$, $\varphi_{\bar{v}_1}(T)v_1=o$（したがって $W\cap W_{v_1}=\{o\}$）であるようにとり，$W_1=W_{v_1}=K[T]v_1$ とおけば，T 不変部分空間 $W\dotplus W_1$ も条件 (A) をみたす．

証明　任意の $u\in V$ に対し $v\in V$ を $u-v\in W\dotplus W_1$, $(W\dotplus W_1)\cap W_v=\{o\}$ であるようにとれることをいえばよい（条件 $(\mathrm{A})_2$）．$\varpi: V\to V/W$（射影），$\bar{T}$ を T から導入される V/W 上の線型変換とする．補題3.4により，$\overline{W}_1=\varpi(W\dotplus W_1)=K[\bar{T}]\bar{v}_1$ は $\bar{V}=V/W$ の $\bar{T}$ 不変部分空間として条件 (A) をみたす．したがって

任意の $u\in V$ に対して $\bar{u}=\varpi(u)\in\bar{V}$ とおけば，$\bar{v}\in\bar{V}$ を適当にとって $\bar{u}-\bar{v}\in\overline{W}_1$，$\overline{W}_1\cap K[\bar{T}]\bar{v}=\{\bar{o}\}$ とすることができる．$v\in V$ を $\varpi(v)=\bar{v}$ のようにとれば

$$\overline{W}_1\cap K[\bar{T}]\bar{v}=\{\bar{o}\}\Longrightarrow(W\dotplus W_1)\cap W_v\subset W.$$

W は V の T 不変部分空間として条件(A)をみたしているのであるから，とくに v は $W\cap W_v=\{o\}$ であるようにとれる．このとき，たしかに $(W\dotplus W_1)\cap W_v=\{o\}$ であり，$\bar{u}=\varpi(u)$，$\bar{v}=\varpi(v)$ であるから

$$\bar{u}-\bar{v}\in\overline{W}_1\iff u-v\in W\dotplus W_1.$$ ▮

定理 3.6 W を V の T 不変部分空間，$\bar{T}$ を T から導入される V/W 上の線型変換とし，任意の $\bar{v}\in V/W$ に対して $\bar{T}$ の $K[\bar{T}]\bar{v}$ への制限の最小多項式を $\varphi_{\bar{v}}$ で表わす．このとき W に関する次の三つの条件は同値である：

(1) W は T 不変直和因子.

(2) 線型断面 $\sigma:V/W\to V$ を適当にとれば任意の $\bar{v}\in V/W$ に対して $\varphi_{\bar{v}}(T)\cdot\sigma(\bar{v})=o$.

(3) 任意の $\bar{v}\in V/W$ に対して $v\in V$: $\varpi(v)=\bar{v}$ を適当にとれば $\varphi_{\bar{v}}(T)v=o$.

証明 (3)は T 不変部分空間 W に関する条件(A)に他ならない．したがって前述のとおり (1) ⟹ (2) ⟹ (3) は明らかである．(3) ⟹ (1) を示せばよい．

$W=V$ ならば明らか $(V=W\dotplus\{o\})$．$W\neq V$ のとき $\bar{v}_1, v_1, W_1$ を補題3.5のように定めれば $W^{(1)}=W\dotplus W_1$ も条件(A)をみたす．$V=W^{(1)}=W\dotplus W_1$ ならば証明終り．$V\neq W^{(1)}$ のときには $W^{(1)}$ に対して補題3.5を適用して条件(A)をみたす T 不変部分空間 $W^{(2)}=W^{(1)}\dotplus W_1{}^{(1)}$ が得られる．以下同様のことをくりかえして

$$W^{(1)}=W\dotplus W_1,\qquad W^{(2)}=W^{(1)}\dotplus W_1{}^{(1)},\qquad\cdots,$$
$$W^{(t)}=W^{(t-1)}\dotplus W_1{}^{(t-1)}$$

とする．V は有限次元であるから，ある t に対して $V=W^{(t)}$ となる．そのとき

$$V=W\dotplus W',\qquad W'=W_1\dotplus W_1{}^{(1)}\dotplus\cdots\dotplus W_1{}^{(t-1)}$$

であり，W' は T 不変部分空間である．▮

定理 3.7 $V\neq\{o\}$ を体 K 上の有限次元線型空間，T を V の線型変換とする．このとき o ではないベクトル $v_0, v_1, \cdots, v_t\in V$ を適当に選び，T の $W_i=K[T]v_i$ への制限 $T|W_i$ の最小多項式を $\varphi_i\in K[X]$ として，次の二つの条件をみたすようにできる：

(1) $V = W_0 \dotplus W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_t$,

(2) $\varphi_i | \varphi_{i-1}$ $(1 \leqq i \leqq t)$.

またこのとき，φ_0 は T の最小多項式 φ_T と一致し，φ_i $(1 \leqq i \leqq t)$ は T の $W_i \dotplus W_{i+1} \dotplus \cdots \dotplus W_t$ への制限の最小多項式と一致する．さらに，t および多項式 $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_t$ は $v_0, v_1, \cdots, v_t$ のとり方には無関係に条件 (1), (2) によって T だけで一意的に定まる．

証明 $v_0, v_1, \cdots, v_t$ が (1), (2) をみたすように選べることについては，$\dim V$ に関する帰納法で証明しよう．$\dim V = 1$ のときは明らかである $(t=0)$．$\dim V < n$ のときは証明できたものとして $\dim V = n$ とする．v_0 を

$$\dim(K[T]v_0) = \max_{v \in V} \dim(K[T]v)$$

のように選べば，補題3.4 および定理3.6 により，$W_0 = K[T]v_0$ は T 不変直和因子であり，$\dim W_0 = \deg \varphi_0 = n_0 > 0$．そこで W' を $V = W_0 \dotplus W'$ であるような T 不変部分空間とすれば，$\dim W' = n - n_0 < n$．W', $T|W'$ について帰納法の仮定を用いれば，$v_1, \cdots, v_t \in W'$ を適当にとり

$$W' = W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_t \qquad (W_i = K[T]v_i,\ 1 \leqq i \leqq t),$$

$$\varphi_i | \varphi_{i-1} \qquad (2 \leqq i \leqq t)$$

であるようにすることができる．補題3.4 により $\varphi_1 | \varphi_0$ である．したがって $v_0, v_1, \cdots, v_t$ を選ぶことができた．

φ_{t-1}, φ_t はそれぞれ $T|W_{t-1}$, $T|W_t$ の最小多項式であるから，$W_t \cong (W_{t-1} \dotplus W_t)/W_{t-1}$, $\varphi_t | \varphi_{t-1}$ に注意すれば，補題3.1 により φ_{t-1} は $T|(W_{t-1} \dotplus W_t)$ の最小多項式と一致することがわかる．以下同様に順次番号をさかのぼって φ_i $(0 \leqq i \leqq t)$ は $T|(W_i \dotplus \cdots \dotplus W_t)$ の最小多項式と一致することがわかる．とくに $\varphi_0 = \varphi_T$.

$t, \varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_t$ の一意性を証明しよう．$u_0, u_1, \cdots, u_s$ を V の o ではないベクトルとして，$U_j = K[T]u_j$ $(0 \leqq j \leqq s)$，$T|U_j$ の最小多項式を ψ_j とするとき

$$V = U_0 \dotplus U_1 \dotplus \cdots \dotplus U_s, \qquad \psi_j | \psi_{j-1} \qquad (1 \leqq j \leqq s)$$

であったとする．$s=t$, $\psi_i = \varphi_i$ $(0 \leqq i \leqq t)$ を示すのである．$\psi_0 = \varphi_0 = \varphi_T$ は明らか．したがって $\dim W_0 = \dim U_0$ であり，

$$(*) \qquad \dim W_1 + \cdots + \dim W_t = \dim U_1 + \cdots + \dim U_s.$$

つぎに $v_0' = \varphi_1(T)v_0$, $u_0' = \varphi_1(T)u_0$ とおけば (3.29) により

$$\varphi_1(T)W_0 = K[T]v_0', \quad \varphi_1(T)U_0 = K[T]u_0'$$

であるが，$J_{v_0}=(\varphi_0)=(\psi_0)=J_{u_0}$ だから (3.32) により $J_{v_0'}=J_{u_0'}$，すなわち $\varphi_{v_0'}=\varphi_{u_0'}$ であり，実は $\dim(\varphi_1(T)W_0)=\dim(\varphi_1(T)U_0)$．一方，$W_i$, U_j は T 不変であり，φ_1 が $T|(W_1\dotplus\cdots\dotplus W_t)$ の最小多項式であることに注意すれば

$$\varphi_1(T)W_0 = \varphi_1(T)V = \varphi_1(T)U_0\dotplus\cdots\dotplus\varphi_1(T)U_s.$$

ゆえに $\varphi_1(T)U_j=\{o\}$ $(1\leqq j\leqq s)$，すなわち $\varphi_1(T)|(U_1\dotplus\cdots\dotplus U_s)=O$ である．ψ_1 は $T|(U_1\dotplus\cdots\dotplus U_s)$ の最小多項式であるから $\psi_1|\varphi_1$．同様に，$\varphi_1|\psi_1$ も証明できるから $\psi_1=\varphi_1$ である．このことからまた上と同じ方法により $\dim(\varphi_2(T)W_0)=\dim(\varphi_2(T)U_0)$，$\dim(\varphi_2(T)W_1)=\dim(\varphi_2(T)U_1)$ が得られる．そこで

$$\varphi_2(T)W_0\dotplus\varphi_2(T)W_1 = \varphi_2(T)U_0\dotplus\cdots\dotplus\varphi_2(T)U_s$$

に注意すれば $\psi_2|\varphi_2$，同様に $\varphi_2|\psi_2$，ゆえに $\psi_2=\varphi_2$．同じ議論により $t\leqq s$ とすれば $\psi_i=\varphi_i$ $(0\leqq i\leqq t)$．このとき $\dim U_i=\dim W_i$ だから，(＊) により実は $s=t$ である．▌

定理 3.7 の $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_t$ を，簡単のために以下では T の**特性因子**とよぶことにしよう．(通常用いられる名称ではなく，便宜上このようによぶのである.)

とくに $\deg\varphi_T=\dim V=n$ のときには，定理 3.7 において $t=0$, $V=W_0$ となり，したがって $v_0\in V$ を適当にとれば $V=K[T]v_0$．$(v_0, Tv_0, \cdots, T^{n-1}v_0)$ が V の一つの底になっているわけである．$\varphi_T(X)=X^n+\alpha_1X^{n-1}+\cdots+\alpha_n$ とすれば底 $(v_0, Tv_0, \cdots, T^{n-1}v_0)$ に関する T の行列は

$$A=\begin{bmatrix} 0 & & & & -\alpha_n \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 0 & -\alpha_2 \\ & & & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

である．逆に，(3.34) の形の行列 A の最小多項式は

$$\varphi_A(X) = X^n+\alpha_1X^{n-1}+\cdots+\alpha_n \tag{3.35}$$

である．実際，K^n の標準底を $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ とすれば

$$\boldsymbol{e}_i = A^{i-1}\boldsymbol{e}_1 \quad (1\leqq i\leqq n), \qquad A^n\boldsymbol{e}_1 = A\boldsymbol{e}_n = -\alpha_1A^{n-1}\boldsymbol{e}_1-\cdots-\alpha_n\boldsymbol{e}_1$$

であるから，線型変換 $F_A: K^n\ni\boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}\in K^n$ の特性因子 (以下単に行列 A の特性因子という) は一つだけであり，$K^n=K[F_A]\boldsymbol{e}_1$ となっている．

また $\varphi_T=\varphi_{{}^tT}$ であるから，$\deg\varphi_T=n$ ならば V の双対空間 V^* の元 f_0 を適当にとれば $V^*=K[{}^tT]f_0$．このとき V^* の底 $(f_0, {}^tTf_0, \cdots, {}^tT^{n-1}f_0)$ に関する ${}^tT$ の行列はやはり (3.34) で与えられる．$(u_1, \cdots, u_n)$ を $(f_0, \cdots, {}^tT^{n-1}f_0)$ の双対底，すなわち $\langle {}^tT^{i-1}f_0, u_j\rangle=\langle f_0, T^{i-1}u_j\rangle=\delta_{ij}$ $(i, j=1, 2, \cdots, n)$ をみたす V の底とすれば，$(u_1, \cdots, u_n)$ に関する T の行列は (3.34) の行列 A の転置行列である：

$$(3.34)'\qquad {}^tA=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ -\alpha_n & \cdots & & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix}.$$

これは第2章でも諸種の例と関連して扱った形の行列である．

一般の線型変換 $T: V\to V$ についても，T の特性因子を $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_t$ とするとき，V を定理3.7のように T 不変直和因子 W_i $(0\leqq i\leqq t)$ の直和に分解すれば，φ_i は T の W_i への制限 $T|W_i$ の最小多項式になっているのであるから，V の底を適当にとれば，T の行列は

$$(3.36)\qquad A=\begin{bmatrix} A_0 & & & 0 \\ & A_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_t \end{bmatrix}\qquad (\text{各 } A_i \text{ は } (3.34) \text{ の形})$$

で表わされる．この A (あるいは ${}^tA$) を T の**自然標準形**(または**有理形**)というのである．

一般に行列 $A\in M_n(K)$ の最小多項式を φ_A で表わせば，(3.36) については

$$\varphi_A=\varphi_T=\varphi_0,\qquad \varphi_{A_i}=\varphi_i,\qquad \varphi_{A_i}|\varphi_{A_{i-1}}.$$

実際に T の自然標準形を求めるためには，特性因子 $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_t$ を具体的に決定すればよい．われわれの定理3.7の証明は，各補題がわかりやすい意味をもっており，その限りでは見通しのよいものであるが，$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_t$ の実際的な求め方が示されていないという欠点をもつ．この欠点は以下しだいに補われる(たとえば§4.4, d) 参照) であろうが，さしあたり実用性はともかく，定理3.7およびその証明を，線型変換に関する定性的な分析の一つの一般論と考えればよい．これはこれで十分強力なのである．

例 3.21　実係数の行列

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{bmatrix} \quad \text{および} \quad B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

について定理3.7を復習しよう．

まず A については $(A-2I)^2(A+I)=O$ であることが簡単な計算によってわかる．一方，多項式 $(X-2)^2(X+1)\in \boldsymbol{R}[X]$ のどのような約数 $\rho(X)$ $(\deg\rho\leqq 2)$ をとっても $\rho(A)=O$ とはならない．したがって A の最小多項式 φ_A は

$$\varphi_A(X)=(X-2)^2(X+1)=X^3-3X^2+4$$

であり，$\deg\varphi_A=3$．ゆえに A の（すなわち $F_A:\boldsymbol{R}^3\ni \boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3$ の）自然標準形は

$$A_0=\begin{bmatrix}0&0&-4\\1&0&0\\0&1&3\end{bmatrix}$$

である．たとえば $\boldsymbol{v}_0={}^t(1,-1,1)$ とすれば

$$\boldsymbol{v}_0, \qquad A\boldsymbol{v}_0={}^t(1,-2,1), \qquad A^2\boldsymbol{v}_0={}^t(0,4,1)$$

は線型独立であり，$\boldsymbol{R}^3=\boldsymbol{R}[A]\boldsymbol{v}_0$ となる．したがってまた

$$P=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&-2&4\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

とおけば，P は標準底を底 $(\boldsymbol{v}_0, A\boldsymbol{v}_0, A^2\boldsymbol{v}_0)$ に変換する行列であり，$P^{-1}AP=A_0$．

B については $(B-2I)(B+I)=O$ であり，最小多項式は

$$\varphi_0(X)=\varphi_B(X)=(X-2)(X+1)=X^2-X-2$$

である．$\varphi_1|\varphi_0$，$\dim\boldsymbol{R}^3=3$ であるから $\varphi_1(X)=X-2$ あるいは $X+1$ でなければならない．B の自然標準形を $B_0=P^{-1}BP$（P はある正則行列）とすれば $\operatorname{tr}B_0=\operatorname{tr}B=3$ のはずであるが，$\varphi_1(X)=X+1$ ならば $\operatorname{tr}B_0=0$ となり，これはおかしい．したがって $\varphi_1(X)=X-2$ であり，

$$B_0=\begin{bmatrix}0&2&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

である．たとえば $\boldsymbol{v}_0={}^t(1,0,1)$，$\boldsymbol{v}_1={}^t(1,1,0)$ とすれば

$$W_0=\boldsymbol{R}[B]\boldsymbol{v}_0, \qquad W_1=\boldsymbol{R}[B]\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}_1.$$

$F_B|W_0$ の最小多項式が φ_0, $F_B|W_1$ の最小多項式が φ_1 である．また $P=(\boldsymbol{v}_0, B\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1)$ とすればよい．——

b）特性多項式

線型変換 $T: V\to V$ の特性因子 (定理3.7) $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_t$ の積

(3.37) $$f_T = \varphi_0\varphi_1\cdots\varphi_t$$

を T の**特性多項式**あるいは**固有多項式**という．$\dim V=n$ ならば $\deg f_T=n$ である．実際 W_i $(0\leqq i\leqq t)$ を定理3.7のように定めた T 不変直和因子とすれば

$$\begin{aligned}\deg f_T &= \deg\varphi_0+\deg\varphi_1+\cdots+\deg\varphi_t\\ &= \dim W_0+\dim W_1+\cdots+\dim W_t\\ &= \dim V = n.\end{aligned}$$

また φ_0 は T の最小多項式 φ_T と一致するのであったから

(3.38) $$\varphi_T|f_T,$$

(3.39) (Cayley-Hamilton) $$f_T(T) = O.$$

とくに $\deg\varphi_T=n$ ならば $\varphi_T=f_T$ である．

行列 $A\in M_n(K)$ に対しては，線型変換 $F_A: K^n\ni\boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}\in K^n$ の特性多項式を単に A の特性多項式といい，f_A で表わすことにする．とくに A を線型変換 $T: V\to V$ のある底に関する行列とすれば，特性因子の定義から明らかに $f_A=f_T$ である．$P\in M_n(K)$ を正則行列とすれば，$P^{-1}AP$ は同じ T の別の底に関する行列であるから，

(3.40) $$f_{P^{-1}AP} = f_A.$$

f_T の定義 (3.37) において $\varphi_i(X)=X^{n_i}+\alpha_{i1}X^{n_i-1}+\cdots+\alpha_{in_i}$ $(0\leqq i\leqq t)$ とすれば，f_T の X^{n-1} の係数は $\sum_{i=0}^{t}\alpha_{i1}$，これは T の自然標準形を A とすれば $-\mathrm{tr}\,A$ に等しい．一方，任意の正則行列 $P\in M_n(K)$ に対して $\mathrm{tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{tr}\,A$ であったから，$\mathrm{tr}\,A$ を線型変換 T のトレースといい，やはり $\mathrm{tr}\,T$ で表わす．すなわち

$$f_T(X) = X^n+c_1X^{n-1}+\cdots+c_n$$

とすれば

(3.41) $$\mathrm{tr}\,T = -c_1.$$

また f_T の定数項 $c_n=f_T(0)$ の $(-1)^n$ 倍を T の**行列式**といい，$\det T$, $|T|$ 等で表わす．すなわち

(3.42) $$\det T = (-1)^n f_T(0) = (-1)^n c_n.$$

また定義(3.37)により

$$\text{(3.43)} \qquad \det T = (-1)^n \varphi_0(0)\varphi_1(0)\cdots\varphi_t(0) = (-1)^n \alpha_{0n_0}\alpha_{1n_1}\cdots\alpha_{tn_t}.$$

定理3.7のように W_i を定めれば, $\dim W_i = \deg \varphi_i = n_i$, $n_0+n_1+\cdots+n_t=n$, $(-1)^{n_i}\varphi_i(0)=\det(T|W_i)$ であるから

$$\text{(3.44)} \qquad \det T = \det(T|W_0)\det(T|W_1)\cdots\det(T|W_t).$$

ところで(3.34)の行列 A において, もし $\alpha_n=0$ であれば, 第 n 列目は第1列から第 $(n-1)$ 列までの線型結合であるが, $\alpha_n \neq 0$ ならば A の列ベクトルは線型独立であり, A は正則である. したがってこの場合, A が正則であるためには, $\det F_A = (-1)^n \alpha_n \neq 0$ が必要十分である. このことと(3.43)あるいは(3.44)とにより, 一般に線型変換 T については

$$\text{(3.45)} \qquad T \text{ が正則} \iff \det T \neq 0.$$

線型変換 T の特性多項式 f_T は, 体 K 上の関数として次のように表わすことができる(I を恒等変換とする):

$$\text{(3.46)} \qquad f_T(\lambda) = \det(\lambda I - T) \qquad (\forall \lambda \in K).$$

[証明] λ を K の任意の元として $\tilde{T}=\lambda I - T$ とおけば, $\tilde{T}$ の最小多項式は $\varphi_{\tilde{T}}(X) = (-1)^{n_0}\varphi_T(\lambda - X)$ $(n_0=\deg \varphi_T)$ で与えられることがわかる. 実際 $f(X) = \varphi_T(\lambda - X)$ とおけば

$$f(\tilde{T}) = \varphi_T(\lambda I - \tilde{T}) = \varphi_T(T) = O$$

であるから $\varphi_{\tilde{T}}|f$, $\deg \varphi_{\tilde{T}} \leqq \deg f = \deg \varphi_T$ である. 同様に, $g(X) = \varphi_{\tilde{T}}(\lambda - X)$ とおけば $\varphi_T|g$, $\deg \varphi_T \leqq \deg g = \deg \varphi_{\tilde{T}}$ であるから, 実は $\deg \varphi_{\tilde{T}} = \deg f$ であり, $\varphi_{\tilde{T}} = (-1)^{n_0} f$ が得られる.

ところで, 定理3.7の各 W_i は $\tilde{T}$ 不変であるから, 同様の議論は, $\tilde{T}|W_i$, φ_i $(0 \leqq i \leqq t)$ についても行なうことができる. すなわち, $\tilde{T}|W_i$ の最小多項式を $\tilde{\varphi}_i$ で表わせば

$$\tilde{\varphi}_i(X) = (-1)^{n_i}\varphi_i(\lambda - X) \qquad (n_i = \deg \varphi_i = \deg \tilde{\varphi}_i).$$

このことからまた $\tilde{\varphi}_i | \tilde{\varphi}_{i-1}$ $(1 \leqq i \leqq t)$ であり, $\deg \tilde{\varphi}_i = \dim W_i$ であるから, $W_i = K[\tilde{T}]v_i$ $(v_i \neq o)$ と表わすことができる. したがって $\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1, \cdots, \tilde{\varphi}_t$ は $\tilde{T}$ の特性因子である. ゆえに

$$\det \tilde{T} = (-1)^n \tilde{\varphi}_0(0)\tilde{\varphi}_1(0)\cdots\tilde{\varphi}_t(0) = \varphi_0(\lambda)\varphi_1(\lambda)\cdots\varphi_t(\lambda)$$

であり，$f_T(\lambda)=\det(\lambda I-T)$ となる．∎

n 次正方行列 $A\in M_n(K)$ に対しては，線型変換 $F_A: K^n\ni \boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}\in K^n$ の行列式 $\det(F_A)$ を A の行列式といい，やはり $\det A$ で表わす．とくに

$$f_A(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)\qquad(\forall\lambda\in K). \tag{3.46$'$}$$

第4章では別の見地から行列 A の行列式 $\det A$ を定義するが，けっきょくはここで定義したものと一致することも明らかになるであろう(例4.14参照)．

例 3.22　実数体上の2次および3次の行列について，第1章で定義した行列式がここでの定義と一致していることを示す．2次の場合も同様であるから，3次の場合だけを扱う．任意の $A=(a_{ij})\in M_3(\boldsymbol{R})$ に対してここで定義した意味での行列式を $\det A$，第1章で定義した意味での行列式を $|A|$ と，かりに区別して表わそう．最小多項式 φ_A の次数が $3,2,1$ の場合に応じて A の自然標準形は

$$(1)\ \begin{bmatrix}0&0&-\alpha_3\\1&0&-\alpha_2\\0&1&-\alpha_1\end{bmatrix},\qquad(2)\ \begin{bmatrix}0&-\alpha\beta&0\\1&-(\alpha+\beta)&0\\0&0&-\alpha\end{bmatrix},\qquad(3)\ \begin{bmatrix}-\alpha&0&0\\0&-\alpha&0\\0&0&-\alpha\end{bmatrix}$$

の3通りの型に分けられる．A の特性多項式 $f_A(X)$ はそれぞれの場合

$$(1)\ X^3+\alpha_1X^2+\alpha_2X+\alpha_3,\qquad(2)\ (X+\alpha)^2(X+\beta),\qquad(3)\ (X+\alpha)^3$$

であり，とくに $\det A=(-1)^3f_A(0)$ の値は

$$(1)\ -\alpha_3,\qquad(2)\ -\alpha^2\beta,\qquad(3)\ -\alpha^3.$$

一方 $P\in M_3(\boldsymbol{R})$ を $A_0=P^{-1}AP$ が上記の自然標準形であるようにとれば，(1.23)を用いて

$$|A_0|=|P^{-1}AP|=|P^{-1}||A||P|=|A|.$$

したがって(1.15), (1.14)により，$|A|$ の値は

$$(1)\ -\begin{vmatrix}0&-\alpha_3\\1&-\alpha_1\end{vmatrix}=-\alpha_3,\qquad(2)\ -\begin{vmatrix}-\alpha\beta&0\\0&-\alpha\end{vmatrix}=-\alpha^2\beta,$$

$$(3)\ -\alpha\begin{vmatrix}-\alpha&0\\0&-\alpha\end{vmatrix}=-\alpha^3$$

である．したがって各場合について $|A|=\det A$ が成り立っている．とくに任意の $\lambda\in\boldsymbol{R}$ に対して

$$f_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=|\lambda I-A|.$$ ——

例 3.23　例3.22の結果，任意の $A\in M_3(\boldsymbol{R})$ に対してその自然標準形を求める

ことが，原理的には可能である．この場合，特性多項式の因数分解（$\boldsymbol{R}$ 上での）さえできれば，特性因子を求めることは場合に応じた計算によって容易にできる．たとえば

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 10 & 8 \\ 3 & 10 & 7 \\ -6 & -16 & -12 \end{bmatrix} \quad \text{の自然標準形は} \quad A_0=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

実際，任意の $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して $\det(\lambda I-A)$ を (1.15) によって計算すれば，

$$f_A(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-5 & -10 & -8 \\ -3 & \lambda-10 & -7 \\ 6 & 16 & \lambda+12 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+1),$$

したがって $f_A(X)=(X-2)^2(X+1)=X^3-3X^2+4$ である．A の最小多項式 φ_A は f_A の約数であるが，$\rho(X)=X+1,\ X-2,\ (X-2)^2$ については $\rho(A)\neq O$．ゆえに $\varphi_A=f_A$ であり，A の自然標準形はたしかに A_0 である．

$\varphi_A\neq f_A$ である場合でも，たとえば例 3.21 の行列 B に対して行なったのと同様の方法で，f_A さえ求まれば特性因子を求めることは容易である．（なお章末の問題の 9 参照）——

例 3.24　行列

$$J=J(\alpha,n)=\begin{bmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha \end{bmatrix}\in M_n(K)$$

に対し $g(X)=(X-\alpha)^n\in K[X]$ を考えれば，明らかに $g(J)=(J-\alpha I_n)^n=O_n$．一方，$g(X)$ の約数 $\rho_\nu(X)=(X-\alpha)^\nu$ $(0\leqq\nu\leqq n-1)$ に対しては $\rho_\nu(J)\neq O_n$ であるから，$g(X)$ は J の最小多項式である．$\deg g=n$ であるから，けっきょく

$$\varphi_J(X)=f_J(X)=(X-\alpha)^n$$

であり，J の自然標準形は (3.34) の形である．——

問　$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t\in K$ が相異なるものとすれば

$$A=\begin{bmatrix} J(\alpha_1,n_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(\alpha_t,n_t) \end{bmatrix}$$

に対しては $\varphi_A(X)=f_A(X)=(X-\alpha_1)^{n_1}(X-\alpha_2)^{n_2}\cdots(X-\alpha_t)^{n_t}$ であることを示せ．

(したがって自然標準形は(3.34)の形である.) ——

c) 固有値と固有ベクトル

V を体 K 上の線型空間, $T: V\to V$ を線型変換とする. V のベクトル $v\neq o$ に対して $\alpha\in K$ を適当にとれば

$$Tv=\alpha v \tag{3.47}$$

が成立するとき, α を T の**固有値**, v を固有値 α に属する**固有ベクトル**という. $v\in V$ が T の固有ベクトルであることと, v の生成する部分空間 $Kv=\{\xi v\mid\xi\in K\}$ が T 不変な1次元部分空間であることとは同値である.

T の固有値となり得るすべての $\alpha\in K$ は, 実は存在するとしても有限個しかなく, T だけによってすべて定まってしまう. 実際, $\alpha\in K$ を T の一つの固有値, $v\in V$ を α に属する一つの固有ベクトルとして(3.47)を

$$(\alpha I-T)v=o \qquad (I: V\text{ の恒等変換})$$

と書き換えれば, $v\neq o$ であるから $\alpha I-T$ は正則ではあり得ず, したがって T の特性多項式を f_T とすれば, (3.45), (3.46)により

$$\alpha\in K\text{ が }T\text{ の固有値}\Longrightarrow \det(\alpha I-T)=f_T(\alpha)=0.$$

すなわち, T の固有値はすべて方程式

$$f_T(X)=0 \tag{3.48}$$

の K の中での根となっているのである. $\deg f_T=\dim V=n$ とすれば, f_T は高々 n 個の1次因数しかもたないから, (3.48)の根は存在するとしても n 個以下である. 逆に, $\alpha\in K$ が(3.48)の根ならば $\alpha I-T$ は正則ではなく, したがって $W_\alpha=\mathrm{Ker}(\alpha I-T)\neq\{o\}$ であり, $v\in W_\alpha$ は $v\neq o$ ならば T の α に属する固有ベクトルである. 固有値 α の(3.48)の中での重複度を単に α の**重複度**という.

方程式(3.48)を T の**特性方程式**あるいは**固有方程式**という. 一般に $f\in K[X]$ ($\deg f=n$) が与えられたとき, 方程式 $f(X)=0$ を K 上の n 次の代数方程式というが, K 上の代数方程式が K の中に必ず根をもつというわけにはいかない. しかし K の適当な拡大体 L をとれば, f を L 係数の多項式と考えるとき, f はちょうど n 個の1次因数の積として一意的に表わされる(§3.4, 定理3.15参照). すなわち, L の中では f は必ず(重複度もこめてちょうど n 個の)根をもつ. いささか粗雑な定義であるが, このような L の中での(3.48)のすべての根を線型変換 T の**特性根**という. T の特性根のうち K に含まれるものが T の固有値に

なっているわけである．

f_T の定義(3.37)において，$\varphi_i|\varphi_{i-1}$ であるから，T の特性根はすべてまた $\varphi_T(X)=0$ の根である．逆に $\varphi_T(X)=0$ の根は，$\varphi_T|f_T$ により明らかに T の特性根である．

$\alpha\in K$ が T の固有値であるとき，部分空間

$$W_\alpha = \mathrm{Ker}(\alpha I - T) = \{v\in V \mid Tv=\alpha v\}$$

を，T の α に属する**固有空間**という．これは明らかに T 不変部分空間である．T の W_α への制限 $T|W_\alpha$ はベクトルを α 倍するだけの変換 αI であり，W_α のどのような底をとってもスカラー行列 αI_m ($m=\dim W_\alpha$) で表わされてしまうのであるから極めて扱い易い変換であるといえる．

定理 3.8 V を体 K 上の線型空間，$T: V\to V$ を線型変換とする．

(1) $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ を T の相異なる固有値とすれば

$$W_{\alpha_1}+\cdots+W_{\alpha_k} = W_{\alpha_1}\dot{+}\cdots\dot{+}W_{\alpha_k}.$$

(2) $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ を T の相異なるすべての固有値とする．このとき V の適当な底に関する T の行列が対角行列であるための必要十分条件は V が $W_{\alpha_1},\cdots,W_{\alpha_t}$ の直和に分解されることである：

$$V = W_{\alpha_1}\dot{+}\cdots\dot{+}W_{\alpha_t}.$$

補題 3.6 $v_1,\cdots,v_k\in V$ は線型変換 $T: V\to V$ の相異なる固有値 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ にそれぞれ属する固有ベクトルとする．このとき $v_1,\cdots,v_k$ は線型独立である．

証明 $v_1,\cdots,v_k$ は線型従属であるものとしよう．$v_1,\cdots,v_j$ は線型独立であり，$v_{j+1}=\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_jv_j$ であるものとすれば，$Tv_{j+1}=\alpha_{j+1}v_{j+1}$ により

$$\lambda_1\alpha_1v_1+\cdots+\lambda_j\alpha_jv_j = \alpha_{j+1}(\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_jv_j),$$

すなわち，$\lambda_1(\alpha_{j+1}-\alpha_1)v_1+\cdots+\lambda_j(\alpha_{j+1}-\alpha_j)v_j=o$．ここで $v_1,\cdots,v_j$ が線型独立であることから $\lambda_\nu(\alpha_{j+1}-\alpha_\nu)=0$ $(1\leqq\nu\leqq j)$ であるが，$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ は仮定により相異なるから $\lambda_\nu=0$ $(1\leqq\nu\leqq j)$．これは $v_{j+1}\neq o$ に矛盾する．▌

定理 3.8 の証明 (1) 零ベクトル o を $W_{\alpha_1}+\cdots+W_{\alpha_k}$ の元として $o=x_1+\cdots+x_k$ $(x_\nu\in W_{\alpha_\nu})$ とする．$x_1,\cdots,x_k$ は相異なる固有値に属する固有空間の元であるから，補題3.6により $x_\nu=o$．したがって $W_{\alpha_1}+\cdots+W_{\alpha_k}=W_{\alpha_1}\dot{+}\cdots\dot{+}W_{\alpha_k}$.

(2) まず T の底 $(u_1,\cdots,u_n)$ に関する行列は対角であるとしよう．このとき

$$T(u_1,\cdots,u_n)=(u_1,\cdots,u_n)\begin{bmatrix}\beta_1 & & & 0\\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \beta_n\end{bmatrix}$$

であるから $Tu_j=\beta_j u_j\ (1\leqq j\leqq n)$．したがって β_j は T の固有値であり，u_j は固有値 β_j に属する固有ベクトルである．ここで必要ならば，$u_1,\cdots,u_n$ の順序を並べ換えて $\beta_1=\cdots=\beta_{m_1}=\alpha_1$，$\beta_{m_1+1}=\cdots=\beta_{m_1+m_2}=\alpha_2$，$\cdots$，$\cdots=\beta_n=\alpha_t$ とすれば，$(u_1,\cdots,u_{m_1})$ が W_{α_1} の底，$\cdots$，$(\cdots,u_n)$ が W_{α_t} の底である．ゆえに $V=W_{\alpha_1}\dotplus\cdots\dotplus W_{\alpha_t}$．逆に，$V$ が $W_{\alpha_1},\cdots,W_{\alpha_t}$ の直和であるときには，W_{α_i} $(1\leqq i\leqq t)$ の底を合わせて V の底とすることができるが，この底に関する T の行列は明らかに対角行列である．▌

行列 $A\in M_n(K)$ に対して定理3.8の証明を適用すれば次の系が得られる：

系　$A\in M_n(K)$，$P=(\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_n)\in M_n(K)$ とし，P は正則であるものとする．$P^{-1}AP$ が対角行列であるための必要十分条件は，列ベクトル $\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_n\in K^n$ が線型変換 $F_A: K^n\ni\boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}\in K^n$ の固有ベクトルになっていることである．

証明　P は K^n の標準底 $(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$ を底 $(\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_n)$ に変換する行列であり，$P^{-1}AP$ は F_A の底 $(\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_n)$ に関する行列であることから，定理3.8の証明によって明らかである．▌

線型変換 $T: V\to V$ が V の適当な底によって対角行列で表わすことができるとき，T は**対角化可能**であるという．

行列 $A\in M_n(K)$ の固有値，固有空間，特性方程式等というときは，線型変換 $F_A: K^n\ni\boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}\in K^n$ についてのそれ等を考えるものとする．行列 $A\in M_n(K)$ が対角化可能であるとは，A が対角行列に相似であること，つまり正則行列 $P\in M_n(K)$ を適当にとれば $P^{-1}AP$ が対角行列となることである．

例 3.25　$\alpha\in K$ とすれば，

$$J=J(\alpha,n)=\begin{bmatrix}\alpha & 1 & & \\ & \alpha & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \alpha\end{bmatrix}$$

の特性多項式は $f_J(X)=(X-\alpha)^n$ (例3.24) であるから，J の固有値は α だけである．一方，$F_J: K^n\ni\boldsymbol{x}\mapsto J\boldsymbol{x}\in K^n$ の α に属する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}={}^t(x_1,\cdots,$

x_n) とすれば，

$$Jx = {}^t(\alpha x_1 + x_2, \alpha x_2 + x_3, \cdots, \alpha x_n) = {}^t(\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n)$$

により $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$ である．したがって α に属する固有空間は $W_\alpha = Ke_1 = \{{}^t(\lambda, 0, \cdots, 0) \mid \lambda \in K\}$ である．すなわち $\dim W_\alpha = 1$．ゆえに $n \geqq 2$ のとき J は対角行列に相似ではないことがわかる．——

問 V を複素数体 $\boldsymbol{C}$ 上の線型空間とし，T を V 上の線型変換とする．このとき T が完全可約であることと，T が対角化可能であることとは同値であることを示せ．——

例 3.26
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \in M_3(\boldsymbol{R})$$

としよう．このとき A の特性多項式は $f_A(X) = (X-2)^2(X+1)$ である．実際，任意の $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-5 & 0 & -6 \\ -3 & \lambda-2 & -6 \\ 3 & 0 & \lambda+4 \end{vmatrix}$$

であるが，(1.15) を用いて計算すれば容易に

$$f_A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda+1)$$

が得られる．ゆえに A の固有値は 2, -1 である．

固有値 2 に属する $\boldsymbol{R}^3 \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ の固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ とすれば，$A\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$ により

$$x_1 + 2x_3 = 0, \qquad x_2 \text{ は任意}.$$

したがって 2 に属する固有空間 W_1 の底として

$$\boldsymbol{a}_1 = {}^t(-2, 0, 1), \qquad \boldsymbol{a}_2 = {}^t(0, 1, 0)$$

からなるものがとれる：$W_1 = \{\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{a}_1 + \mu\boldsymbol{a}_2 \mid \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}\}$．ゆえに $\dim W_1 = 2$ である．

固有値 -1 に属する固有空間を W_2 とすれば，同様にして $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in W_2 \Leftrightarrow x_1 + x_3 = 0,\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = -x_3$．したがって，$\boldsymbol{a}_3 = {}^t(1, 1, -1)$ とおけば $W_2 = K\boldsymbol{a}_3$ であり，$\dim W_2 = 1$．

以上によって $\boldsymbol{R}^3 = W_1 \dotplus W_2$ であり，A は対角化可能である．$P = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$

$\in M_3(\boldsymbol{R})$ により

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}. \qquad \text{——}$$

問　例3.23の行列 A は対角化できないことを示せ. ——

例 3.27　$A\in M_n(\boldsymbol{R})$ の特性方程式 $f_A(X)=0$ は，実数体 $\boldsymbol{R}$ の中では必ずしも根をもたないが，複素数体 $\boldsymbol{C}$ の中では必ず(重複度もこめてちょうど n 個の)根をもつ．そこで $A\in M_n(\boldsymbol{R})$ の場合でも $A\in M_n(\boldsymbol{C})$ と考えて，$F_A:\boldsymbol{C}^n\to\boldsymbol{C}^n$ の特性根(したがって固有値)，固有ベクトルを A の固有値，固有ベクトルと言うこともある．ただしこの場合，たとえば $M_n(\boldsymbol{C})$ の元としては対角化可能であっても，$M_n(\boldsymbol{R})$ の中では対角化可能とは限らないことに注意しなければならない．

たとえば $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\in M_2(\boldsymbol{R})$ とする．このとき線型変換 $\boldsymbol{R}^2\ni\boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^2$ は，Euclid 平面 E^2 に直交座標系を考えて $\boldsymbol{x}$ を E^2 上の点 P の位置ベクトル $(\boldsymbol{x}=(\overrightarrow{OP}))$ とみなせば，P を原点 O のまわりに正の方向に θ だけ回転する合同変換を表わしている．$A\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}$ $(\alpha\in\boldsymbol{R})$ とすれば，$\|A\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{x}\|$ により $\alpha=\pm1$ でなければならない．したがって $\theta=k\pi$ $(k\in\boldsymbol{Z})$．いいかえれば，$\theta\neq k\pi$ $(k\in\boldsymbol{Z})$ のときには，$\boldsymbol{R}^2$ 上の線型変換 $\boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}$ は固有ベクトルを持たないのである．一方

$$f_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \lambda-\cos\theta\end{vmatrix}=\lambda^2-2\cos\theta\cdot\lambda+1=0$$

$$\Leftrightarrow\ \lambda=\cos\theta\pm\sqrt{-1}\sin\theta=e^{\pm\sqrt{-1}\theta}.$$

ゆえに線型変換 $F_A:\boldsymbol{C}^2\ni\boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^2$ は，$\theta\neq k\pi$ のとき相異なる2個の固有値 $e^{\sqrt{-1}\theta}$, $e^{-\sqrt{-1}\theta}$ を持ち，対角化可能であることがわかる．実際，容易な計算により，$e^{\sqrt{-1}\theta}$ に属する固有空間の底は $\boldsymbol{a}_1={}^t(1,-\sqrt{-1})$ で，$e^{-\sqrt{-1}\theta}$ に属する固有空間の底は $\boldsymbol{a}_2={}^t(1,\sqrt{-1})$ で与えられることがわかるから，$P=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$ とすれば

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}e^{\sqrt{-1}\theta} & 0\\ 0 & e^{-\sqrt{-1}\theta}\end{bmatrix}. \qquad \text{——}$$

線型変換が対角化可能であるための判定法をもう一つ述べる．

定理 3.9　V を体 K 上の線型空間，$T:V\to V$ を線型変換とする．T が対角化可能であるためには，T の最小多項式 φ_T が相異なる1次式の積であること

(すなわち，特性根はすべて K の元であり，$\varphi_T(X)=0$ は重根をもたないこと)が必要十分である．

証明 T が対角化可能であるものとし，V の適当な底に関する行列が

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \alpha_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \alpha_r & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & \alpha_r \end{bmatrix} \quad (\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in K \text{ は相異なる})$$

で与えられたものとすれば明らかに

$$\varphi_T(X) = \varphi_A(X) = (X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_r).$$

逆に $\varphi_T(X)=(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_r)$ ($\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in K$ は相異なる T の固有値) として T が対角化可能であることを示す．定理3.8により $V=W_{\alpha_1}\dot{+}\cdots\dot{+}W_{\alpha_r}$ を示せばよい．ここで

$$W_{\alpha_i} = \{v \in V \mid Tv=\alpha_i v\} = \mathrm{Ker}(T-\alpha_i I)$$

であるから定理3.2により $\dim W_{\alpha_i}=n-\mathrm{rk}(T-\alpha_i I)$．一方，$\varphi_T(T)=(T-\alpha_1 I)\cdots(T-\alpha_r I)=O$ であるから (3.5) を任意の行列表示のもとでくり返し用い

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{rk}((T-\alpha_1 I)\cdots(T-\alpha_r I)) \\ &\geqq -n+\mathrm{rk}(T-\alpha_1 I)+\mathrm{rk}((T-\alpha_2 I)\cdots(T-\alpha_r I)) \\ &\geqq \cdots \geqq -\sum_{i=1}^{r-1}(n-\mathrm{rk}(T-\alpha_i I))+\mathrm{rk}(T-\alpha_r I) \\ &= n-\sum_{i=1}^{r}(n-\mathrm{rk}(T-\alpha_i I)). \end{aligned}$$

したがって $n\leqq\dim W_{\alpha_1}+\cdots+\dim W_{\alpha_r}\leqq n$ であり，たしかに $V=W_{\alpha_1}\dot{+}\cdots\dot{+}W_{\alpha_r}$ となる．▌

問 例3.25，例3.26，例3.27について定理3.9を復習せよ．——

例 3.28 V を体 K 上の線型空間，T_1, T_2 はともに対角化可能な V 上の線型変換とする．このとき $T_1T_2=T_2T_1$ ならば，T_1, T_2 は V のある一つの底によって同時に対角行列で表わされることを証明しよう．

まず $W\subset V$ を T_1 の固有空間とすれば，W は当然 T_1 不変であるが，さらに

T_2 不変でもあることに注意する．実際，W を T_1 の固有値 α に属する固有空間とすれば

$$x\in W \Longrightarrow T_1(T_2x)=T_2(T_1x)=\alpha T_2x \Longrightarrow T_2x\in W.$$

とくに $T_2|W\colon W\to W$ の固有ベクトルは，T_1, T_2 の共通の固有ベクトルである．

そこで $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ を T_1 の相異なる固有値とし，$W_i\ (1\leqq i\leqq r)$ を T_1 の α_i に属する固有空間とすれば，定理3.8により $V=W_1\dot{+}\cdots\dot{+}W_r$．上述のとおり，各 W_i は T_2 不変である．したがって補題3.1により $T_2|W_i$ の最小多項式は T_2 の最小多項式の約数であることがわかる．ゆえに定理3.9により T_2 が対角化可能ならば $T_2|W_i$ も対角化可能．したがって各 W_i の底として T_2 の固有ベクトルからなるものをとることができる．それ等を合わせた V の底をとれば，たしかに T_1, T_2 はともに対角行列で表わされる．——

d）射影子，広義固有空間

線型空間 V の直和分解 $V=W_1\dot{+}W_2$ が与えられたとき，これにしたがって $x\in V$ を $x=x_1+x_2\ (x_i\in W_i)$ と分解し，$P_i\colon V\ni x\mapsto x_i\in W_i$ によって V の線型変換 $P_i\ (i=1,2)$ を定義することができる．このとき $x\in W_i$ ならば $P_ix=x$，また $j\neq i$ とすれば $P_jx=o$．したがって

$$P_i^2=P_i \quad (i=1,2), \qquad P_1P_2=P_2P_1=O.$$

また明らかに

$$P_1+P_2=I.$$

この $P_i\ (i=1,2)$ を直和分解 $V=W_1\dot{+}W_2$ に関する W_1, W_2 への**射影子**という．このとき P_1, P_2 はともに直和分解に依存していることに注意しよう．たとえば W_1 は上と同じものとし，$V=W_1\dot{+}W_2'$，$W_2'\neq W_2$ のような直和分解を考えると，分解 $x=x_1'+x_2'\ (x_1'\in W_1,\ x_2'\in W_2')$ に関する $x_1'\in W_1$ は上述の x_1 と等しいとはかぎらない．部分空間 $W\subset V$ が与えられたときに，他に何の基準もなく W への射影子が定義できるというわけにはいかないのである．

一般に直和分解 $V=W_1\dot{+}W_2\dot{+}\cdots\dot{+}W_r$ が与えられたとき，これにしたがって $x\in V$ を $x=x_1+\cdots+x_r\ (x_i\in W_i)$ のように一意的に分解することができるから，$P_i\colon V\ni x\mapsto x_i\in W_i\subset V$ により，この直和分解に関する W_i への射影子を定義することができる．このとき上と同様に

$$P_i^2=P_i, \qquad P_iP_j=O \quad (i\neq j), \qquad P_1+\cdots+P_r=I.$$

また $W^{(i)}=W_1+\cdots+W_{i-1}+W_{i+1}+\cdots+W_n$ とおけば,

$$\operatorname{Ker} P_i = W^{(i)}, \qquad \operatorname{Im} P_i = W_i \cong V/W^{(i)}$$

であり, $P_i: V \ni x \mapsto x_i \in W_i$ は自然射影 $V \to V/W^{(i)}$ を与えるものと考えて $W_i = V/W^{(i)}$ と同一視することができる.

一般に線型空間 V の線型変換 P が $P^2=P$ をみたしているとき, P は V の**ベキ等変換**であるという. とくに線型変換 $P \neq I, O$ がベキ等変換であるための必要十分条件は, P の最小多項式が

$$\varphi_P(X) = X^2-X = X(X-1) \tag{3.49}$$

となることである. また $x \in \operatorname{Im} P \Leftrightarrow Px=x$ に注意しよう.

P がベキ等変換ならば $P'=I-P$ もベキ等変換であることがわかる. 実際,

$$(P')^2 = (I-P)^2 = I-2P+P = I-P = P'.$$

このとき $W=\operatorname{Im} P$, $W'=\operatorname{Im} P'$ とおけば

$$x \in W' \Leftrightarrow (I-P)x = x \Leftrightarrow Px = o.$$

すなわち, $W'=\operatorname{Ker} P$, $W \cap W'=\{o\}$ である. したがって $x=Px+(I-P)x$ により $V=W \dotplus W'$ であり, P はこの直和分解に関する W への射影子である.

定理 3.10 線型空間 V の線型変換 $P_1, \cdots, P_r$ が

$$P_iP_j = O \quad (i \neq j), \qquad P_1+\cdots+P_r = I \tag{3.50}$$

をみたしているとき, $W_i=\operatorname{Im} P_i \ (1 \leqq i \leqq r)$ とおけば, $V=W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_r$ であり, P_i はこの直和分解に関する W_i への射影子である. また $G \subset L(V, V)$ とするとき, 任意の $T \in G$ が $P_i \ (1 \leqq i \leqq r)$ と可換ならば, $W_i \ (1 \leqq i \leqq r)$ は G 不変である.

証明 まず (3.50) により $P_i \ (1 \leqq i \leqq r)$ がベキ等変換であることは明らか. したがって

$$y_j \in W_j \Leftrightarrow P_jy_j = y_j \qquad (1 \leqq j \leqq r).$$

また $V \ni \forall x=P_1x+\cdots+P_rx$ であるから, $V=W_1+\cdots+W_r$. そこで $W_i'=W_1+\cdots+W_{i-1}+W_{i+1}+\cdots+W_r$ とおき, $y \in W_i \cap W_i'$ とすれば

$$\begin{aligned} y &= y_1+\cdots+y_{i-1}+y_{i+1}+\cdots+y_r \\ &= P_1y_1+\cdots+P_{i-1}y_{i-1}+P_{i+1}y_{i+1}+\cdots+P_ry_r \\ &= P_iy = P_i(P_1y_1+\cdots+P_{i-1}y_{i-1}+P_{i+1}y_{i+1}+\cdots+P_ry_r) \\ &= o. \end{aligned}$$

したがって $W_i \cap W_i'=\{o\}$. ゆえに $V=W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_r$ であり, $P_i \ (1 \leqq i \leqq r)$ は

この直和分解に関する W_i への射影子である．

任意の $T\in G$ が $P_iT=TP_i$ $(1\leqq i\leqq r)$ をみたすならば，任意の $x\in W_i$ に対し $P_i(Tx)=T(P_ix)=Tx$ であるから $Tx\in W_i$．ゆえに W_i は G 不変である．▌

体 K 上の多項式環 $K[X]$ について第2章で述べた次の性質を思い出そう：$m_1,\cdots,m_r\in K[X]$ で生成されるイデアルを J とし，φ を $m_1,\cdots,m_r$ の最大公約数とすれば

(3.51)
$$J=(\varphi).$$

したがって，とくに $h_1,\cdots,h_r\in K[X]$ を適当にとって $\varphi=h_1m_1+\cdots+h_rm_r$ と表わすことができる．証明は有理整数環の場合とほとんど同様であるが，念のため示しておく．

[(3.51) の証明]　φ を J に属する0ではない多項式のうちで次数が最小のものとすれば $J=(\varphi)$ である (例2.15)．φ の最高次の係数を1とすればこれは一意的に定まる．φ が $m_1,\cdots,m_r$ の最大公約数であることをいうのである．$\varphi\in J$ であるから $h_1,\cdots,h_r\in K[X]$ を適当にとれば，$\varphi=h_1m_1+\cdots+h_rm_r$．したがって $m_1,\cdots,m_r$ の任意の公約数は φ の約数である．一方，とくに $m_i\in J$ であることにより $\varphi|m_i$．したがって φ 自身 $m_1,\cdots,m_r$ の公約数である．▌

とくに $m_1,\cdots,m_r$ が互いに素であるとき，すなわち1が最大公約数であるとき，$h_1,\cdots,h_r\in K[X]$ を適当にとれば，$h_1m_1+\cdots+h_rm_r=1$ となるわけである．たとえば，$p_1,\cdots,p_r\in K[X]$ を相異なる K 上の既約多項式 (1および自分自身，あるいはそれ等に K の元をかけたもの以外に約数 $\in K[X]$ のない多項式) とすれば，$p_1^{\nu_1},\cdots,p_r^{\nu_r}$ ($\nu_1,\cdots,\nu_r$ は正の整数) は互いに素である．さらに，$\psi_i=\prod_{j\neq i}p_j^{\nu_j}$ $(1\leqq i\leqq r)$ とおけば $\psi_1,\cdots,\psi_r$ も互いに素である．

定理3.11　V を体 K 上の線型空間とし，線型変換 $T\colon V\to V$ の最小多項式 φ_T が相異なる K 上の既約多項式 $p_1,\cdots,p_r$ によって $\varphi_T=p_1^{\nu_1}\cdots p_r^{\nu_r}$ ($\nu_1,\cdots,\nu_r$ は正の整数) と表わされているものとする．このとき

$$W_i=\mathrm{Ker}(p_i(T)^{\nu_i})\qquad(1\leqq i\leqq r)$$

とおけば，W_i は T 不変であり，$V=W_1\dot{+}\cdots\dot{+}W_r$ となる．また p_i の最高次の係数を1とすれば，$T|W_i$ の最小多項式は $p_i^{\nu_i}$ である．

証明　$\psi_i=\prod_{j\neq i}p_j^{\nu_j}$ $(1\leqq i\leqq r)$ とおけば，$\psi_1,\cdots,\psi_r$ は互いに素であるから，$h_1,\cdots,h_r\in K[X]$ を適当にとれば

$$h_1\psi_1+\cdots+h_r\psi_r=1.$$

また $i\neq j$ ならば $\psi_i\psi_j$ は φ_T の倍数である．そこで

$$P_i=h_i(T)\psi_i(T) \qquad (1\leqq i\leqq r)$$

とおけば，$P_iP_j=O$ $(i\neq j)$，$P_1+\cdots+P_r=I$ であり，$P_1,\cdots,P_r$ は定理3.10の条件(3.50)をみたしている．したがって $W_i=\mathrm{Im}\,P_i$ $(1\leqq i\leqq r)$ とおけば，$V=W_1\dotplus\cdots\dotplus W_r$ である．

ところで $p_i^{\nu_i}\psi_i=\varphi_T$ であるから $p_i^{\nu_i}(T)P_i=O$，ゆえに $W_i\subset\mathrm{Ker}(p_i(T)^{\nu_i})$ である．逆の包含関係を証明しよう．$P_iT=TP_i$ であるから定理3.10により W_i は T 不変である．$x\in\mathrm{Ker}(p_i(T)^{\nu_i})$ とする．$h_1\psi_1+\cdots+h_r\psi_r=1$ であるから，$h_i\psi_i$ と $p_i^{\nu_i}$ とは互いに素である．そこで $a,b\in K[X]$ を $ah_i\psi_i+bp^{\nu_i}=1$ であるようにとれば

$$x=(a(T)P_i+b(T)p_i^{\nu_i}(T))x=a(T)P_ix\in W_i.$$

ゆえに $W_i=\mathrm{Ker}(p_i(T)^{\nu_i})$ である．

ϕ_i を $T|W_i$ の最小多項式とすれば $\phi_1(T)\cdots\phi_r(T)=O$ であるから，$\phi_1\cdots\phi_r$ は $\varphi_T=p_1^{\nu_1}\cdots p_r^{\nu_r}$ の倍数．一方，$p_i(T)^{\nu_i}|W_i=O$ であるから，$p_i^{\nu_i}$ は ϕ_i の倍数であり，次数の関係から，けっきょく $\phi_i=p_i^{\nu_i}$ でなければならない．▮

前に述べたとおり，T の特性根はすべて最小多項式 φ_T の根である．一方，T の特性根がすべて固有値であったとしても，V が固有空間の直和に分解されるとは限らないことは，たとえば例3.25からもわかる．つまり T は対角化可能とは限らないのである．そのような場合にも定理3.11は，ある種の‘よい行列表示’の可能性を示していると考えることができる．

φ_T は体 K 上で完全に1次式の積に分解しているものとしよう：$\varphi_T(X)=(X-\alpha_1)^{\nu_1}\cdots(X-\alpha_r)^{\nu_r}$ $(\alpha_1,\cdots,\alpha_r\in K$ は相異なる T の固有値)．このとき定理3.11により

$$\widetilde{W}_{\alpha_i}=\mathrm{Ker}(T-\alpha_iI)^{\nu_i}=\{v\in V\,|\,(T-\alpha_iI)^{\nu_i}v=o\}$$

とおけば $V=\widetilde{W}_{\alpha_1}\dotplus\cdots\dotplus\widetilde{W}_{\alpha_r}$ である．α_i に属する固有空間を W_{α_i} とすれば明らかに $W_{\alpha_i}\subset\widetilde{W}_{\alpha_i}$ であり，とくに $\nu_i=1$ ならば $W_{\alpha_i}=\widetilde{W}_{\alpha_i}$．このことからも定理3.9を証明することができるのであり，その意味で定理3.11を定理3.9の一般化と考えてもよい．そこで $\widetilde{W}_{\alpha_i}$ を固有値 α_i に属する**広義固有空間**という．

さらに $k=1,2,\cdots,\nu_i$ に対して $W_{\alpha_i}{}^{(k)}=\mathrm{Ker}(T-\alpha_iI)^k$ とおけば，明らかに

$$W_{\alpha_i} = W_{\alpha_i}{}^{(1)} \subset W_{\alpha_i}{}^{(2)} \subset \cdots \subset W_{\alpha_i}{}^{(\nu_i)} = \widetilde{W}_{\alpha_i}.$$

そこで $\dim W_{\alpha_i}{}^{(k)} = n_i{}^{(k)}$, $n_i = n_i{}^{(\nu_i)}$ として, $\widetilde{W}_{\alpha_i}$ の底 $(u_1, \cdots, u_{n_i})$ を $(u_1, \cdots, u_{n_i}{}^{(k)})$ が $W_{\alpha_i}{}^{(k)}$ の底をなすようにとれば, 各 $W_{\alpha_i}{}^{(k)}$ は T 不変であるから, ベキ零変換 $N_i = (T - \alpha_i I) | \widetilde{W}_{\alpha_i}$ の底 $(u_1, \cdots, u_{n_i})$ に関する行列は (少なくとも) 対角成分がすべて 0 の上三角行列で与えられる. したがって各直和因子 $\widetilde{W}_{\alpha_i}$ $(1 \leqq i \leqq r)$ についてこのような底をとり, それらを合わせて V の底 $\mathfrak{A}$ とすれば, $\mathfrak{A}$ に関する T の行列は

$$A = \begin{bmatrix} A^{(1)} & & & 0 \\ & A^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A^{(r)} \end{bmatrix}, \quad A^{(i)} = \begin{bmatrix} \alpha_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_i \end{bmatrix} \in M_{n_i}(K) \tag{3.52}$$

の形で与えられることがわかる.

底のとり方をさらに精密にして (3.52) から, T の 'Jordan 標準形' を導くこともできるが, われわれはそのことについては議論を省く.

定理 3.12 (Frobenius) V を体 K 上の線型空間とし, 線型変換 $T: V \to V$ の最小多項式は体 K 上で完全に 1 次式の積に分解するものとする. このとき任意の $g \in K[X]$ に対して $g(T)$ の最小多項式も K 上で完全に 1 次式の積に分解し, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ を T の (相異なる) すべての固有値とすれば, $g(T)$ のすべての固有値は $g(\alpha_1), \cdots, g(\alpha_r)$ (ただし相異なるとは限らない) で与えられる.

証明 T の最小多項式を φ_T とすれば, 仮定により

$$\varphi_T(X) = (X - \alpha_1)^{\nu_1} \cdots (X - \alpha_r)^{\nu_r}.$$

したがって V の適当な底 $\mathfrak{A}$ に関する T の行列は (3.52) の形になる. このとき $g(T)$ の底 $\mathfrak{A}$ に関する行列は

$$g(A) = \begin{bmatrix} g(A^{(1)}) & & & 0 \\ & g(A^{(2)}) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & g(A^{(r)}) \end{bmatrix}, \quad g(A^{(i)}) = \begin{bmatrix} g(\alpha_i) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & g(\alpha_i) \end{bmatrix}.$$

$B_i = g(A^{(i)}) \in M_{n_i}(K)$ とおけば $(B_i - g(\alpha_i) I_{n_i})^{n_i} = O_{n_i}$ であり, B_i の最小多項式は $\psi_i(X) = (X - g(\alpha_i))^{\mu_i}$ の形であることがわかる. 補題 3.1 により $S = g(T)$ の最小多項式 φ_S は $\psi_1, \cdots, \psi_r$ の最小公倍数であるから

$$\varphi_S(X) = (X-g(\alpha_1))^{\rho_1}\cdots(X-g(\alpha_r))^{\rho_r} \qquad (1 \leqq \rho_i \leqq \mu_i)$$

の形である. ▌

例 3.29
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_0 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \in M_3(\boldsymbol{C})$$

とすれば $B=a_0I+a_1A+a_2A^2$. 一方 (3.35) により $\varphi_A(X)=f_A(X)=X^3-1$ であるから, $\omega=(-1+\sqrt{-3})/2$ とすれば A の固有値は $1, \omega, \omega^2$ である. したがって B の固有値は

$$a_0+a_1+a_2, \qquad a_0+a_1\omega+a_2\omega^2, \qquad a_0+a_1\omega^2+a_2\omega$$

で与えられる. ——

§3.4 体の拡大

a) 環の準同型定理, 素体

以下環としては‘単位元をもつ可換環’だけを考える. また R, R' を単位元をもつ可換環とするとき, 写像 $F: R\to R'$ が**準同型写像**であるとは

(1) $F(a+b) = F(a)+F(b), \quad F(ab) = F(a)F(b)$,

(2) $F(1_R) = 1_{R'} \quad (1_R, 1_{R'}$ は R, R' の単位元)

の二つの条件をみたす写像のこととする. 以下単に環, 準同型写像というときには, 常にこれ等の条件のもとで考えるものとする. とくにある準同型写像 $\varphi: R\to R'$ が全単射であるとき, R は R' に**同型**であるといい, $R\cong R'$ で表わす. このとき φ を同型写像という.

環 R の部分集合 $J\subset R$ で, (1) $x, y\in J \Longrightarrow x+y\in J$, (2) $x\in J, a\in R \Longrightarrow ax\in J$ の二つの条件をみたすものを R のイデアルというのであった. たとえば $a\in R$ に対して $(a)=\{qa \mid q\in R\}$ は R のイデアル (単項イデアルという) である. 環の準同型写像 $F: R\to R'$ による R の零元 0 の像は R' の零元である. 実際, $F(0)=F(0+0)=F(0)+F(0)$.

R' の零元 $0'$ の逆像 $F^{-1}(0')$ を準同型写像 $F: R\to R'$ の**核**といい, $\operatorname{Ker} F$ で表わす. $\operatorname{Ker} F=F^{-1}(0')$ は R のイデアルである. 実際,

$$x, y\in \operatorname{Ker} F \Longrightarrow F(x+y) = F(x)+F(y) = 0'+0' = 0',$$
$$x\in \operatorname{Ker} F,\ a\in R \Longrightarrow F(ax) = F(a)F(x) = F(a)0' = 0'.$$

一般に環 R のイデアル J が与えられたとき，J を法とする**合同関係**を

$$x \equiv y\ (J) \iff x-y \in J \qquad (x, y \in R)$$

によって定義する．有理整数環 $\boldsymbol{Z}$ における合同関係と同様に，これは R に一つの同値関係を定める．R の J を法とする合同関係による商集合を R/J で表わし，$\varpi: R \to R/J$ を射影とする．R/J に次のように加法，乗法を定義しよう：

$$(3.53) \qquad \varpi(x+y) = \varpi(x)+\varpi(y), \qquad \varpi(xy) = \varpi(x)\varpi(y).$$

問 演算の定義(3.53)が代表元 x, y のとり方に無関係であることを示せ．(有理整数環 $\boldsymbol{Z}$ の剰余類環 $\boldsymbol{Z}/(n)$ の場合と同様である．第1章，§1.3, d)参照) ——

演算の定義(3.53)によって R/J が環になること(とくに単位元は R の単位元の像 $\varpi(1)$，零元は R の零元の像 $\varpi(0)$)，射影 $\varpi: R \to R/J$ が環の準同型写像であり，$J = \mathrm{Ker}\,\varpi$ であること等は，すべて定義から明らかである．環 R/J を R の J を法とする**剰余類環**という．とくに R/J が整域になるとき，J を**素イデアル**，さらに R/J が体である場合には J を**極大イデアル**という．

イデアル J に関するこれ等の名称はそれぞれ次のような事情にもとづいているのである．

"J は R の素イデアル $\iff a, b \in R,\ ab \in J$ ならば，$a \in J$ または $b \in J$."

[証明] R/J が整域であるとは，$\varpi(a)\varpi(b) = \varpi(ab) = 0$ (すなわち $ab \in J$) ならば，$\varpi(a) = 0$ (すなわち $a \in J$) または $\varpi(b) = 0$ (すなわち $b \in J$) となっていることである．▌

"J は R の極大イデアル $\iff J \neq R$ であり，J' が $J \subset J' \neq R$ であるようなイデアルとすれば，$J' = J$."

[証明] 一般に体 K のイデアルは (0) および K 自身以外にはない．($J \subset K$ が K のイデアルで $J \neq (0)$ であるものとすれば，$0 \neq x \in J$ は逆元をもつから $x^{-1}x = 1 \in J$ であり，したがって $K = (1) = J$.) ところが $\bar{J}' \subset R/J$ がイデアル $\iff J' = \varpi^{-1}(\bar{J}')$ が R のイデアル．したがって R/J が体 $\iff J' = J$ または $J' = R$. ▌

極大イデアルは定義から明らかに素イデアルであるが，一般には素イデアルが極大イデアルとは限らない．しかし以下でわれわれが取り扱う環は主として有理整数環 $\boldsymbol{Z}$ と体 K 上の1変数多項式環 $K[X]$ であり，この二つの場合には，(0) ではない素イデアルはつねに極大イデアルである．それは $\boldsymbol{Z}$, $K[X]$ は整域であり，どちらの場合にも任意のイデアルが単項イデアルである(§1.3, d)および例

2.15)ことによる．つまり一般に

“整域 R の任意のイデアルは R の一つの元だけによって生成されているものとする．このとき (0) とは異なる任意の素イデアルは極大イデアルである.”

[証明] $J\neq(0)$ を R の素イデアルとし，$J'\neq R$ は $J\subset J'$ であるような任意のイデアルとする．仮定によって，R のある元 $p\neq 0$ および a により $J=(p)$，$J'=(a)$．$J'\neq R$ だから a は逆元をもたない．$J\subset J'$ により $\exists q\in R: p=qa$．ところが J は素イデアルだから $q\in J$ または $a\in J$ でなければならない．$q\in J$ とすれば $\exists r\in R: q=rp$，したがって $p=rpa$ である．すなわち $p(1-ra)=0$ であるが，これは R が整域であり，$p\neq 0$，しかも a は逆元をもたないという仮定に反する．ゆえに $a\in J$ であり，$J'=J$ となる．▌

環 R の元 a を $a=bc$ $(b,c\in R)$ と表わせるのが，b または c の少なくとも一方が正則元(逆元をもつ元)である場合に限るとき，a を R の**既約元**という．R が整域のとき，$0\neq p\in R$ であって (p) が素イデアルであるものとすれば，p は既約元である．実際，$p=bc$ とすれば $b\in(p)$ または $c\in(p)$ であるが，$b\in(p)$，$b=rp$ とすれば $p(1-rc)=0$ であるから $rc=1$．ゆえに c は正則元である．

例 3.30 $\boldsymbol{Z}$ の正則元は ± 1，$K[X]$ の正則元は $K^{\times}=K-\{0\}$ の元である．$\boldsymbol{Z}$ の既約元とは $\pm$(素数)のことである．また $K[X]$ の既約元は，実係数の多項式の場合と同様に，K 上の既約多項式とよばれる．ところで $R=\boldsymbol{Z}$ または $K[X]$ の場合，$p\in R$ が既約元ならば $J=(p)$ は素イデアル，したがってまた極大イデアルである．実際 $a\notin J$ ならば，p が既約元のとき a,p は互いに素であるから $\exists m, n\in R: ma+np=1$．したがって射影 $\varpi: R\to R/J$ によって $\varpi(m)\varpi(a)=1$ であり，R/J は体であることがわかる．——

定理 3.13 $F: R\to R'$ を環の準同型写像とすれば $\mathrm{Im}\,F=F(R)$ は R' の部分環であり，$\mathrm{Im}\,F\cong R/\mathrm{Ker}\,F$.

とくに R が体で，$\mathrm{Im}\,F\neq\{0'\}$ ならば F は単射であり，$\mathrm{Im}\,F$ は R と同型な体である．

証明 $\mathrm{Im}\,F$ が R' の部分環であることは明らか．$J=\mathrm{Ker}\,F$ とおき，$\varpi: R\to R/J$ を射影とすれば，$x,y\in R$ に対して

$$\varpi(x)=\varpi(y) \Leftrightarrow x-y\in J \Leftrightarrow F(x-y)=0' \Leftrightarrow F(x)=F(y).$$

したがって全単射 $\varphi: R/J\ni\varpi(x)\mapsto F(x)\in\mathrm{Im}\,F$ $(x\in R)$ を定義することができ

る．φ が環の準同型写像であることも容易にわかる．とくに R, R', R/J の単位元を 1_R, $1_{R'}$, $1=\varpi(1_R)$ とすれば $\varphi(1)=\varphi(\varpi(1_R))=F(1_R)=1_{R'}$ である．

R が体ならば，イデアル $J=\mathrm{Ker}\,F$ は (0) または R 自身であるが，$\mathrm{Im}\,F\neq\{0'\}$ とすれば $J=(0)$．したがって F は単射である．∎

例 3.31 $m, n\in \boldsymbol{Z}$ はともに $\neq 0$ とし，$\varpi_1:\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Z}/(m)=R_1$, $\varpi_2:\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Z}/(n)=R_2$ を射影とする．直積集合 $R_1\times R_2$ に

$$(\varpi_1(x_1), \varpi_2(x_2))+(\varpi_1(y_1), \varpi_2(y_2)) = (\varpi_1(x_1+y_1), \varpi_2(x_2+y_2)),$$
$$(\varpi_1(x_1), \varpi_2(x_2))\cdot(\varpi_1(y_1), \varpi_2(y_2)) = (\varpi_1(x_1y_1), \varpi_2(x_2y_2))$$

によって加法，乗法を定義すれば，$R_1\times R_2$ はまた単位元 $(\varpi_1(1), \varpi_2(1))$ をもつ可換環である．このとき

$$F:\boldsymbol{Z}\ni x\longmapsto(\varpi_1(x), \varpi_2(x))\in R_1\times R_2$$

により準同型写像を定義すれば

$$(\varpi_1(x), \varpi_2(x))\ \text{が}\ R_1\times R_2\ \text{の零元}\iff m|x,\ \ n|x$$

であるから，m, n の最小公倍数を l とすれば $\mathrm{Ker}\,F=(l)$．ゆえに $\boldsymbol{Z}/(m)\times\boldsymbol{Z}/(n)\supset\mathrm{Im}\,F\cong\boldsymbol{Z}/(l)$．——

例 3.32 有理数体 $\boldsymbol{Q}$ 上の1変数多項式環 $\boldsymbol{Q}[X]$ に既約多項式 p を一つ固定しておき，$\alpha\in\boldsymbol{C}$ を $p(X)=0$ の一つの根とする．$J_\alpha=\{f\in\boldsymbol{Q}[X]\,|\,f(\alpha)=0\}$ は明らかに $\boldsymbol{Q}[X]$ のイデアルであり，$p\in J_\alpha$ であるが，p は既約多項式であるから $J_\alpha=(p)$．準同型写像 $F:\boldsymbol{Q}[X]\ni f\mapsto f(\alpha)\in\boldsymbol{C}$ の核がちょうど (p) になっているから $\mathrm{Im}\,F\cong\boldsymbol{Q}[X]/(p)$ であるが，(p) は $\boldsymbol{Q}[X]$ の極大イデアルだから $\boldsymbol{Q}[X]/(p)$ は体である．体 $\mathrm{Im}\,F(\subset\boldsymbol{C})$ を $\boldsymbol{Q}(\alpha)$ で表わす．——

問 例3.32の体 $\boldsymbol{Q}(\alpha)$ は，$\deg p=n$ とすれば $\boldsymbol{Q}$ 上の n 次元線型空間とみなせることを示せ．——

環 R の単位元を1とするとき，$n\cdot 1=1+\cdots+1$ (n 回) $=0$ となる正の整数 n のうちで最小のものを R の**標数**という．そのような正の整数 n がないとき，R の標数は0であるという．環 R の標数を $p\neq 0$ とすれば，任意の $a\in R$ に対して

$$pa = a+\cdots+a\ (p\ \text{回}) = a(p\cdot 1) = a\cdot 0 = 0.$$

とくに R が整域ならば，その標数 p は0でなければ素数である．実際，$p=mn\neq 0$, $m\geqq 2$, $n\geqq 2$ (整数) であれば $R\ni p\cdot 1=(m\cdot 1)(n\cdot 1)=0$ であるが，R は整域であるから $m\cdot 1=0$ または $n\cdot 1=0$ となり，これは標数の定義に反する．

体 K の単位元1で生成された部分環 $I=\{n\cdot 1 \mid n\in \boldsymbol{Z}\}$ をかりに K の素整域とよぶ．K の標数 p が0でなければ(したがって素数であるならば)，I の元の個数は明らかに p に等しい．K の素整域 I の商体 Π を K の**素体**といい，とくに $K=\Pi$ のとき K は素体であるという．すなわち体 K の素体とは，K の最小の部分体のことであり，K が真の部分体をもたないとき，K 自身を素体というのである．

"体 K の標数を p とする．$p\neq 0$ ならば K の素整域は素体であり，これは $\boldsymbol{F}_p=\boldsymbol{Z}/(p)$ と同型である．$p=0$ のときには K の素整域は $\boldsymbol{Z}$ と同型，したがって K の素体は有理数体 $\boldsymbol{Q}$ と同型である．"

[証明] $F:\boldsymbol{Z}\ni n\mapsto n\cdot 1\in K$ (1は K の単位元)は明らかに環の準同型写像であり，$\mathrm{Im}\, F$ は K の素整域．また K の標数を p とすれば $\mathrm{Ker}\, F=(p)\subset\boldsymbol{Z}$ である．定理3.13により $\mathrm{Im}\, F\cong\boldsymbol{Z}/(p)$ であるから，$p\neq 0$ ならば，素整域＝素体 $\cong\boldsymbol{F}_p$，$p=0$ ならば，素整域 $\cong\boldsymbol{Z}$ である．▮

b) 代数拡大体

体 K のある拡大体 L において $\alpha\in L$ が K 上**代数的**な元であるとは，K 係数の1変数多項式 $f\in K[X]$ を適当にとると $f(\alpha)=0$ となること，すなわち，α が K 上の代数方程式 $f(X)=0$ の根になっていることである．L の元で K 上代数的でない元は K 上**超越的**であるという．K の拡大体 L の元がすべて K 上代数的である場合に L を K の**代数拡大体**，そうではないとき L を K の超越拡大体という．

L を体 K の一つの拡大体，$\alpha\in L$ を K 上代数的な元とし，多項式環 $K[X]$ のイデアル $J_\alpha=\{f\in K[X] \mid f(\alpha)=0\}$ の生成元(したがって J_α の中で最低次数の多項式)を φ_α としよう：$J_\alpha=(\varphi_\alpha)$．$K$ は体であるから φ_α の最高次の係数は1としてよい．このとき φ_α を α の K に関する**最小多項式**という．φ_α は K 上の既約多項式である．実際，$\varphi_\alpha=fg$ $(f,g\in K[X])$ とすれば $f(\alpha)g(\alpha)=\varphi_\alpha(\alpha)=0$ であるが，K は体であるから $f(\alpha)=0$ または $g(\alpha)=0$ となり，φ_α は J_α の中で最低次数の多項式であったから，f,g の一方は定数($\in K$)．ゆえにまた J_α は $K[X]$ の素イデアル(したがって極大イデアル)である．

定理 3.14 L を体 K の拡大体，$\alpha\in L$ を K 上代数的な元とし，α の最小多項式を $\varphi_\alpha(X)=X^n+a_1X^{n-1}+\cdots+a_n$ $(a_i\in K)$ とする．このとき，$K(\alpha)=\{f(\alpha)|$

$f\in K[X]\}$ は L の部分体である．$K(\alpha)$ は K 上の線型空間として n 次元であり，$(1,\alpha,\cdots,\alpha^{n-1})$ はその一つの底である．

証明 $F:K[X]\ni f\mapsto f(\alpha)\in L$ は明らかに環の準同型写像であり，$\mathrm{Ker}\,F=J_\alpha=(\varphi_\alpha)$．$J_\alpha$ は $K[X]$ の素イデアルであるから $K(\alpha)=\mathrm{Im}\,F\cong K[X]/J_\alpha$ は L の部分体になる．

$f(\alpha)\in K[\alpha]$，$\deg f\geqq n$ のとき $q,r\in K[X]$ を適当にとり $f=q\varphi_\alpha+r$ とすれば $f(\alpha)=r(\alpha)$．したがって $K(\alpha)$ の任意の元は $1,\alpha,\cdots,\alpha^{n-1}$ の K 係数の線型結合である．一方，$1,\alpha,\cdots,\alpha^{n-1}$ の自明でない線型関係 $b_0+b_1\alpha+\cdots+b_{n-1}\alpha^{n-1}=0$ $(b_i\in K)$ があるとすれば，$f(X)=b_0+b_1X+\cdots+b_{n-1}X^{n-1}$ は J_α の元であり，$\deg f<\deg\varphi_\alpha$ となって矛盾．したがって $(1,\alpha,\cdots,\alpha^{n-1})$ は K 上の線型空間 $K(\alpha)$ の底である．▮

一般に体 K 上にその拡大体 L の‘ある元 ξ $(\in L)$ を付加した環’$K[\xi]=\{f(\xi)\mid f\in K[X]\}$ は，体 L の部分環として整域である．その商体 $K(\xi)$（自然に L の部分体とみなせる）を K に ξ を付加して得られる**単拡大体**という．定理3.14は $\xi=\alpha$ が K 上代数的な場合について述べている $(K[\alpha]=K(\alpha))$．ξ が K 上超越的である場合には準同型写像 $F:K[X]\ni f\mapsto f(\xi)\in L$ は単射 $(\mathrm{Ker}\,F=(0))$ であるから $K[\xi]=\mathrm{Im}\,F\cong K[X]$ であり，したがって $K(\xi)$ は K 上の1変数有理関数体 $K(X)$ と同型である．

体 L がその部分体 K 上の線型空間として有限次元であるか無限次元であるかに従って，L を**有限次拡大体**あるいは無限次拡大体という．L の K 上の線型空間としての次元を拡大 L/K の**次数**といい，$[L:K]$ で表わすのがふつうである．

“体 K の拡大体 L の元 $\xi\in L$ が K 上代数的であることと，$[K(\xi):K]<\infty$ であることとは同値である．”

［証明］ ξ が K 上代数的ならば $[K(\xi):K]<\infty$ であることは定理3.14による．逆に $[K(\xi):K]<\infty$ ならば，十分大きな正の整数 n $(\leqq[K(\xi):K])$ に対して $1,\xi,\cdots,\xi^n$ は K 上線型従属となるから ξ は代数的である．▮

また，L を K の，M を L のそれぞれ有限次拡大体とすれば，M は K の有限次拡大体であり，

(3.54) $$[M:K]=[M:L][L:K].$$

［証明］ L の K 上の線型空間としての底を $(a_1,\cdots,a_l)$，M の L 上の線型空間

としての底を $(b_1, \cdots, b_m)$ とする．このとき $\{a_i b_j \mid 1 \leqq i \leqq l,\ 1 \leqq j \leqq m\}$ が M の K 上の線型空間としての底をなすことをいえばよい．$\sum_{i,j} \alpha_{ij} a_i b_j = 0\ (\alpha_{ij} \in K)$ とすれば $b_1, \cdots, b_m$ の線型独立性により $\sum_i \alpha_{ij} a_i = 0\ (1 \leqq j \leqq m)$．したがって $\alpha_{ij} = 0\ (1 \leqq i \leqq l,\ 1 \leqq j \leqq m)$ であり，$\{a_i b_j\}$ は K 上線型独立である．一方，任意の $\xi \in M$ は $\xi = \sum_{j=1}^{m} \beta_j b_j\ (\beta_j \in L)$ と表わされるが，各 β_j は $\beta_j = \sum_{i=1}^{l} \alpha_{ij} a_i\ (\alpha_{ij} \in K)$ と表わされるから，$\xi = \sum_{i,j} \alpha_{ij} a_i b_j$．▌

これ等のことを用いて次のことを証明できる：

"体 K の任意の有限次拡大体は K の代数拡大体."

［証明］ $[L:K] < \infty$ のとき，任意の $\xi \in L$ が K 上代数的であることをいえばよい．(3.54) により $[L:K] = [L:K(\xi)][K(\xi):K]$ であるから，$[K(\xi):K] < \infty$．▌

体の代数拡大についてのここまでの議論は，われわれがこれまでに学んだ線型代数の知識だけで十分理解できる初等的なものである．しかし，たとえば実係数の代数方程式に関する議論が複素数体を考えることによってはじめて完全なものになるのと同様に，一般の体 K についても K 上の定数ではない任意の多項式が完全に 1 次式の積に分解できるような拡大体の存在とその性質が確立されて，はじめて K 上の代数学が完全に議論できるものとなるのである．

一般に体 Ω 上の定数ではない任意の多項式 $(\in \Omega[X])$ が Ω 係数の 1 次式の積に完全に分解されてしまうとき，すなわち，任意の $f \in \Omega[X]$, $\deg f \geqq 1$ に関する代数方程式 $f(X) = 0$ が Ω の中に根をもつ $(\exists \alpha \in \Omega : f(\alpha) = 0)$ とき，Ω を**代数的閉体**という．Ω の代数拡大体は Ω 自身だけであるということに他ならない．複素数体 $\boldsymbol{C}$ が代数的閉体であることは，代数学の基本定理としてよく知られている．体 K の代数拡大体であるような代数的閉体の一つを $\bar{K}$ で表わし，これを K の**代数的閉包**という．代数的閉包に関しては次の諸性質が基本的である：

(1) 任意の体 K に対してその代数的閉包が存在する．

(2) K_1, K_2 を同型な体とし，$\varphi : K_1 \to K_2$ を同型写像とすれば，φ は $\bar{K}_1$ から $\bar{K}_2$ への同型写像に拡張される．したがってとくに任意の体 K に対してその代数的閉包 $\bar{K}$ は同型を除き一意的に定まる．

(3) 体 K の代数的閉包を $\bar{K}$，L を K の任意の代数拡大体とすれば，準同型単射 $\varphi : L \to \bar{K}$ で $\varphi | K$ が K 上の恒等変換となるものが存在する．したがってそ

のような φ の一つによって L をはじめから $\bar{K}$ の部分体とみなすこともできる．

これ等の性質を多くの紙数を割いて証明することは本講の目的にはそぐわないので，あえて証明を省略するが，事実だけでも心得ておくことは大切である．体の拡大に関するその他の重要な議論についても，これ以上は立ち入らない[1]．

ただし§3.3, c) で述べた特性根の意味を明確にするためにも，任意に与えられた一つの多項式についてはそれが完全に1次式に分解されるような拡大体が必ず存在するということだけは示しておこう．

体 K 上の1変数多項式 $f\in K[X]$ に対して，K の拡大体 L で，$f(X)=a_0(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)$ $(n=\deg f,\ \alpha_i\in L)$ となるもののことを f の**分解体**という．とくに K と $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ とを含む L の最小の部分体が L 自身と一致するとき，L を f の**最小分解体**という．代数的閉包に関する上記の (1), (2), (3) を仮定すれば，任意の $f\in K[X]$ に対してその最小分解体を $\bar{K}$ の中で得ることができ，$\bar{K}$ の中では一意的に定まることも容易にわかるが，ここでは一意性はともかく，存在だけを独立に証明するのである．

定理 3.15　体 K 上の任意の多項式 $f\in K[X]$ に対し，f の分解体が存在する．

証明　f が K 上で1次式の積に分解されている場合には K 自身が f の分解体である．f が2次以上の既約因数 $p_1\in K[X]$ をもつものとしよう．p_1 で生成されるイデアル (p_1) は $K[X]$ の極大イデアルだから $L_1=K[X]/(p_1)$ は体であり，自然に $K\subset L_1$ (K の拡大体) と考えることができる．単項式 X の (p_1) を法とする合同類を $\alpha_1\in L_1$ とすれば $p_1(\alpha_1)=0$ であり，$X-\alpha_1$ は f の L_1 上での1次因数である．したがって $f\in L_1[X]$ とみなし，$L_1[X]$ における f の2次以上の既約因数 p_2 が存在すれば，同様にして，L_1 の拡大体 $L_2=L_1[X]/(p_2)$，1次因数 $X-\alpha_2$ $(\alpha_2\in L_2)$ を得ることができる．同様のことをくり返せば，有限回の後に f の分解体が得られる．▌

例 3.33　有限個の元からなる体を**有限体**という．q 個の元からなる一つの体を $\boldsymbol{F}_q$ で表わそう．したがって $\boldsymbol{F}_q$ の標数は $p>0$ (p は素数) であり，$\boldsymbol{F}_q$ の素体は $\boldsymbol{F}_p=\boldsymbol{Z}/(p)$ と同型である．そこで $\boldsymbol{F}_q$ を $\boldsymbol{F}_p$ の拡大体とみなせば，明らかに $[\boldsymbol{F}_q:\boldsymbol{F}_p]=f<\infty$．$\boldsymbol{F}_q$ の $\boldsymbol{F}_p$ 上の線型空間としての底を $(a_1,\cdots,a_f)$ とすれば $\boldsymbol{F}_q$ の任

1)　本選書，藤崎源二郎“体とガロア理論”参照．

意の元は線型結合 $\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_f a_f$ $(\lambda_i\in \boldsymbol{F}_p)$ で表わされるから，じつは $\boldsymbol{F}_q$ の元の個数は $q=p^f$ でなければならない．

とくに乗法群 $\boldsymbol{F}_q{}^\times=\boldsymbol{F}_q-\{0\}$ は $(q-1)$ 個の元からなる．このことから，さらに任意の $\alpha\in\boldsymbol{F}_q{}^\times$ の位数(すなわち巡回群 $\langle\alpha\rangle$ の元の個数)は $q-1$ の約数であることがわかる(§3.5，定理3.17参照)．ゆえに任意の $\alpha\in\boldsymbol{F}_q{}^\times$ は $X^{q-1}-1=0$ の根になっているわけであるが，多項式 $X^{q-1}-1$ が1次式の積に因数分解されたものとすれば，その1次式の個数は $(q-1)$ 個であるから，けっきょく $X^{q-1}-1=\prod_\alpha (X-\alpha)$ $(\alpha\in\boldsymbol{F}_q{}^\times)$．したがって，体 $\boldsymbol{F}_q$ は多項式 $X^q-X=X(X^{q-1}-1)$ の素体 $\boldsymbol{F}_p$ 上での最小分解体になっている．

$\boldsymbol{F}_p$ の代数的閉包に関する性質(1), (2), (3)を仮定すれば，$q\,(=p^f)$ 個の元からなる体 $\boldsymbol{F}_q$ は，X^q-X の $\boldsymbol{F}_p$ 上での最小分解体として $\bar{\boldsymbol{F}}_p$ の中で一意的に定まるものであることもわかる．——

c) 線型空間の係数拡大

たとえば $A\in M_n(\boldsymbol{R})$ によって定まる線型変換 $F_A:\boldsymbol{R}^n\ni \boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ の特性方程式 $f_A(X)=0$ は $\boldsymbol{C}$ の中では重複度もこめてちょうど n 個の根(特性根)をもち，それ等のうち実根であるものがちょうど $\boldsymbol{R}^n$ 上の線型変換 F_A の固有値となるのであった．しかし，たとえば標準形(3.52)を一般論として把えるためには，$A\in M_n(\boldsymbol{R})$ であっても F_A を $\boldsymbol{C}^n$ 上の線型変換 $\boldsymbol{C}^n\ni\boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^n$ とみなす方が扱いやすい．この場合，特性根をすべて F_A の固有値とみなすことができ，それ等に属する固有ベクトル，広義固有空間等を考えることができるからである．

これと同様のことを一般の体 K 上の線型空間 V における線型変換 T についても行なうことができるであろうか．T の特性多項式 f_T の適当な分解体 L をとるとき，L 上の線型空間 $\tilde{V}$ で，$V\subset\tilde{V}$, $\dim_L\tilde{V}=\dim_K V$ をみたし，T が自然な形で $\tilde{V}$ 上の線型変換に拡張できる(とくに特性多項式が拡張する前と一致している)ようなもの，上述の場合についていえば，$V=\boldsymbol{R}^n$ に対する $\tilde{V}=\boldsymbol{C}^n$ に相当するものを定義できればよい．ただし K の標数が0でない場合，K 上の既約多項式がその分解体の中で重根をもつことがあり，そのような場合には f_T の分解体 L を考えても T の K 上の性質を調べるためにはあまり意味のないことがある．したがって以下の議論もいまは一応標数0の場合に限って考えてよい．

定理 3.16 V を体 K の n 次元線型空間，L を K の拡大体とするとき，L 上

の線型空間 $\tilde{V}$ および写像 $\iota: V\to\tilde{V}$ の組 $(\tilde{V},\iota)$ で次の二つの条件をみたすものが存在する：

(i) $\iota: V\to\tilde{V}$ は K 上の線型写像である．すなわち

$$\iota(x+y)=\iota(x)+\iota(y),\qquad \iota(\lambda x)=\lambda\iota(x)\qquad (x, y\in V,\ \lambda\in K).$$

(ii) $(u_1,\cdots,u_n)$ が V の底ならば，$(\iota(u_1),\cdots,\iota(u_n))$ は $\tilde{V}$ の (L 上の線型空間としての) 底である．

また，$(\tilde{V}',\iota')$ をやはり (i), (ii) をみたすもう一つの組とすれば，L 上の線型同型写像 $\psi:\tilde{V}\to\tilde{V}'$ で

$$\iota'=\psi\circ\iota \tag{3.55}$$

をみたすものが一意的に定まる．

証明 組 $(\tilde{V},\iota)$ が (i), (ii) をみたすものとすれば，とくに (ii) により $\dim_L\tilde{V}=\dim_K V=n$．そこで $\tilde{V}$ を L 上の任意の n 次元線型空間とし，$(u_1,\cdots,u_n)$ を V の一つの底，$(\tilde{u}_1,\cdots,\tilde{u}_n)$ を $\tilde{V}$ の一つの底として

$$\iota(\xi_1u_1+\cdots+\xi_nu_n)=\xi_1\tilde{u}_1+\cdots+\xi_n\tilde{u}_n\qquad(\xi_i\in K)$$

とおく．このとき組 $(\tilde{V},\iota)$ はたしかに (i), (ii) をみたしている．$(\tilde{V}',\iota')$ がまた (i), (ii) をみたしているものとすれば，$(u_1,\cdots,u_n)$ が V の底のとき $(\iota'(u_1),\cdots,\iota'(u_n))$ は $\tilde{V}'$ の底である．したがって (3.55) をみたす L 上の線型同型写像 $\psi:\tilde{V}\to\tilde{V}'$ が $\psi(\iota(u_i))=\iota'(u_i)\ (1\leqq i\leqq n)$ によって一意的に定まる．▌

$(\tilde{V},\iota)$, $(\tilde{V}',\iota')$ がともに V に対して条件 (i), (ii) をみたすものとし，(3.55) をみたす同型写像 $\psi:\tilde{V}\to\tilde{V}'$ によって $\tilde{V}'=\psi(\tilde{V})$ と同一視すれば，(3.55) により明らかに $\iota(V)=\iota'(V)$ と同一視されなければならない．すなわち (i), (ii) をみたす $(\tilde{V},\iota)$ は (3.55) をみたす同型写像による同一視のもとでは，V に対して一意的に定まるものであることがわかる．また条件 (ii) により $\iota: V\to\tilde{V}$ は単射であるから，はじめから $V\subset\tilde{V}$ とみなしてよい．したがって V の任意の底はまた $\tilde{V}$ の底になっているわけである．このとき $\tilde{V}$ を V の L への**係数拡大**といい，$\tilde{V}=V_L$ で表わす．たとえば実数体上の列ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ の複素数体 $\boldsymbol{C}$ への係数拡大は $\boldsymbol{C}^n$ である．

V に底 $(u_1,\cdots,u_n)$ を一つ定めておけば，V 上の線型変換 T が底の像 $Tu_j\ (1\leqq j\leqq n)$ を定めるだけで一意的に定まるのであったが，$(u_1,\cdots,u_n)$ はまた V_L の底でもあるから，V_L 上の線型変換 T が定まると考えてもよい．すなわち

“T を V 上の任意の線型変換, V_L を V の L への係数拡大とするとき, V_L 上の線型変換 T_L で $T_L|V=T$ となるものが一意的に定まる.”

とくに V の底として T の自然標準形を与えるものをとっておけば, T_L もその底に関して同じ行列で表わされるのであるから, T_L の特性多項式は K 係数の多項式であり, T の特性多項式と一致する. そこで T_L を T の V_L への自然な拡張といい, とくに混乱を生じないかぎり T_L も T で表わすことにする.

定理 3.16 とは逆に, L 上の線型空間 $\tilde{V}$ と L の部分体 K に対して, K 上の線型空間 V でその L への係数拡大が $\tilde{V}=V_L$ となっているもののことを, $\tilde{V}$ の一つの K **型**という. 係数拡大が一意的に定まるのに対して, $\tilde{V}$ の K 型は多数ある. 実際, $\tilde{V}$ の (L 上の) 任意の底 $(u_1, \cdots, u_n)$ をとるとき, この K 上の線型結合全体 $V=\{\xi_1u_1+\cdots+\xi_nu_n \mid \xi_i \in K\}$ はたしかに $\tilde{V}$ の一つの K 型である.

体 L 上の線型空間 $\tilde{V}$ は, L の部分体 K にスカラー乗法を制限して, 自然に K 上の線型空間とみなすことができる. これを $\tilde{V}$ の K への**係数制限**といい, 以下では ${}_K\tilde{V}$ で表わすことにする. $\tilde{V}$ の K 型とは ${}_K\tilde{V}$ の部分空間 V で, V の底が $\tilde{V}$ の底にもなるもののことに他ならない. とくに $[L:K]=d<\infty$, $\dim_K V=\dim_L \tilde{V}=n$ とし, L の K 上の線型空間としての底を $(\theta_1, \cdots, \theta_d)$, V の底を $(u_1, \cdots, u_n)$ とすれば, $(u_1, \cdots, u_n)$ は $\tilde{V}$ の L 上の底でもあるから, 任意の $x \in \tilde{V}$ は

$$x=\beta_1u_1+\cdots+\beta_nu_n \qquad (\beta_j=\alpha_{1j}\theta_1+\cdots+\alpha_{dj}\theta_d,\ \alpha_{ij} \in K)$$

と表わすことができる. すなわち $x=\sum_{i,j}\alpha_{ij}\theta_iu_j$. 一方

$$\sum_{i,j}\alpha_{ij}\theta_iu_j=o \Longrightarrow \sum_i \alpha_{ij}\theta_i=0 \Longrightarrow \alpha_{ij}=0$$

により $\{\theta_iu_j \mid 1\leqq i\leqq d,\ 1\leqq j\leqq n\}$ は K 上線型独立である. したがって $\{\theta_iu_j\}$ は ${}_K\tilde{V}$ の底をなす. ゆえに ${}_K(V_L)={}_K\tilde{V}$ の次元は

$$\dim_K(V_L)=\dim V_L\cdot[L:K]=nd. \tag{3.56}$$

(3.54) はこの特別な場合である. また $\theta_iu_1, \cdots, \theta_iu_n$ の K 係数の線型結合全体を $V^{(i)}$ $(1\leqq i\leqq d)$ とすれば, 各 $V^{(i)}$ も V_L の K 型であり,

$$_K(V_L)=V^{(1)}\dot{+}V^{(2)}\dot{+}\cdots\dot{+}V^{(d)}. \tag{3.57}$$

例 3.34　T を L の線型空間 $\tilde{V}$ における線型変換とし, K を L の部分体とするとき, T は当然 K に関するスカラー乗法を保つから, 自然に ${}_K\tilde{V}$ 上の線型変換とみなすことができる. この ${}_K\tilde{V}$ 上の線型変換を ${}_KT$ で表わすことにしよう. と

くに $_K T$ 不変部分空間 V で $\tilde{V}$ の K 型になっているものが存在するとき，$\tilde{V}$ 上の線型変換 T は K 型 V に関して K 上定義されているという．明らかに $_K T|V = T|V$ であり，T は $T|V$ の $V_L = \tilde{V}$ への自然な拡張になっている．T と $T|V$ とを区別する必要があるときは $T|V$ を T_K で表わそう．したがって $(T_K)_L = T$ である．

とくに L が K の有限次拡大体であるものとして $[L:K]=d$ とおく．また $T: \tilde{V} \to \tilde{V}$ を $\tilde{V}$ のある K 型 V に関して K 上定義された線型変換とする．このとき T の特性多項式 f_T は K 係数の多項式で，$\tilde{T} = {}_K T$ の特性多項式を $f_{\tilde{T}}$ とすれば

(3.58) $$f_{\tilde{T}}(X) = (f_T(X))^d.$$

とくに $T, \tilde{T}$ のトレース，行列式については

(3.59) $$\mathrm{tr}\,\tilde{T} = d\cdot \mathrm{tr}\,T, \qquad \det \tilde{T} = (\det T)^d.$$

[証明] いま $T_K = T|V$ の自然標準形を与えるような V の底 $(u_1, \cdots, u_n)$ $(n = \dim_K V = \dim_L V)$ をとり，これをまた $\tilde{V}$ の L 上の底とみなすことにより，T の特性因子 (定理 3.7) $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_t$ は T_K の特性因子であり，$f_T = f_{T_K} = \varphi_0\varphi_1\cdots\varphi_t \in K[X]$．また，$L$ の K 上の底を $(\theta_1, \cdots, \theta_d)$ とし，$V^{(i)}$ を $\theta_i u_1, \cdots, \theta_i u_n$ で K 上生成される $_K\tilde{V}$ の部分空間とすれば，$\tilde{T}(\theta_i u_j) = \theta_i T u_j = \theta_i \tilde{T} u_j$ であるから V が $\tilde{T}$ 不変であることにより $V^{(i)}$ も $\tilde{T}$ 不変であり，しかも $\tilde{T}|V^{(i)}$ の底 $(\theta_i u_1, \cdots, \theta_i u_n)$ に関する行列は T の自然標準形と一致している．したがって特性因子の一意性により，$\tilde{T}$ の特性因子は φ_0 が d 個，φ_1 が d 個，$\cdots, \varphi_t$ が d 個によって与えられる．ゆえに $f_{\tilde{T}} = \varphi_0{}^d \varphi_1{}^d \cdots \varphi_t{}^d = f_T{}^d$．(3.59) は (3.41), (3.42) および (3.58) から明らかである．∎

この証明からもわかるように，$\tilde{T}, T, T_K$ の最小多項式は一致する：$\varphi_{\tilde{T}} = \varphi_T = \varphi_{T_K} \in K[X]$．——

例 3.35 (線型空間の複素構造) $\tilde{V}$ を複素数体 $\boldsymbol{C}$ 上の n 次元線型空間とすれば $\tilde{J}: \tilde{V} \ni x \mapsto \sqrt{-1}x \in \tilde{V}$ $(x \in V)$ は $\tilde{V}$ 上の正則線型変換である．$\tilde{V}$ の実数体 $\boldsymbol{R}$ への係数制限 $U = {}_{\boldsymbol{R}}\tilde{V}$ は (3.56) により $\boldsymbol{R}$ 上 $2n$ 次元の線型空間である．$J = {}_{\boldsymbol{R}}\tilde{J}$ とすれば J は U 上の線型変換で，最小多項式は $\varphi_J(X) = X^2+1$ である．$\tilde{V}$ の一つの底 $(u_1, \cdots, u_n)$ を固定しておき，$V = \{\xi_1 u_1 + \cdots + \xi_n u_n \mid \xi_i \in \boldsymbol{R}\}$ とおけば，V は $\tilde{V}$ の一つの $\boldsymbol{R}$ 型 $(V_{\boldsymbol{C}} = \tilde{V})$ であり，U の底として $(u_1, \cdots, u_n, \sqrt{-1}u_1, \cdots, \sqrt{-1}u_n)$ が得られる．この底に関する J の行列は $\begin{bmatrix} O_n & -I_n \\ I_n & O_n \end{bmatrix}$ である．

一般に $\boldsymbol{R}$ 上の有限次元線型空間 U 上の線型変換 J で最小多項式が $\varphi_J(X)=X^2+1$ であるものを，U の一つの**複素構造**という．J の特性根はすべて $\varphi_J(X)=0$ の根であるから，複素数体 $\boldsymbol{C}$ の中で $\pm\sqrt{-1}$ が相異なるすべての特性根である．ところが J は本来 $\boldsymbol{R}$ 上の線型空間 U における線型変換であるから，特性多項式 f_J は実係数多項式である．したがって方程式 $f_J(X)=0$ の根としての $\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$ の重複度は等しい．このことから $\dim U=\deg f_J$ は偶数でなければならないことがわかる．そこで $\dim U=2n$ とおく．J を U の $\boldsymbol{C}$ への係数拡大 U_C へ自然に拡張すれば，特性根 $\pm\sqrt{-1}$ を J の固有値と考えることができる．$\varphi_J(X)=0$ が重根をもたないから，定理 3.9 により U_C 上の線型変換として J は対角化可能．したがって $\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$ に属する J の固有空間をそれぞれ

(3.60) $$U_+=\{z\in U_C \mid Jz=\sqrt{-1}\,z\},\qquad U_-=\{z\in U_C \mid Jz=-\sqrt{-1}\,z\}$$

とおけば，定理 3.8 により

(3.61) $$U_C=U_+\dotplus U_-,\qquad \dim U_+=\dim U_-=n.$$

任意の $z\in U_C$ は $z=x+\sqrt{-1}\,y$ $(x, y\in U)$ と一意的に表わされている．$\sigma: U_C\to U_C$ を $\sigma(z)=x-\sqrt{-1}\,y=\bar{z}$ とおき，これを U_C の U に関する複素共役という．σ は

(3.62) $$\sigma^2=I,\qquad \sigma(z_1+z_2)=\sigma(z_1)+\sigma(z_2),\qquad \sigma(\lambda z)=\bar{\lambda}\sigma(z)$$

(ただし $z_1, z_2, z\in U_C$, $\lambda\in\boldsymbol{C}$) によって特徴づけられる．とくに $U=\{z\in U_C \mid \sigma(z)=z\}$，$\sigma\circ J=J\circ\sigma$ である．また (3.60) の U_+, U_- については

(3.63) $$\sigma(U_+)=U_-,\qquad \sigma(U_-)=U_+.$$

逆に U_+, U_- を (3.61), (3.63) をみたす U_C の部分空間とするとき，線型変換 $J: U_C\to U_C$ を $J|U_+=\sqrt{-1}\,I_{U_+}$，$J|U_-=-\sqrt{-1}\,I_{U_-}$ によって定義すれば，容易にわかるように，$J^2+I=O$，$\sigma\circ J=J\circ\sigma$ である．したがって J は U 上の複素構造であり，U_+, U_- がその固有空間である．以上により U の一つの複素構造を考えることと，(3.63) をみたす U_C の直和分解 (3.61) を考えることとは同じであることがわかった．

さて，U の与えられた複素構造 J に対する直和分解 (3.61) によって定まる U_C から U_+ への射影子を P_+，U_- への射影子を $P_-=I-P_+$ としよう．$z=z_++z_-$ $(z_\pm\in U_\pm)$ とすれば $Jz=\sqrt{-1}\,z_+-\sqrt{-1}\,z_-$ だから，$z_\pm=(1/2)(z\mp\sqrt{-1}\,Jz)$，したがって

$$P_+ = \frac{1}{2}(I - \sqrt{-1}\,J), \qquad P_- = \frac{1}{2}(I + \sqrt{-1}\,J).$$

とくに $x \in U: P_+x = o \Leftrightarrow x \in U \cap U_- = \{o\}$ であるから，$P_+|U$ は U から ${}_{\boldsymbol{R}}U_+$ への $\boldsymbol{R}$ 上の線型全単射であり，

$$P_+ \circ J = \sqrt{-1}\,P_+$$

をみたしていることがわかる．ゆえに $\boldsymbol{R}$ 上 $2n$ 次元の線型空間 U とその上の複素構造 J との組 (U, J) を，この同型対応で $\boldsymbol{C}$ 上の n 次元の線型空間 U_+ と同一視できる．同様の意味で，U_+ の複素共役 U_- は組 $(U, -J)$ と同一視できるわけである．——

問 一般に $\tilde{V}$ を $\boldsymbol{C}$ 上の線型空間，$\sigma: \tilde{V} \to \tilde{V}$ を $\sigma \neq I$ で (3.62) と同じ条件をみたすものとするとき

$$V = \{x \in \tilde{V} \mid \sigma(x) = x\}$$

とおけば $V_C = \tilde{V}$ であり，$z = x + \sqrt{-1}\,y$ $(x, y \in V)$ に対して $\sigma(z) = x - \sqrt{-1}\,y$ であることを示せ．——

§3.5 群の準同型写像

a) 部分群，正規部分群

群 G の部分集合 H が G に定義された演算によってまた群であるとき，すなわち，$H \neq \phi$ で $x, y \in H$ ならば $xy, x^{-1} \in H$ であるとき，H を G の**部分群**という．

$H \subset G$ が部分群であるとき，$a, b \in G$ に対して

$$a \sim_l b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H, \qquad a \sim_r b \Leftrightarrow ba^{-1} \in H$$

によって $\sim_l, \sim_r$ を定義すれば，これ等はどちらも G に同値関係を定める．$\sim_l$ を H に関する左同値関係，$\sim_r$ を H に関する右同値関係という．G の $\sim_l$ に関する商集合を G/H，$\sim_r$ に関する商集合を $H\backslash G$ で表わす．さらに a で代表される $\sim_l$ に関する同値類を $[a]_l$，$\sim_r$ に関する同値類を $[a]_r$ で表わせば

$$G/H \ni [a]_l \longmapsto [a^{-1}]_r \in H\backslash G$$

は全単射である．実際，$a \sim_l b \Leftrightarrow a^{-1} \sim_r b^{-1}$ をいえばよいが，

$$a^{-1}b \in H \Leftrightarrow (a^{-1}b)^{-1} = b^{-1}a \in H$$

により明らかである．したがって G/H の元の個数と $H\backslash G$ の元の個数は等しい．そこでこの元の個数を以下 $[G:H]$ で表わし，G の部分群 H の**指数**という．ま

た $a\in G$ に対して $[a]_l, [a]_r$ はそれぞれ G の部分集合としては

(3.64) $$[a]_l = aH = \{ah \mid h\in H\}, \qquad [a]_r = Ha = \{ha \mid h\in H\}$$

で表わされることに注意しよう．

G を群とするとき，写像 $G\ni x\mapsto x^{-1}\in G$ は明らかに全単射である．また $a\in G$ を一つ固定するとき，

$$L_a: G\ni x\longmapsto ax\in G, \qquad R_a: G\ni x\longmapsto xa\in G$$

をそれぞれ a による左変換，右変換という．任意の $a\in G$ に対して L_a, R_a はともに全単射であることも容易にわかる．G 上のこれ等の変換が全単射であるという性質を，しばしば群の‘均質性’という．

定理 3.17 G を群，H を G の部分群とする．

(1) $a\in G$ とすれば $|aH| = |Ha| = |H|$.

(2) (Lagrange の公式) $|G| = [G:H]|H|$.

ただし集合 S に対して $|S|$ は S の元の個数を表わす．

証明 (1) は左変換 L_a，右変換 R_a が全単射であることから明らかである．(2) を証明しよう．まず G が有限個の元からなるものとする．$a_1, \cdots, a_r$ を G/H のすべての相異なる類の代表元(したがって $r=|G/H|=[G:H]<\infty$) とすれば，(3.64) により，G は $a_1H, \cdots, a_rH$ のたがいに共通部分をもたない合併集合になっている．したがって

$$|G| = |a_1H|+\cdots+|a_rH| = r|H| = [G:H]|H|.$$

G が無限個の元からなる群の場合には $[G:H]$ または $|H|$ が無限大であり，その意味で (2) の等式が成立している．∎

線型空間の商空間や環の剰余類環等は，加群 G の部分群 H によるここの意味での商集合 G/H に，線型空間あるいは環の構造を G の構造から自然に導入することによって得られたものであった．それでは一般の群 G の部分群 H による商集合 G/H にも，$\varpi: G\to G/H$ を射影とするとき，乗法を

(3.65) $$\varpi(x)\varpi(y) = \varpi(xy) \qquad (x, y\in G)$$

によって定義し，それによって G/H が群になるといえるであろうか．

G が可換群の場合には商空間や剰余類環の場合と同様であり，問題はない．ところが非可換な群の場合には，部分群 H にある種の条件がなければ (3.65) は乗法の定義としての意味をなさないのである．実際，類 $\varpi(x)$, $\varpi(y)$ の代表元を任

意にとりかえて $\varpi(x)=\varpi(x')$, $\varpi(y)=\varpi(y')$ とするとき，すなわち，$x^{-1}x'\in H$, $y^{-1}y'\in H$ とするとき，$\varpi(xy)=\varpi(x'y')$ でなければならないが，

$$\varpi(xy)=\varpi(x'y') \iff (xy)^{-1}(x'y')=y^{-1}x^{-1}x'y'\in H$$

であるから，$h\in H$ を任意に固定して $x'=xh$ とすれば，

$$h=x^{-1}x'\in yHy^{-1}=\{yh'y^{-1}\mid h'\in H\}$$

でなければならない $(\exists h_1: y'=yh_1 \Longrightarrow yHy'^{-1}=yHy^{-1})$.

そこで一般に G の部分群 H が

$$(3.66)\qquad aHa^{-1}\subset H \qquad (\forall a\in G)$$

をみたすとき，H は G の**正規部分群**であるという．容易にわかるように

$$\begin{aligned}(3.66) &\iff aHa^{-1}=H \qquad (\forall a\in G)\\ &\iff aH=Ha \qquad (\forall a\in G).\end{aligned}$$

したがってとくに H が正規部分群であることと $H\backslash G=G/H$ であることとは同値である．また可換群の任意の部分群は正規部分群である．

正規部分群 H による商集合 G/H の場合には，(3.65) によって乗法を定義できることは，上述の議論を逆にたどれば明らかである．そしてこの乗法によって G/H が群になることも容易にわかる．たとえば G/H の単位元は $\bar{1}=\varpi(1)$ であり，$\bar{g}=\varpi(g)$ の逆元は $\bar{g}^{-1}=\varpi(g^{-1})$ で与えられる．また $\varpi^{-1}(\bar{1})=H$ である．

例 3.36 群 G の指数 2 の部分群は正規部分群である．実際 $[G:H]=2$ とすれば，$a\notin H$ のとき

$$G=H\cup aH=H\cup Ha$$

であり，$H\cap aH=H\cap Ha=\phi$ であるから $aH=Ha$ でなければならない．——

G, G' を群とするとき，写像 $F: G\to G'$ で

$$F(xy)=F(x)F(y) \qquad (\forall x, y\in G)$$

をみたすものを群の**準同型写像**という．とくに準同型写像 F が全単射であるとき F を**同型写像**といい，同型写像 $F: G\to G'$ が存在するとき G は G' に同型であるといって $G\cong G'$ で表わす．関係 $\cong$ は同値関係の条件をみたす．

群の準同型写像についても線型写像の場合と同様に次の諸性質を証明することは容易である：

(i) $F_1: G\to G'$, $F_2: G'\to G''$ がともに準同型写像ならば，$F_2\circ F_1: G\to G''$ も準同型写像である．

(ii) $F:G\to G'$ を準同型写像とするとき，$F(1_G)=1_{G'}$，$F(a^{-1})=F(a)^{-1}$ ($\forall a \in G$).

(iii) $F:G\to G'$ を準同型写像，H を G の部分群とすれば，$F(H)$ は G' の部分群である.

(iv) $F:G\to G'$ を準同型写像，H' を G' の(正規)部分群とすれば，$F^{-1}(H)$ は G の(正規)部分群である.

問 (i), (ii), (iii), (iv) を証明せよ．さらに (iii) において，F が全射であり，H が G の正規部分群であれば，$F(H)$ は G' の正規部分群であることを示せ．——

準同型写像 $F:G\to G'$ に対して $\mathrm{Im}\,F=F(G)$ (G' の部分群) を F の像，$\mathrm{Ker}\,F=F^{-1}(1_{G'})$ (G の正規部分群) を F の核ということ等，線型写像あるいは環の準同型写像の場合と同様である.

定理 3.18 (**準同型定理**) $F:G\to G'$ を群の準同型写像とすれば

$$\mathrm{Im}\,F \cong G/\mathrm{Ker}\,F.$$

証明 定理3.2，定理3.13と同様である．すなわち $N=\mathrm{Ker}\,F$ とおき，$\varpi:G\to G/N$ を射影とすれば，

$$\begin{aligned}\varpi(a)=\varpi(b) &\iff a^{-1}b\in N \iff F(a^{-1}b)=F(a)^{-1}F(b)=1_{G'}\\ &\iff F(a)=F(b).\end{aligned}$$

したがって全単射 $\varphi:G/N\ni\varpi(a)\mapsto F(a)\in\mathrm{Im}\,F$ を定義できる．φ が準同型写像であることをいえばよい. ▌

例 3.37 $T^n=\overbrace{T^1\times\cdots\times T^1}^{n}=\{(z_1,\cdots,z_n)\,|\,z_i\in \boldsymbol{C},\,|z_i|=1\}$ は群 T^1 の直積として群になる(第2章，例2.5)．加群 $\boldsymbol{R}^n$ から T^n への写像

$$F:\ \boldsymbol{R}^n\ni \boldsymbol{x}={}^t(x_1,\cdots,x_n)\longmapsto (e^{2\pi\sqrt{-1}\,x_1},\cdots,e^{2\pi\sqrt{-1}\,x_n})\in T^n$$

を考えると，これは明らかに準同型全射である．とくに

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}\in\mathrm{Ker}\,F &\iff e^{2\pi\sqrt{-1}\,x_i}=1\ \ (1\leqq i\leqq n)\\ &\iff x_i\in\boldsymbol{Z}\ \ (1\leqq i\leqq n)\iff \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{Z}^n.\end{aligned}$$

したがって $T^n=\mathrm{Im}\,F\cong\boldsymbol{R}^n/\boldsymbol{Z}^n$. ——

例 3.38 K を体とし，$K^\times=K-\{0\}$ を K の乗法群とする．$A,B\in M_2(K)$ のとき $\det(AB)=\det A\cdot\det B$，また $A\in GL_2(K)\iff\det A\neq 0$ であった．ゆえに

$$F:\ GL_2(K)\ni A\longmapsto \det A\in K^\times$$

は準同型写像である．任意の $\xi\in K^\times$ に対して $A=\begin{bmatrix}\xi & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in GL_2(K)$ であり，$\det A=\xi$ となるから F は全射である．$\mathrm{Ker}\,F=SL_2(K)$ とおく．すなわち

$$SL_2(K)=\{A\in M_2(K)\mid \det A=1\},$$
$$GL_2(K)/SL_2(K)\cong K^\times.$$

ここでとくに K を有限体 $\boldsymbol{F}_q$ として $GL_2(\boldsymbol{F}_q)$, $SL_2(\boldsymbol{F}_q)$ の元の個数を求めよう．まず

$$A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)\in GL_2(\boldsymbol{F}_q)\iff \boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\text{ は線型独立}$$

であるから $A\in GL_2(\boldsymbol{F}_q)$ に適合する $\boldsymbol{a}_1$ の個数は (q^2-1) 個である．また $\boldsymbol{a}_1$ を一つ固定したときに $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)\in GL_2(\boldsymbol{F}_q)$ に適合する $\boldsymbol{a}_2$ としては，$\boldsymbol{F}_q{}^2$ の q^2 個のベクトルから $\boldsymbol{a}_1$ のスカラー倍 q 個を除いた任意のものをとれる．したがって

$$|GL_2(\boldsymbol{F}_q)|=(q^2-1)(q^2-q).$$

また $[GL_2(\boldsymbol{F}_q):SL_2(\boldsymbol{F}_q)]=|\boldsymbol{F}_q{}^\times|=q-1$ であるから

$$|SL_2(\boldsymbol{F}_q)|=|GL_2(\boldsymbol{F}_q)|/(q-1)=q(q^2-1).$$ ——

b）置換の符号

n 文字の置換 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ が

$$\sigma(i_1)=i_2,\quad \sigma(i_2)=i_3,\quad \cdots,\quad \sigma(i_{r-1})=i_r,\quad \sigma(i_r)=i_1,$$
$$\sigma(k)=k\qquad (k\neq i_1,i_2,\cdots,i_r)$$

によって定められているとき，単に $\sigma=[i_1\ i_2\ \cdots\ i_r]$ で表わし，長さ r の**巡回子**，あるいは簡単に r 巡回子という．とくに長さ2の巡回子を**互換**という．たとえば

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n-1 & n\\ 2 & 3 & \cdots & n & 1\end{pmatrix}=[1\ 2\ \cdots\ n]\quad\text{は}\quad n\text{ 巡回子},$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5\end{pmatrix}=[1\ 2\ 4]\quad\text{は}\quad 3\text{ 巡回子},$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=[1\ 3]\quad\text{は}\quad\text{互換}.$$

r 巡回子 $\sigma=[i_1\ \cdots\ i_r]\in\mathfrak{S}_n$ の，群 $\mathfrak{S}_n$ の元としての位数は r に等しい．実際 $i_\nu=\sigma(i_{\nu-1})=\cdots=\sigma^{\nu-1}(i_1)$ $(1\leqq\nu\leqq r)$ であり，$i_1,\cdots,i_r$ は相異なるから σ の位数が r 以上であることは明らかであるが，一方

$$\sigma^r(i_\nu)=\sigma^r\sigma^{\nu-1}(i_1)=\sigma^{\nu-1}\sigma^r(i_1)=\sigma^{\nu-1}(i_1)=i_\nu,$$
$$\sigma^r(k)=k\qquad (k\neq i_1,\cdots,i_r)$$

であるから $\sigma^r=1_n$ (例2.7参照).

対称群 $\mathfrak{S}_n$ の任意の元は，互いに共通の文字を含まない有限個の巡回子の可換な積として一意的に表わされることがわかる．たとえば，$\sigma\in\mathfrak{S}_n$ によって $\sigma(1)=i_2$, $\sigma(i_2)=i_3$, …, $\sigma(i_r)=1$ であり，$\{1, i_2, \cdots, i_r\}$ に含まれない最小の文字を j_1 とすれば $\sigma(j_1)=j_2$, $\sigma(j_2)=j_3$, …, $\sigma(j_s)=j_1$ であるものとする．以下同様に，σ によって巡回する文字の列を求めれば，$\sigma=[1\ i_2\ \cdots\ i_r][j_1\ j_2\ \cdots\ j_s]\cdots$．形式的に証明を整えることは省略しよう．たとえば

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\4&8&2&7&3&9&1&5&6\end{pmatrix}=[1\ 4\ 7][2\ 8\ 5\ 3][6\ 9].$$

この右辺に現われる巡回子が互いに可換であることは，それ等が共通の文字を含んでいないことから容易にわかる．

補題 3.7 対称群 $\mathfrak{S}_n$ の任意の元は互換の積として表わされる．

証明 n に関する帰納法による．$n=1$ のときは $\mathfrak{S}_1=\{1\}$ であり，単位元1は互換0個の積と考えればよい．そこで $n>1$ とし，$n-1$ までは証明できたものとする．$\sigma\in\mathfrak{S}_n$, $\sigma(n)=k$ のとき，$k=n$ ならば σ は文字 n を動かさないのであるから $\sigma\in\mathfrak{S}_{n-1}$ とみなしてよく，したがって仮定により σ は互換の積である．$k\neq n$ のとき $\tau=[kn]$ とおけば $\tau\sigma(n)=\tau(k)=n$ であるから $\tau\sigma\in\mathfrak{S}_{n-1}$ とみなして $\tau\sigma=\tau_1\tau_2\cdots\tau_s$ (τ_i ($1\leqq i\leqq s$) は互換) とする．τ は位数2だから $\sigma=\tau\tau_1\cdots\tau_s$. ▌

例 3.39 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&5&1&4\end{pmatrix}$ を互換の積として表わすことを考えよう．一般に $1, 2, \cdots, n$ をある一定の順序に並べ，その順序も考えた集合を $\langle i_1, i_2, \cdots, i_n\rangle$ で表わすことにする．このとき上記の σ は $\langle 1,2,3,4,5\rangle$ を $\langle 2,3,5,1,4\rangle$ にうつす写像である．一方

$$\begin{aligned}\langle 2,3,5,1,4\rangle &= [1\ 5]\langle 2,3,1,5,4\rangle\\ &= [1\ 5][1\ 3][1\ 2]\langle 1,2,3,5,4\rangle\\ &= [1\ 5][1\ 3][1\ 2][4\ 5]\langle 1,2,3,4,5\rangle.\end{aligned}$$

ゆえに $\sigma=[1\ 5][1\ 3][1\ 2][4\ 5]$．あるいは同様にして

$$\sigma=[4\ 5][1\ 4][1\ 3][1\ 2]=[1\ 5][4\ 5][2\ 3][1\ 2][1\ 3][2\ 3]$$

等と表わすこともできる．——

この例からもわかるように，ある置換 σ を互換の積として表わす仕方は一意的ではない．しかしその互換の個数が偶数であるか奇数であるかは σ だけによって

一意的に定まることが後にわかる.

$\sigma\in\mathfrak{S}_n$ を $f\in \boldsymbol{Z}[X_1,\cdots,X_n]$ に次のように作用させる:

$$({}^{\sigma}f)(X_1,\cdots,X_n)=f(X_{\sigma(1)},\cdots,X_{\sigma(n)}).$$

このとき $\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_n$, $f,g\in\boldsymbol{Z}[X_1,\cdots,X_n]$ とすれば

$$(3.67)\qquad {}^{\sigma\tau}f={}^{\sigma}({}^{\tau}f),\qquad {}^{\sigma}(f+g)={}^{\sigma}f+{}^{\sigma}g,\qquad {}^{\sigma}(fg)={}^{\sigma}f{}^{\sigma}g.$$

[証明]　後の二つの等式は多項式環 $\boldsymbol{Z}[X_1,\cdots,X_n]$ における加法, 乗法の定義から明らかである. 最初の等式を証明しよう. まず $({}^{\sigma\tau}f)(X_1,\cdots,X_n)=f(X_{\sigma\tau(1)},\cdots,X_{\sigma\tau(n)})$. 一方, $({}^{\sigma}({}^{\tau}f))(X_1,\cdots,X_n)=({}^{\tau}f)(X_{\sigma(1)},\cdots,X_{\sigma(n)})$ であるから $X_{\sigma(i)}=Y_i$ (したがって $Y_{\tau(i)}=X_{\sigma\tau(i)}$) とおけば,

$$({}^{\tau}f)(Y_1,\cdots,Y_n)=f(Y_{\tau(1)},\cdots,Y_{\tau(n)})=f(X_{\sigma\tau(1)},\cdots,X_{\sigma\tau(n)}).$$

ゆえに ${}^{\sigma\tau}f={}^{\sigma}({}^{\tau}f)$ である. ▌

また明らかに

$$(3.68)\qquad {}^{\sigma}0=0,\qquad {}^{\sigma}(-f)=-{}^{\sigma}f.$$

さて, $U_2=\{-1,1\}$ は普通の実数の乗法に関して可換群である. 容易にわかるように, 元の個数が 2 であるような群はすべて U_2 と同型である.

定理 3.19　$n\geqq 2$ のとき, n 文字の対称群 $\mathfrak{S}_n$ から U_2 への準同型全射 $\varepsilon:\mathfrak{S}_n\to U_2$ がただ一つ存在する. ——

定理 3.19 の ε による $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ の像 $\varepsilon(\sigma)$ を σ の**符号**という. 以下この定理を存在, 一意性の 2 段階にわけて証明する.

(I)　存在の証明　$\boldsymbol{Z}$ 係数の n 変数多項式 $\Delta(X_1,\cdots,X_n)=\prod_{1\leqq i<j\leqq n}(X_i-X_j)$ を n 変数の**差積**という. 任意の $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ に対して Δ, ${}^{\sigma}\Delta$ は符号だけのちがいしかない. そこで ${}^{\sigma}\Delta=\varepsilon(\sigma)\Delta$, $\varepsilon(\sigma)=1$ または -1, とおく. すなわち

$$({}^{\sigma}\Delta)(X_1,\cdots,X_n)=\prod_{i<j}(X_{\sigma(i)}-X_{\sigma(j)})=\varepsilon(\sigma)\prod_{i<j}(X_i-X_j).$$

補題 3.8　${}^{\sigma}\Delta=\varepsilon(\sigma)\Delta$ によって $\varepsilon:\mathfrak{S}_n\ni\sigma\mapsto\varepsilon(\sigma)\in U_2$ を定めれば, ε は群の準同型写像であり, とくに σ が互換ならば $\varepsilon(\sigma)=-1$ (したがって全射) である.

証明　$\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_n$ とすれば ${}^{\sigma\tau}\Delta=\varepsilon(\sigma\tau)\Delta$. 一方, (3.67) により, ${}^{\sigma\tau}\Delta={}^{\sigma}({}^{\tau}\Delta)=\varepsilon(\tau){}^{\sigma}\Delta=\varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma)\Delta=(\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau))\Delta$. したがって $\varepsilon:\mathfrak{S}_n\to U_2$ は準同型写像. そこで σ を互換とし, たとえば $\sigma=[k\ l]\,(k<l)$ としよう.

$$\Delta(X_1,\cdots,X_n)=(X_k-X_l)\cdot\prod_{l<i}(X_k-X_i)(X_l-X_i)$$

$$\times \prod_{k<i<l}(X_k-X_i)(X_i-X_l)$$

$$\times \prod_{i<k}(X_i-X_k)(X_i-X_l)\prod_{k\neq i<j\neq l}(X_i-X_j)$$

とわけて考えれば明らかに ${}^{\sigma}\Delta=-\Delta$. ゆえに $\varepsilon(\sigma)=-1$. ▌

この補題により準同型写像 $\varepsilon:\mathfrak{S}_n\to U_2$ の存在が証明された. さらに次のことがわかる:

系 (1) $\sigma=\tau_1\tau_2\cdots\tau_k=\tau_1'\tau_2'\cdots\tau_l'$ を σ の2通りの互換の積への分解とすれば $k\equiv l$ (2). すなわち, k, l はともに偶数であるかともに奇数であるかのどちらかである.

(2) $\mathfrak{A}_n=\mathrm{Ker}\,\varepsilon$ は偶数個の互換の積として表わされる $\mathfrak{S}_n$ の元の全体と一致する.

証明 (1) $\sigma=\tau_1\cdots\tau_k=\tau_1'\cdots\tau_l'$ とすれば, σ は準同型写像であるから $\varepsilon(\sigma)=(-1)^k=(-1)^l$. ゆえに $k\equiv l$ (2).

(2) $\mathfrak{A}_n\ni\sigma=\tau_1\cdots\tau_k$ (τ_i は互換) $\Leftrightarrow$ $\varepsilon(\sigma)=(-1)^k=1$ $\Leftrightarrow$ k は偶数. ▌

$\varepsilon(\sigma)=1$, すなわち, $\sigma\in\mathfrak{A}_n$ である置換 σ を**偶置換**という. これは偶数個の互換の積として表わされる置換のことである. これに対して奇数個の互換の積として表わされる σ, すなわち $\varepsilon(\sigma)=-1$ である $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ を**奇置換**という. また $\mathfrak{S}_n$ の部分群 $\mathfrak{A}_n=\mathrm{Ker}\,\varepsilon$ を n 文字の**交代群**という.

(II) **一意性の証明** 一意性を証明するだけならば以上に述べたことを用いるだけでも簡単にできる. しかしここでは交代群 $\mathfrak{A}_n$ の性格をもう少し明らかにするために次の補題を証明しよう. その結果としても ε の一意性が明らかとなる.

補題 3.9 (1) $\mathfrak{S}_n$ の指数2の部分群は $\mathfrak{A}_n$ 以外にない.

(2) $\mathfrak{S}_n$ の3巡回子全体の集合を S とし, S を含む最小の $\mathfrak{S}_n$ の部分群を $\langle S\rangle$ で表わせば, じつは $\mathfrak{A}_n=\langle S\rangle$.

証明 H を $\mathfrak{S}_n$ の任意の指数2の部分群とする. $\mathfrak{A}_n=\langle S\rangle=H$ を示せばよい. $\varpi:\mathfrak{S}_n\to\mathfrak{S}_n/H\cong U_2$ を射影とすれば, 任意の $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ に対して $\varpi(\sigma^2)=\varpi(\sigma)^2=\varpi(1_n)$. とくに $\sigma\in S$ とすれば $\sigma^3=1_n$, すなわち $\sigma^4=\sigma$ だから $\varpi(\sigma)=\varpi(\sigma^4)=\varpi(\sigma^2)^2=\varpi(1_n)$. したがって $\sigma\in H$, すなわち $S\subset H$ である. $\langle S\rangle$ は S を含む最小の部分群であるから $\langle S\rangle\subset H$ でなければならない. 次に任意の $\sigma\in\mathfrak{A}_n$ は補題3.8の系により偶数個の互換の積

$$\sigma = \tau_1\tau_2\cdot\tau_3\tau_4\cdot\cdots\cdot\tau_{2t-1}\tau_{2t}$$

で表わされる．$\tau_{2\nu-1}=[i\ j]$, $\tau_{2\nu}=[k\ l]$ とすれば

$$\tau_{2\nu-1}\tau_{2\nu} = [i\ j][k\ l] = [i\ j][j\ k][j\ k][k\ l]$$

であるが，$i \neq k$, $j \neq l$ とすれば

$$[i\ j][j\ k] = [k\ i\ j], \qquad [j\ k][k\ l] = [l\ j\ k]$$

であり，$i=k$ ならば $[i\ j][j\ k]=1_n$, $j=l$ ならば $[i\ k][k\ l]=1_n$．したがって任意の $\sigma \in \mathfrak{A}_n$ は3巡回子の積として表わされることがわかる．ゆえに $\mathfrak{A}_n \subset \langle S\rangle \subset H$．ところが $[\mathfrak{S}_n:\mathfrak{A}_n]=[\mathfrak{S}_n:H]=|U_2|=2$．ゆえに

$$|\mathfrak{A}_n| = |H| = \frac{1}{2}|\mathfrak{S}_n| = \frac{n!}{2}, \qquad \mathfrak{A}_n = \langle S\rangle = H. \qquad \blacksquare$$

$\eta:\mathfrak{S}_n \to U_2$ を任意の準同型全射とすれば，$\mathrm{Ker}\,\eta$ は $\mathfrak{S}_n$ の指数2の部分群であるから $\mathrm{Ker}\,\eta=\mathfrak{A}_n$．したがって任意の奇置換 σ に対しては $\eta(\sigma)=-1$ であり，$\eta=\varepsilon$ であることがわかる．

以上によって定理3.19が証明された．

例 3.40 $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & r & r+1 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r & i_{r+1} & \cdots & i_n\end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$ が

$$(*) \qquad i_1 < i_2 < \cdots < i_r, \qquad i_{r+1} < i_{r+2} < \cdots < i_n$$

をみたしているものとしよう．条件$(*)$によって $1 \leqq \nu \leqq r$ のとき $\nu \leqq i_\nu$ であり，$r+1 \leqq \nu \leqq n$ のとき $\nu \geqq i_\nu$ である．順序も考えた集合 $\langle i_1, i_2, \cdots, i_r, i_{r+1}, \cdots, i_n\rangle$ を $\langle 1, 2, \cdots, n\rangle$ に並べ換えるために，まず文字 i_r を順次その後に来る文字と入れ換えて i_r 番目にうつす．すなわち (i_r-r) 回次の文字と入れ換えるわけである．同様のことを $i_{r-1}, i_{r-2}, \cdots, i_2, i_1$ の順に行なう．文字 i_ν $(1 \leqq \nu \leqq r)$ を i_ν 番目にうつすためには $(i_\nu-\nu)$ 回次の文字との入れ換えを行なえばよい．このとき条件$(*)$により文字 i_μ $(r+1 \leqq \mu \leqq n)$ は自然に i_μ 番目にうつる．したがって$(*)$をみたす $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対しては

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{(i_1-1)+(i_2-2)+\cdots+(i_r-r)}. \qquad ——$$

問　題

1 次の行列 A によって定まる線型写像 $F_A: x \mapsto Ax$ の階数および $\mathrm{Ker}\,F_A$ の底を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & 1 & -3 \\ -3 & 6 & 2 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$　$(a, b, c \in \boldsymbol{R})$.

2　$V=M_n(\boldsymbol{R})$ を $\boldsymbol{R}$ 上の n^2 次元線型空間とみなすとき，部分空間 $W=\{X \in M_n(\boldsymbol{R}) \mid {}^tX=-X\}$ について次の問に答えよ．

(1)　零化空間 $W^\wedge(\subset V^*)$ の元は具体的にどのように表わされるか．

(2)　W 上の対称双 1 次形式 $B(X, Y)=\mathrm{tr}(XY)$ は非退化であることを示せ．

3　線型空間 V 上の二つの線型変換 T_1, T_2 が $T_1T_2=T_1+T_2$ をみたすならば，$T_1T_2=T_2T_1$ であることを示せ．

[注意]　$T_2T_1=T_2+T_1$ は仮定していない．

4　次の行列の最小多項式および自然標準形を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$　$(\theta \in \boldsymbol{R})$.　(2) $\begin{bmatrix} c & 0 & -1 \\ 0 & c & 1 \\ -1 & 1 & c \end{bmatrix}$.　(3) $\begin{bmatrix} O_n & -I_n \\ I_n & O_n \end{bmatrix}$.

5　次の行列 $A \in M_3(\boldsymbol{R})$ に対し $P^{-1}AP$ が自然標準形となるような正則行列 $P \in M_3(\boldsymbol{R})$ を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$.　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

6　次の行列 $A \in M_3(K)$ (K は体) が対角化可能であるとき，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 $P \in M_n(K)$ を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 0 & -\alpha\beta & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$.　(2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha\beta\gamma \\ 1 & 0 & -(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta) \\ 0 & 1 & \alpha+\beta+\gamma \end{bmatrix}$.

7　V を体 K 上の線型空間，$T: V \to V$ を線型変換とするとき，$\alpha \in K$ に対して $\mathrm{Ker}(T-\alpha I)^2 \neq \{o\}$ ならば，α は T の固有値であることを証明せよ．

8　線型変換 $T: V \to V$ の特性多項式を f_T，最小多項式を φ_T とする．正の整数 m を適当にとれば $f_T | \varphi_T{}^m$ であることを示せ．とくに φ_T が既約多項式であるとき，正の整数 m を適当にとれば $f_T=\varphi_T{}^m$ となることを示せ．

9　体 K 上の二つの 3 次正方行列 $A, B \in M_3(K)$ が相似 (正則行列 $P \in M_3(K)$ を適当にとれば $B=P^{-1}AP$) であるための必要十分条件は，A, B が同じ特性多項式および同じ最小多項式をもつことである．証明せよ．また同じ特性多項式と同じ最小多項式をもつが，相似ではない $A, B \in M_4(K)$ の例をあげよ．

10　V を代数的閉体上の有限次元線型空間とし，$G \subset L(V, V)$ は完全可約であるものとする．任意の $T_1, T_2 \in G$ に対して $T_1T_2=T_2T_1$ が成立するとき，V の適当な底をとれば

G のすべての元は同時に対角行列として表わされることを示せ.

11 J を，単位元をもつ可換環 R の，一つの素イデアルとする．R 上の n 変数多項式環 $R[X_1, \cdots, X_n]$ の J を含む最小のイデアルはまた素イデアルであることを示せ.

12 有理数体 $\boldsymbol{Q}$ 上で次の各多項式の最小分解体を求めよ．またその体の $\boldsymbol{Q}$ 上の次数は何か.

(1) X^3-1. (2) X^3+2. (3) X^4+1.

13 次の置換の符号を求めよ.

(1) $[1\ 2\ 3\ \cdots\ n]$. (2) $\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 2 & 4 & \cdots & 2n & 1 & 3 & \cdots & 2n-1\end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1\end{pmatrix}$.

14 $\mathfrak{S}_4$ を多項式環 $\boldsymbol{Z}[X_1, X_2, X_3, X_4]$ の元に作用させる $(({}^\sigma f)(X_1, \cdots, X_4)=f(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(4)}))$ とき，次の各多項式 f について，${}^\sigma f=f$ であるような $\sigma\in\mathfrak{S}_4$ のつくる部分群を求めよ.

(1) $X_1X_4-X_2X_3$. (2) $X_2X_3+X_3X_1+X_1X_2$.

15 4文字の交代群 $\mathfrak{A}_4$ の部分群をすべて求めよ．そのうち正規部分群であるものをすべて示せ.

第4章　連立1次方程式，行列式

これまでにいくつかの定理として述べてきた（有限次元の）線型空間，線型写像等の基本的性質を実際の問題に適用するためには，まだ具体的な計算の方法が欠落していることを読者はすでに気付かれていることと思う．

たとえば，あるベクトルをいくつかのベクトルの線型結合として表わす（つまりその係数を具体的に決定する）こと，線型写像の核の底を求めること，あるいは線型変換の固有ベクトルを求めること等は，多くの初等的問題においては，ある連立1次方程式を解くことに帰着されるが，消去法という基本的でしかも実際的な解法をすでに知っているものとしても，その方法がどのような連立1次方程式にも適用できるかどうかは，まだ確認していないのである．

また，与えられた正則行列の逆行列を求めなければならない場合は実際にしばしば生じるのであるが，これまでにわれわれは特殊な形の正則行列について少数の例を扱ったにすぎない．一般の正則行列の逆行列はどのようにして求めることができるであろうか．

さらに§3.3で定義した線型変換の行列式は，このままでは実際上の問題において常に計算によって決定できる量であるとは言い難い．固有値を求めることはさらに困難である．計算に都合のよい形で線型変換の行列式を定義し，それが§3.3の定義と一致することを示すことができれば，さしあたりは満足しなければならない．

これ等の問題点を解消するのがこの章の主要な目標である．しかもこの部分は線型代数の最も古典的な，したがって基本的な手段を形成しているのである．‘公理的方法とは無関係なただの計算技術’等と考えるのは誤りである．

§4.1　連立1次方程式

a）線型方程式一般論

V, V' を体 K 上の線型空間とし，$F: V\to V'$ を線型写像としよう．このとき

$b\in V'$ を与えられたベクトルとして

$$(4.1)\qquad F(x)=b$$

をみたす x を V の中ですべて決定することを，'線型方程式(4.1)を解く'という．

とくに $b=o'$ (V' の零元)のとき線型方程式(4.1)は**同次**(homogeneous)であるという．同次線型方程式 $F(x)=o'$ の解とは Ker F の元のことに他ならない．そこで V の部分空間 Ker F を同次方程式 $F(x)=o'$ の**解空間**という．$x=o$ は明らかに $F(x)=o'$ の解であるが，これを**自明な解**という．

$F(x_1)=b$ ならば $F: x_1+\mathrm{Ker}\,F\to b$ だから，$\mathrm{Im}\,F\cong V/\mathrm{Ker}\,F$ により実は $F^{-1}(b)=x_1+\mathrm{Ker}\,F$ である．このことは線型方程式(4.1)を解くことが次の二つの問題に帰着されることを意味している：

(1)　(4.1)の解 x_1 を一つみつける．

(2)　V の部分空間 Ker F を具体的に書き表わす．(たとえば Ker F の底を一つみつける.)

問題(1)のように，一つの解 x_1 を何かの方法で指定したとき，x_1 を線型方程式(4.1)の**特殊解**という．

例 4.1　連立1次方程式

$$(*)\qquad \begin{cases} x_1+x_2+3x_3+x_4+5x_5 = 3, \\ \quad\;\; x_2+\ x_3 \quad\;\; +\ x_5 = 1, \\ -x_1 \quad\; -2x_3 \quad\; -2x_5 = -1, \\ \qquad\qquad\qquad x_4+2x_5 = 1, \end{cases}$$

を解こう．これは

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とすれば，線型写像 $F_A: \boldsymbol{R}^5\ni\boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^4$ に関する線型方程式 $F_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を解く問題である．$\boldsymbol{R}^5$ の標準底を $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_5)$，$\boldsymbol{R}^4$ の標準底を $(\boldsymbol{e}_1', \cdots, \boldsymbol{e}_4')$，また A の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_5$ とする．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ は線型独立，$\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_5$ はこれ等の線型結合である(例3.6参照).

$A\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{a}_j$ $(1\leqq j\leqq 5)$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_4$ であるから $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_4={}^t(1,1,0,1,0)\in\boldsymbol{R}^5$ は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の一つの解である．例3.6で述べたように，$\boldsymbol{R}^5$ の底として $\mathfrak{A}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_4,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_5)$，$\boldsymbol{R}^4$ の底として $\mathfrak{A}'=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{c})$ を標準底のかわりに考えれば，F_A の $\mathfrak{A},\mathfrak{A}'$ に関する行列は

$$A_1=\begin{bmatrix}1&0&0&2&2\\0&1&0&1&1\\0&0&1&0&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

このとき，標準底に関して $\boldsymbol{x}={}^t(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ で表わされたベクトルは底 $\mathfrak{A}$ に関しては $\boldsymbol{x}'={}^t(x_1,x_2,x_4,x_3,x_5)$ であることに注意しよう．$A_1\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{o}$ の解は

$$\boldsymbol{u}={}^t(-2,-1,0,1,0),\qquad \boldsymbol{v}={}^t(-2,-1,-2,0,1)$$

とすれば $\boldsymbol{x}'=\lambda\boldsymbol{u}+\mu\boldsymbol{v}$ $(\lambda,\mu\in\boldsymbol{R})$ で表わされるから，もとの A についていえば，3番目，4番目の成分を入れ換えて

$$\mathrm{Ker}\,F_A=\{{}^t(-2\lambda-2\mu,-\lambda-\mu,\lambda,-2\mu,\mu)\,|\,\lambda,\mu\in\boldsymbol{R}\}$$

であることがわかる．したがって(＊)の解は

$$F_A{}^{-1}(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{x}_1+\mathrm{Ker}\,F_A=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-2\lambda-2\mu\\1-\lambda-\mu\\\lambda\\1-2\mu\\\mu\end{bmatrix}\,\middle|\,\lambda,\ \mu\in\boldsymbol{R}\right\}$$

で与えられる．——

例 4.2 線型常微分方程式

(♯) $$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)y=q(x)$$

は第1章でも述べたとおり一種の線型方程式であり，上述の一般論が適用できる．実は同次 $(q(x)=0)$ の場合が解ければ，(♯)も原理的には解けること（つまり特殊解が一つ求められること）が知られている．

(♯)において $q(x)=0$ とおいた同次方程式の解空間の底が求められたものとしてそれを $y_1,\cdots,y_n$ とすれば，この解空間の任意の元は $y=\sum_{i=1}^{n}C_iy_i$ (C_i は定数) と表わすことができる．そこで，(♯)の解はかりに $y=\sum_{i=1}^{n}z_iy_i$ (z_i は関数) と表わすことができるものとして，このような z_i を実際に求めるのである．これを Lagrange の定数変化法という．

ここでは $n=1$ の場合だけを考えよう．まず同次方程式 $y'+p(x)y=0$ については，積分 $P(x)=\int p(x)dx$ さえ計算できれば，一般の解は $y=Ce^{-P(x)}$ (C は定数) で表わすことができる．そこで

$$(\sharp)_1 \qquad y'+p(x)y = q(x)$$

の一つの解がある微分可能な関数 z によって $y=z(x)e^{-P(x)}$ と表わすことができたものとしよう．これを $(\sharp)_1$ に代入すれば $z'=q(x)e^{P(x)}$ が得られる．ゆえに

$$y_1 = e^{-P(x)}\int q(x)e^{P(x)}dx$$

はたしかに $(\sharp)_1$ の特殊解であり，線型方程式の一般論により $(\sharp)_1$ の一般解は

$$y = e^{-P(x)}\left(C+\int q(x)e^{P(x)}dx\right)$$

の形で与えられることがわかる．——

b）アフィン部分空間

第1章で考えた $A_K{}^n$ よりも少し一般的な形でアフィン空間を定義しよう．集合 $S\neq\phi$ に対して体 K 上の n 次元線型空間 V が定まり，次の三つの条件がみたされるとき，S (正確には組 (S, V)) を K 上の n 次元**アフィン空間**という：

(1)　S の任意の2点 P, Q の順序も考えた組 (P, Q) に対して $a\in V$ が一意的に定まる．このベクトルを $a=(\overrightarrow{PQ})$ で表わす．

(2)　$P\in S$, $a\in V$ を任意に定めたとき，$a=(\overrightarrow{PQ})$ となる $Q\in S$ が一意的に定まる．

(3)　$a=(\overrightarrow{PQ})$,　$b=(\overrightarrow{QR})$　ならば　$a+b=(\overrightarrow{PR})$.

このとき V をアフィン空間 S に付随するベクトル空間といい，$V=V(S)$ で表わす．第1章で定義した $A_K{}^n$ は，$V(A_K{}^n)=K^n$ により，ここで定義した意味でのアフィン空間になっている．

問　$(\overrightarrow{PP})=o$,　$(\overrightarrow{QP})=-(\overrightarrow{PQ})$ を示せ．——

$V=V(S)$ の底 $(a_1, \cdots, a_n)$ を一つ固定しておけば同型写像 Φ: $V\ni x=\xi_1a_1+\cdots+\xi_na_n\mapsto {}^t(\xi_1, \cdots, \xi_n)\in K^n$ が定まることは第2章で述べた．さらに S の1点 O を固定しておけば条件 (1) により任意の $P\in S$ に対して O に関する P の位置ベクトル $x=(\overrightarrow{OP})$ が定まり，$\Phi(x)={}^t(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ とすれば対応 $S\ni P\mapsto(\xi_1, \cdots, \xi_n)\in A_K{}^n$ が得られる．この対応が全単射であることは，Φ が同型写像であることと

条件(2)とによって明らかである．そこで組 $\Sigma=\{O; a_1, \cdots, a_n\}$ をアフィン空間 S の一つの座標系，O をその座標系の原点といい，上述の対応

$$S \ni P \underset{\Sigma}{\longleftrightarrow} (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in A_K{}^n$$

を考えたときに，ξ_i を P の Σ に関する第 i 座標という．

K 上の n 次元アフィン空間 S の部分集合 $L \neq \phi$ に対して，$V=V(S)$ の k 次元部分空間 W が定まり，

(i) $P, Q \in L \Longrightarrow (\overrightarrow{PQ}) \in W$,

(ii) $P \in L,\ u \in W \Longrightarrow \exists Q \in L : u = (\overrightarrow{PQ})$

が成立するとき，L を S の k 次元**アフィン**(または**線型**)**部分空間**というのである．このとき L 自身，W をそれに付随するベクトル空間($W=V(L)$)として，K 上の k 次元アフィン空間になっていることは容易にわかる．また $B \in L$ を固定しておけば $L=\{P \in S \mid (\overrightarrow{BP}) \in W\}$ である．実際，任意の $u \in W$ に対し $(\overrightarrow{BP}) = u$ となる $P \in S$ は(2)により一意的であるが，それは(ii)によって L の元であり，逆に $P \in L$ とすれば $(\overrightarrow{BP}) \in W$ でなければならないことは(i)からわかる．L の次元を $\dim L$ で表わす：$\dim L = k = \dim W$．とくに $\dim L = 1$ であるとき L を S の直線といい，$\dim L = n-1$ であるとき L を S の超平面という．

L_1, L_2 を S の二つのアフィン部分空間として，$W_i = V(L_i)\ (i=1, 2)$ とおく．$W_1 \subset W_2$ のとき L_1 は L_2 に**平行**であるという．L_1 が L_2 に平行であっても，L_2 は L_1 に平行であるとはかぎらない．実際

$$L_1, L_2 \text{ が互いに平行 } \Longleftrightarrow W_1 = W_2.$$

そこでわれわれは L_1, L_2 が互いに平行であるときにかぎり $L_1 /\!/ L_2$ で表わすことにしよう．このとき関係 $/\!/$ は S のアフィン部分空間全体の集合に一つの同値関係を定めることは明らかである．S の1点 O があらかじめ固定されているものとすれば，この同値関係 $/\!/$ に関する任意の類は O を含むアフィン部分空間によって代表される．実際，L を任意のアフィン部分空間とし，$W=V(L)$ とするとき，$L_0 = \{P \in S \mid (\overrightarrow{OP}) \in W\}$ とおけば，L_0 は O を含むアフィン部分空間であり，たしかに $L_0 /\!/ L$ である．

1点 $B \in S$ と $V=V(S)$ の部分空間 W とが与えられているとき，$L=\{P \in S \mid (\overrightarrow{BP}) \in W\}$ によって S のアフィン部分空間を定めることができる．これを $L=$

(B, W) で表わすことにする．したがって $V(L)=W$ であり，$/\!/$ の定義により

(4.2)　　$(B_1, W_1) /\!/ (B_2, W_2) \Leftrightarrow W_1 = W_2.$

(i), (ii) から容易にわかるように

(4.3)　　$(B_1, W) = (B_2, W) \Leftrightarrow (\overrightarrow{B_1B_2}) \in W.$

また $L_1=(B_1, W_1)$，$L_2=(B_2, W_2)$ が $L_1 \cap L_2 \neq \phi$ をみたすならば

(4.4)　　$L_1 \cap L_2 = (B, W_1 \cap W_2) \qquad (\exists B \in L_1 \cap L_2).$

問　(4.4) を証明せよ．——

さて，体 K 上の n 次元アフィン空間 S に1点 O があらかじめ固定されているものとし，S の一つの k 次元アフィン部分空間 $L=(B, W)$ を考えよう．任意の点 $P \in S$ の位置ベクトルを $x=(\overrightarrow{OP})$ で，また B の位置ベクトルを $x_1=(\overrightarrow{OB})$ で表わせば，$(\overrightarrow{BP})=(\overrightarrow{OP})-(\overrightarrow{OB})=x-x_1$ であるから

(4.5)　　$P \in L \Leftrightarrow (\overrightarrow{BP}) \in W \Leftrightarrow \exists u \in W\colon x = x_1+u.$

一方，$V=V(S)$ の双対空間 V^* における W の零化空間を $W^\wedge$ とすれば，(3.7) により $u \in W \Leftrightarrow f(u)=0\ (\forall f \in W^\wedge)$ であるから，$(f_1, \cdots, f_r)$ を $W^\wedge$ の一つの底とすれば，$u \in W \Leftrightarrow f_i(u)=0\ (1 \leqq i \leqq r)$．ここで r は (3.6) により $\dim V-\dim W=n-k$ に等しい．そこで $f_i(x_1)=b_i \in K\ (1 \leqq i \leqq r)$ とおけば，$P \in L$ であるための必要十分条件は，(4.5) により

(4.6)　　$f_i(x) = b_i \qquad (1 \leqq i \leqq r)$

で与えられることがわかる．この連立方程式を‘アフィン部分空間 L の方程式’という．(4.3) により $b_i\ (1 \leqq i \leqq r)$ は $B \in L$ のとり方によらないで，$L, f_1, \cdots, f_r$ だけで定まることがわかる．

ところで (4.6) は O を原点とする S の一つの座標系 $\Sigma=\{O\,;a_1, \cdots, a_n\}$ を考えることにより，K 上の連立1次方程式とみなすことができる．実際，$x=\xi_1a_1+\cdots+\xi_na_n$，$f_i=\alpha_{i1}a_1^*+\cdots+\alpha_{in}a_n^*$　($\alpha_{ij} \in K$，$1 \leqq i \leqq r$，$(a_1^*, \cdots, a_n^*)$ は $(a_1, \cdots, a_n)$ の双対底) とすれば，(4.6) は P の座標 $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ に関する方程式として

(4.6)′　　$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j = b_i \qquad (1 \leqq i \leqq r)$

で表わすことができる．すなわち，n 個の未知数 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ に関する r 個の1次方程式からなる連立1次方程式である．ここで (4.6)′ の係数行列 $A=(\alpha_{ij})$ の階数が $r=n-k$ に等しいことに注意しよう．それは V の底 $(a_1, \cdots, a_n)$ としてはじ

めから $(\boldsymbol{a}_{n-k+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ $(k=\dim W)$ が W の底であるものをとり，$f_i=\boldsymbol{a}_i^*$ $(1\leqq i \leqq r)$ とすれば明らかである．とくに $r=1$ のとき $k=n-1$ であり，L は S の超平面である．

次に $(u_1, \cdots, u_k)$ を W の底とすれば，$P\in L$ の位置ベクトル $x=(\overrightarrow{OP})$ は，$\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in K$ を適当にとれば

(4.7)
$$x = x_1+\lambda_1 u_1+\cdots+\lambda_k u_k$$

で表わされる．これをアフィン部分空間 L のパラメータ表示という．S の座標系 $\Sigma=\{O\,;\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ に関して x, x_1, u_j $(1\leqq j\leqq k)$ をそれぞれ列ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{u}_j$ で表わし，(4.7) を $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\lambda_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{u}_k$ で表わしたものを，連立1次方程式 (4.6)′ の解と考えることができる．$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1$ $(\leftrightarrow B\in L)$ が一つの特殊解であり，$(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_k)$ は同次方程式 $\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j=0$ $(L_0=(O, W)$ の方程式$)$ の解空間の底である．

一般に体 K 上の連立1次方程式

(4.8)
$$\alpha_{i1}\xi_1+\cdots+\alpha_{in}\xi_n = b_i \qquad (1\leqq i\leqq m)$$

は $A_K{}^n$ の m 個の超平面 $\Pi_i:\alpha_{i1}\xi_1+\cdots+\alpha_{in}\xi_n=b_i$ の共通部分を表わすものと考えることができる．$L=\Pi_1\cap\cdots\cap\Pi_m$ とおけば，(4.4) によって $L\neq\phi$ のとき (すなわち (4.8) が解をもつとき) L は S のアフィン部分空間である．$W=V(L)$ は線型写像 $F_A: K^n\ni\boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}\in K^m$ の核と一致していること，したがって $\dim L=\dim W$ は，行列 A の階数を r とすれば $n-r$ に一致すること等に注意されたい．

c) 消去法と行列の基本変形

例4.1の連立1次方程式の解法は，ある種の一般論に従っているとはいえ，他の場合に対しても実際的な方法であるとはいえない．どのような連立1次方程式に対しても適用できるもっとも実用的な解法は，けっきょく古典的な消去法なのである．

例 4.3　例4.1の連立1次方程式

$$(*)\qquad \begin{cases} x_1+x_2+3x_3+x_4+5x_5 = 3 & \cdots\cdots(1) \\ \phantom{x_1+{}} x_2+x_3 +x_5 = 1 & \cdots\cdots(2) \\ -x_1 -2x_3 -2x_5 = -1 & \cdots\cdots(3) \\ \phantom{x_1+x_2+3x_3+{}} x_4+2x_5 = 1 & \cdots\cdots(4) \end{cases}$$

を今度は消去法で解く．（イ）x_1 を (1) だけに残し，他の式からは消去することを考える．そのためには (1) を (3) に加えればよい：$x_2+x_3+x_4+3x_5=2 \cdots (3)'$．（ロ）$x_2$ を (2) 以外の式から消去する．(2) の (-1) 倍を (1) と $(3)'$ に加えればよい：$x_1+2x_3+x_4+4x_5=2 \cdots (1)'$，$x_4+2x_5=1 \cdots (3)''=(4)$．（ハ）ここで $(3)''$，(4) には x_3 がすでに含まれていないから代りに x_4 に着目する．（ニ）$(3)''$ 以外の式から x_4 を消去する．$(3)''$ の (-1) 倍を $(1)'$ と (4) に加える：$x_1+2x_3+2x_5=1 \cdots (1)''$，(4) の両辺は 0．以上の操作（イ）～（ニ）の結果，（＊）は

$$(*)' \qquad \begin{cases} x_1 \qquad\quad +2x_3+2x_5 = 1 & \cdots\cdots (1)'' \\ \quad x_2 \quad\; + \;x_3+\; x_5 = 1 & \cdots\cdots (2) \\ \qquad\quad x_4 \quad\;\; +2x_5 = 1 & \cdots\cdots (3)'' \end{cases}$$

の3式に帰着された．$x_3=\lambda$，$x_5=\mu$ をどのような実数としても，$x_1=1-2\lambda-2\mu$，$x_2=1-\lambda-\mu$，$x_4=1-2\mu$ とおけば $(1)''$, (2), $(3)''$ の3式は同時に成立する．したがって連立1次方程式（＊）に解があるとすればそれは

$$(\sharp) \qquad {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = {}^t(1-2\lambda-2\mu, 1-\lambda-\mu, \lambda, 1-2\mu, \mu)$$

の形でなければならないが，任意の実数 λ, μ に対して，($\sharp$) はたしかに（＊）の解になっている．

ところで以上の消去法の操作は，実際には，（＊）の係数だけに着目して行なえば十分である．すなわち，（＊）の係数行列 A にもう1列 $\boldsymbol{b}={}^t(3,1,-1,1)$（（＊）の右辺）をつけ加えた (4, 6) 型行列 $\tilde{A}=(A|\boldsymbol{b})$ に次の操作を行なって順次変形することと同じである：（イ）第3行に第1行を加える；（ロ）第1行および第3行に第2行の (-1) 倍を加える；（ハ）第3列と第4列とを並べ換える；（ニ）第1行および第4行に第3行の (-1) 倍を加える．このとき

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(イ)} \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \cdots \xrightarrow{(ニ)} \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

であり，最後の行列に対応する式が$(*)'$である．——

一般に体K上の連立1次方程式

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (1 \leqq i \leqq m,\ a_{ij}, b_i \in K) \tag{4.9}$$

について消去法を行なうとき，次の4種類の操作を基本としていることに注意しよう：

[Ｉ]　第i式の両辺に$\alpha \in K^{\times} = K - \{0\}$をかける；

[II]　第k式に第l式のα倍を加える；

[III]　第k式と第l式を並べ換える；

[III]′ 未知数x_kとx_lの順序を入れ換える．

このうち[III],[III]′は未知数の消去自体には関係しないが，式を見やすいものにするための操作である．

そこで一般の行列$A \in M(m, n; K)$に対する次の6種類の変形を考えよう：

(Ｉ)　第i行に$\alpha \in K^{\times}$をかける；

(Ｉ)′ 第i列に$\alpha \in K^{\times}$をかける；

(II)　第k行に第l行のα倍$(\alpha \in K)$を加える；

(II)′ 第l列に第k列のα倍を加える；

(III)　第k行と第l行とを並べ換える；

(III)′ 第k列と第l列とを並べ換える．

この6種類の変形を**行列の基本変形**という．とくに(Ｉ),(II),(III)を行に関する基本変形といい，(Ｉ)′,(II)′,(III)′を列に関する基本変形という．連立1次方程式を解くときには主として行に関する基本変形を用い，補助的に(III)′を用いるのである．実際，(4.9)の係数行列$A=(a_{ij}) \in M(m, n; K)$にもう1列$\boldsymbol{b}={}^t(b_1, \cdots, b_m) \in K^m$をつけ加えて得られる$(m, n+1)$型行列を$\tilde{A}=(A|\boldsymbol{b})$とするとき，(4.9)に[Ｉ],[II],[III],[III]′を行なうことは，$\tilde{A}$に行列の基本変形(Ｉ),(II),(III),(III)′を行なうことと，それぞれ同等である．(ただし(III)′によって第$(n+1)$列を動かすことはしないものとする．)

ところで，$A \in M(m, n; K)$に対する基本変形(Ｉ),(II),(III)((Ｉ)′,(II)′,(III)′)を行なうことは，次のようなm次(n次)正方行列を左から(右から)Aにかけることと，それぞれ同じであることが簡単な計算によってわかる：

$$P_{\mathrm{I}} = i)\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ \cdots\cdots & & \alpha & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathrm{II}} = \begin{array}{c} \\ k) \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & \vdots & & \\ \cdots\cdots & & 1 & \cdots\ \alpha & & \\ & & & \ddots\ \vdots & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}_{\ l},$$

$$P_{\mathrm{III}} = \begin{array}{c} \\ k) \\ \\ l) \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ \cdots\cdots & 0 & \cdots & 1 & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \cdots\cdots & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

P_{I} は単位行列の (i,i) 成分だけを $\alpha\in K^{\times}$ でおき換えたもの，P_{II} は $I+\alpha E_{kl}$ (E_{kl} は行列単位)，P_{III} は単位行列の第 k 行を第 l 行と並べ換えたものである．この3種類の型の行列を**基本行列**という．ここで大切なのは

“基本行列は正則であり，その逆行列はまた同じ型の基本行列である”

ということである．実際，$P_{\mathrm{I}}{}^{-1}$ は P_{I} の α を α^{-1} でおき換えたもの，$P_{\mathrm{II}}{}^{-1}$ は P_{II} の α を $-\alpha$ でおき換えたもの ($P_{\mathrm{II}}{}^{-1}=I-\alpha E_{kl}$)，$P_{\mathrm{III}}{}^{-1}$ は P_{III} 自身にそれぞれ等しい．したがってとくに行列の基本変形は‘可逆操作’であることがわかる．すなわち，基本変形によって行列 A を A' に変形することができるとすれば，逆に A' に基本変形を行なうことによって A に変形することも可能なのである．

補題 4.1　行列 $\tilde{A}=(A|\boldsymbol{b})\in M(m,n+1\,;K)$ に基本変形 (I), (II), (III), (III)$'$ (ただし (III)$'$ は第 $(n+1)$ 列を動かさないように用いる) をくりかえし行なって

$$\tilde{A}' = \left[\begin{array}{c|c|c} I_r & C & \boldsymbol{d}_1 \\ \hline O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} & \boldsymbol{d}_2 \end{array}\right] \tag{4.10}$$

(ただし $C\in M(r,n-r\,;K)$，$\boldsymbol{d}_1\in K^r$，$\boldsymbol{d}_2\in K^{n-r}$) に変形できる．このとき r は A の階数に等しく，したがって基本変形の仕方には無関係に A だけで定まる．

証明　$A=O_{m,n}$ の場合は明らか ($r=0$) だから $A\neq O_{m,n}$ とする．したがって $A=(a_{ij})$ とするとき，ある成分 a_{kl} は0ではない．$a_{11}=0$ ならば，第1列に0でない成分があるときには基本変形 (III) を用いてそれを (1, 1) 成分となるようにする．第1列の成分がすべて0のときにかぎり基本変形 (III)$'$ を用いて $a_{kl}\neq 0$ が第1列にくるようにする．したがってはじめから $a_{11}\neq 0$ としてよい．

そこで $\tilde{A}$ の第1行に $a_{11}{}^{-1}$ をかけて $(1,1)$ 成分を1にする(基本変形(I))．次に第 i 行 $(2 \leqq i \leqq m)$ に第1行の $(-a_{i1})$ 倍を加える(基本変形(II))．けっきょく，$(1,1)$ 成分は1，それ以外の第1列の成分はすべて0となるわけである．このとき，さらに第2列から第 n 列までの第2行以下の成分がすべて0ならばこれでおわりである．そうでないものとしよう．以上の操作があらかじめ行なわれてあるものとして，はじめから

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|ccc|c} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} & * \\ \hline 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \\ \vdots & & \cdots\cdots & & * \\ 0 & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \end{array}\right]$$

としてよい．さらに，必要ならば基本変形(III)，(III)$'$ を行なって，$a_{22} \neq 0$ としてよい．$\tilde{A}$ の第2行に $a_{22}{}^{-1}$ をかける．したがって $(2,2)$ 成分は1となる．そこで第 i 行 $(i \neq 2)$ に第2行の $(-a_{i2})$ 倍を加える．このとき $(2,2)$ 成分以外の第2列の成分はすべて0になる．第3列から第 n 列までの第3行以下の成分がすべて0ならばこれでおわり，そうでなければ同様のことをくりかえす．けっきょく，有限回基本変形をくりかえして $\tilde{A}$ を (4.10) の形にすることができる．

以上の操作により，$\tilde{A}$ の $A=(a_{ij})$ の部分は

(4.11)
$$A' = \left[\begin{array}{c|c} I_r & C \\ \hline O_{r,m-r} & O_{m-r,n-r} \end{array}\right]$$

の形になる．A' に対してさらに基本変形(II)$'$ をくりかえし行なえば，C の部分を $O_{r,n-r}$ とすることができる．基本行列は正則行列であるから，以上の手続きの結果は，正則行列 $P \in M_m(K)$，$Q \in M_n(K)$ を適当にとれば

$$PAQ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right]$$

となることを示しているのであり，定理3.3$'$ により $r = \mathrm{rk}\, A$ は P, Q に無関係に A だけで定まることが保証されている．▌

連立1次方程式

(L)
$$Ax = \boldsymbol{b} \qquad (A \in M(m, n; K),\ \boldsymbol{b} \in K^m)$$

に対して $\tilde{A} = (A|\boldsymbol{b}) \in M(m, n+1; K)$ とおく．$\tilde{A}$ に基本変形(I)，(II)，(III)，

(III)′ をくりかえし行なうことにより，(4.10) の $\tilde{A}'$ になったものとすれば，(4.11) の A' を係数行列とする (#) と同値な連立1次方程式

$$\text{(L)}' \qquad A'\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{d} \qquad \left(\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_1 \\ \boldsymbol{d}_2 \end{bmatrix}\right)$$

が得られる．実際，$\boldsymbol{x}'={}^t(x_1', \cdots, x_n')$ は $\boldsymbol{x}={}^t(x_1, \cdots, x_n)$ の成分を並べ換えたもの (基本変形 (III)′ による) であり，$\tilde{A}'=(A'|\boldsymbol{d})$ に基本変形をくりかえすことにより $\tilde{A}$ に戻ることもできるのである．

定理 4.1 連立1次方程式 (L)′ が解をもつためには，$\boldsymbol{d}_2=\boldsymbol{o}$ であることが必要十分である．そのとき (L)′ の解は

$$(4.12) \qquad \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_r' \\ x_{r+1}' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \boldsymbol{d}_1 \\ \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}{\scriptstyle n-r} + \begin{bmatrix} -C \\ \hline I_{n-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-r} \end{bmatrix}$$

$(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-r} \in K)$ で与えられる．ただし C は (4.10) と同じものである．

証明 (L)′ を (4.11) を用いて表わせば

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_r' \end{bmatrix} + C\begin{bmatrix} x_{r+1}' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \boldsymbol{d}_1, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{d}_2$$

であり，したがって (L)′ が解をもつための必要十分条件は $\boldsymbol{d}_2=\boldsymbol{o}$ であること，また解をもつとすれば (4.12) の形でなければならないことがわかる．逆に任意の $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-r} \in K$ に対して (4.12) が (L)′ の解であることは代入するだけで容易に示すことができる．▌

(4.12) において $\boldsymbol{x}_1'={}^t({}^t\boldsymbol{d}_1, 0, \cdots, 0) \in K^n$ は (L)′ の一つの特殊解であり，$C=(\boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_{n-r})\ (\in M(r, n-r\,; K))$ とすれば

$$\boldsymbol{u}_1 = {}^t(-{}^t\boldsymbol{c}_1, 1, 0, \cdots, 0), \qquad \cdots, \qquad \boldsymbol{u}_{n-r} = {}^t(-{}^t\boldsymbol{c}_{n-r}, 0, \cdots, 0, 1)$$

が同次方程式 $A'\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{o}$ の解空間の底を与えているわけである．(L) の解を得るためには，(4.12) の $\boldsymbol{x}'$ の成分の順序をもとの $\boldsymbol{x}$ に戻せばよい．

次の諸結果は，すでに§3.1で述べたこと (とくに例3.2参照) から容易にわかることであるが，補題4.1，定理4.1によっても明らかである．

系1 $A\in M(m,n;K)$, $\boldsymbol{b}\in K^m$ のとき，連立1次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解をもつための必要十分条件は，$\tilde{A}=(A|\boldsymbol{b})$ とするとき $\mathrm{rk}\,A=\mathrm{rk}\,\tilde{A}$ となることである．

系2 $A\in M(m,n;K)$, $m<n$ のとき，同次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ はかならず自明でない解 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{o}$ をもつ．

系3 $A\in M(m,n;K)$, $m\geqq n$ のとき，同次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ が自明な解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ 以外に解をもたないための必要十分条件は $\mathrm{rk}\,A=n$ である．

系4 $A\in M(m,n;K)$, $\mathrm{rk}\,A=n\leqq m$ のとき，非同次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{o}$ が解をもつとすれば，それは一意的に定まる．とくに $m=n=\mathrm{rk}\,A$ の場合，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ はただ一つの解 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$ をかならずもつ．

注意1 $A\in M(m,n;K)$, $\mathrm{rk}\,A=n\leqq m$ のとき，A は基本変形(I), (II), (III), (III)′ により $A'=\begin{bmatrix} I_n \\ O_{m-n}\end{bmatrix}$ の形になるわけであるが，実際には(III)′ をまったく用いないで済む．補題4.1の証明を反省すればわかるように，(III)′ が必要になるのは，たとえば第1列から第 k 列までを順次

$$\boldsymbol{e}_1={}^t(1,0,\cdots,0),\qquad \cdots,\qquad \boldsymbol{e}_k=(0,\cdots,0,\overset{k}{\check{1}},0,\cdots,0)$$

に変形してきたとき，第 $(k+1)$ 列 $\boldsymbol{b}_{k+1}$ の第 $(k+1)$ 行以下の成分がすべて0になる場合に限るのであるが，これは $\boldsymbol{b}_{k+1}$ が $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_k$ の線型結合になっていることを意味する．ところが $\mathrm{rk}\,A=n$ ならば，もともと A のすべての列ベクトルが線型独立であり，基本変形をどのように行なっても行列の階数は不変であるから，$\boldsymbol{b}_{k+1}$ は $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_k$ の線型結合ではあり得ないのである．

注意2 連立1次方程式の解法としては，原理的には定理4.1で一応十分である．しかし係数 a_{ij} がある種の近似値で与えられているような数値計算の場合には，この定理を直接適用し難い場合もあり，諸種の工夫が必要となる[1]．

§4.2 逆行列の求め方

連立1次方程式の解法が明確になったことにより，体 K 上の任意の正則行列 $A\in M_n(K)$ に対して，その逆行列 $X=A^{-1}$ を求めることも原理的に可能である．実際，X の列ベクトルを $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ で表わせば

$$AX=(A\boldsymbol{x}_1,A\boldsymbol{x}_2,\cdots,A\boldsymbol{x}_n)=I_n=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$$

であるから，n 組の連立1次方程式 $A\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{e}_i\ (1\leqq i\leqq n)$ を解けばよい．A が正則ならばそれぞれの連立1次方程式はかならずただ一つの解をもつわけである．こ

---

1) 線型代数に関する数値計算法の軽便な参考書として，古屋茂“行列と行列式”(培風館)は，小冊子ながらつねに引用される名著である．

れ等を同時に解くことを考えることにより，以下に述べる a) の方法が得られる．また b) では，行列を分割して計算する方法について述べる．さらに §4.4，定理 4.7 では行列式を用いる方法が与えられるが，それも場合によっては十分実用的であるから参照されるとよい．どの方法が最も合理的であるかは場合によって異なるのであり，一つの方法だけに固執していると，暗算でできるほど単純な計算も複雑にしてしまうことがある．

a）基本変形を用いる方法

$A\in M_n(K)$ が正則であれば $\mathrm{rk}\,A=n$ であるから，前節の注意1により，行に関する基本変形 (I), (II), (III) を有限回行なうだけで A は単位行列 I_n に変形される．一方，A の行に関する基本変形は，基本行列を A に左からかけることによって表わされるのであった．そこで，変形 $A\to I_n$ に用いた基本行列 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ の積 $P_kP_{k-1}\cdots P_1$ を P とすれば $PA=I_n$，すなわち $P=P_kP_{k-1}\cdots P_1=A^{-1}$ である．このことはまた

“任意の正則行列は基本行列の積で表わされる”

ことを意味している．実際，$A=P^{-1}={P_1}^{-1}{P_2}^{-1}\cdots{P_k}^{-1}$ であり，基本行列の逆行列はまた基本行列であった．

さて，A, P は上述のとおりとして，$(n, 2n)$ 型行列 $(A|I_n)$ に $P_1, P_2, \cdots P_k$ による行に関する基本変形を行なえば，

$$P(A|I_n)=(PA|PI_n)=(I_n|P),\qquad P=A^{-1}.$$

すなわち $(A|I_n)$ に，A の部分が単位行列となるように行に関する基本変形をくりかえし行なったとき，最終の形 $(I_n|P)$ の P の部分が A の逆行列を与えている．

例 4.4　$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&3&1\\-2&-1&0\end{bmatrix}$ は列ベクトルが線型独立であるから正則行列である．$(3, 6)$ 型行列 $(A|I_3)$ の第 k 行を簡単のために (k) で表わす．

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\1&3&1&0&1&0\\-2&-1&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[(3)+2\times(1)]{(2)-(1)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&3&2&2&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[(3)-3\times(2)]{(1)-2\times(2)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&3&-2&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&2&5&-3&1\end{array}\right]\xrightarrow[\frac{1}{2}\times(3)]{}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&3&-2&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&\frac{5}{2}&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right]\xrightarrow[(1)-(3)]{}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \quad \therefore\ A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}. \quad ——$$

なおこの例では A が正則であることはあらかじめ容易にわかるが，かりに A が正則であるかどうかの判定が容易ではないとしても，この方法を適用し，もし途中で進行できなくなったとすれば A は正則ではないことがわかる．つまり正則性の判定にもこの方法を用いることができるのである．

問　例4.4の A を基本行列の積として表わせ．——

b）分割法

まず，行列 $A=\begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix}$，$A_1 \in M_p(K)$，$A_2 \in M_q(K)$ が次の二つの条件をみたしているものとしよう：

(1)　A_1 は正則である．

(2)　$D=A_2-A_{21}A_1{}^{-1}A_{12}$ は正則である．

このとき A も正則であり，

$$B = A_1{}^{-1}A_{12}, \qquad C = A_{21}A_1{}^{-1} \tag{4.13}$$

とおけば A の逆行列は

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1{}^{-1}+BD^{-1}C & -BD^{-1} \\ -D^{-1}C & D^{-1} \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

で与えられる．実際，条件(1),(2)がみたされているとき，(4.14)の右辺は意味をもち，この行列 X は $AX=I_{p+q}$ を解いて容易に得られる．逆に(4.14)の右辺を X とおけば，たしかに $AX=I_{p+q}$ をみたすから $X=A^{-1}$ である．

したがって条件(1),(2)が容易に確かめられるような場合には，A の逆行列を求めることは，A よりも小型の行列 A_1, D の逆行列を求めることに帰着されるのである．たとえば，$A_{21}=O_{q,p}$ のときには $D=A_2$ であり，このとき A^{-1} が(4.14)で与えられることは，すでに第2章，例2.49で述べた．

2次正方行列 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(K)$ が正則であれば $\det A=ad-bc\neq 0$ であり，この場合

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

であることは，これと A との積を計算してみれば容易にわかる．3次あるいは4次の正則行列については，適当な分割のもとで(1), (2)をみたす場合は，(4.15), (4.13), (4.14)の順に計算を実行して逆行列を求めることは容易である．

さて，行列 $A=\begin{bmatrix} A_{n-1} & \boldsymbol{a} \\ {}^t\boldsymbol{a}' & a_n \end{bmatrix} \in M_n(K)$ $(A_{n-1} \in M_{n-1}(K),\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}' \in K^{n-1},\ a_n \in K)$ において A_{n-1} は正則で，${A_{n-1}}^{-1}$ が求められたものとする．上述の議論により

$$d = a_n - {}^t\boldsymbol{a}' {A_{n-1}}^{-1} \boldsymbol{a} \in K$$

とおけば，$d \neq 0$ であることが A が正則であるための必要十分条件である．このとき $\boldsymbol{b} = {A_{n-1}}^{-1}\boldsymbol{a}$, ${}^t\boldsymbol{c} = {}^t\boldsymbol{a}'{A_{n-1}}^{-1}$ とおけば，(4.14)により

(4.14)′
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} {A_{n-1}}^{-1} + d^{-1}\boldsymbol{b}\,{}^t\boldsymbol{c} & -d^{-1}\boldsymbol{b} \\ -d^{-1}\,{}^t\boldsymbol{c} & d^{-1} \end{bmatrix}.$$

そこで一般に $A=(a_{ij}) \in M_n(K)$ に対して，その対角線上にある行列を

$$A_1 = (a_{11}), \qquad A_i = \begin{bmatrix} A_{i-1} & \boldsymbol{a}_i \\ {}^t\boldsymbol{a}_i' & a_{ii} \end{bmatrix} \quad (2 \leqq i \leqq n)$$

としよう．各 i について A_{i-1} が正則であって

$$d_i = a_{ii} - {}^t\boldsymbol{a}_i' {A_{i-1}}^{-1} \boldsymbol{a}_i \neq 0$$

であれば A_i も正則であり，したがって(4.14)′を用いて順次 ${A_1}^{-1}, {A_2}^{-1}, \cdots, {A_n}^{-1}$ が計算できる．とくに $A^{-1} = {A_n}^{-1}$ である．

$A_1, \cdots, A_{i-1}$ は正則であるが，$d_i = a_{ii} - {}^t\boldsymbol{a}_i' {A_{i-1}}^{-1} \boldsymbol{a}_i = 0$ となった場合には，行列 A の第 i 列を第 k 列 $(k \geqq i+1)$ と並べ換えてつくった行列 B について

$$B_i = \begin{bmatrix} A_{i-1} & \boldsymbol{b}_i \\ {}^t\boldsymbol{b}_i' & b_{ii} \end{bmatrix} \qquad (b_{ii} = a_{ik})$$

が正則かどうかを調べる．以下 A についてと同様に進行して B^{-1} が求められたものとしよう．このとき

“A の第 i 列を第 k 列と並べ換えてつくった行列 B が正則ならば，A も明らかに正則であり，A^{-1} は B^{-1} の第 i 行を第 k 行と並べ換えたものと一致する．”

実際，B を A の第 i 列を第 k 列と並べ換えた行列とすれば，基本行列

$$P = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i) \\ \\ k) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

を用いて $B=AP$ と表わされるから，$P^{-1}=P$ に注意すれば $I_n=BB^{-1}=(BP)\cdot(PB^{-1})=A(PB^{-1})$ であり，$A^{-1}=PB^{-1}$ が得られる．(同様に，B を A の第 i 行を第 k 行と並べ換えてつくった行列とすれば，A^{-1} は B^{-1} の第 i 列を第 k 列と並べ換えたものと一致することもわかる.)

以上により，正則行列 A の逆行列を求めるもう一つの一般的な方法が得られた．たとえば，逆行列を正方行列の次数 n の関数として表わさなければならないような場合には，この方法は a) で述べた方法よりも便利である．

例 4.5
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

の逆行列を求める．A を上述のように分割して

$$A_3=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},\quad {}^t\boldsymbol{a}'=(0,1,1),\quad a_{44}=1$$

とする．ここで A_3 は例4.4の行列の第2列を第3列と並べ換えた行列であるから，そこの結果を借用しよう．すなわち，A_3 の逆行列は例4.4で求めた逆行列の第2行を第3行と並べ換えたものである：

$$A_3^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{b}=A_3^{-1}\boldsymbol{a}$, ${}^t\boldsymbol{c}={}^t\boldsymbol{a}'A_3^{-1}$, $\boldsymbol{b}{}^t\boldsymbol{c}$, $d=1-{}^t\boldsymbol{a}'A_3^{-1}\boldsymbol{a}$ をこの順序で計算すれば

$$\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix},\quad {}^t\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}(3,-1,1),\quad \boldsymbol{b}{}^t\boldsymbol{c}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 21 & -7 & 7 \\ -6 & 2 & -2 \end{bmatrix},\quad d=-\frac{3}{2}$$

である．したがって (4.14)′ を用いて

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_3^{-1}+d^{-1}\boldsymbol{b}{}^t\boldsymbol{c} & -d^{-1}\boldsymbol{b} \\ -d^{-1}{}^t\boldsymbol{c} & d^{-1} \end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \qquad \text{——}$$

§4.3　行列式の定義と性質

a）行列式の定義

$\varepsilon(\sigma)$ を置換 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ の符号とする．n^2 個の変数 x_{ij} $(1\leqq i\leqq n,\ 1\leqq j\leqq n)$ の整係数 n 次同次多項式

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)x_{1\sigma(1)}x_{2\sigma(2)}\cdots x_{n\sigma(n)} \tag{4.16}$$

を n 次**行列式**(determinant) といい，

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \det(x_{ij})$$

等で表わす．また，$\boldsymbol{x}_j={}^t(x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{nj})$ とおいて

$$\det(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$$

で表わすこともある．

例 4.6　$n=1$ のときは，明らかに $\det(x_{11})=x_{11}$．

$n=2$ のとき，$\mathfrak{S}_2$ は二つの元 1_2, $\sigma=[1\ 2]$ からなる．$\varepsilon(1_2)=1$, $\varepsilon(\sigma)=-1$ であるから $\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}=x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}$ であり，これは第1章の定義(1.14)と一致する．

$n=3$ のとき，$\mathfrak{S}_3$ は6個の元からなり，そのうち偶置換は 1_3, $[1\ 3\ 2]$, $[1\ 2\ 3]$，奇置換は互換 $[2\ 3]$, $[1\ 2]$, $[1\ 3]$ である．ゆえに

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & x_{11}x_{22}x_{33}+x_{13}x_{21}x_{32}+x_{12}x_{23}x_{31} \\ & -x_{11}x_{23}x_{32}-x_{12}x_{21}x_{33}-x_{13}x_{22}x_{31} \end{aligned}$$

であり，これが第1章の定義(1.15)と一致することも容易にわかる．――

R を単位元1をもつ可換環とする．行列 $A=(a_{ij})\in M_n(R)$ が与えられたとき，n 次行列式(4.16)の各変数 x_{ij} に a_{ij} を代入 $(x_{ij}=a_{ij})$ して得られる R の元を行列 A の行列式という．$A=(a_{ij})$ の行列式を

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad |A|, \qquad \det A, \qquad \det(a_{ij})$$

等で表わす．また，A の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_j$ $(1\leqq j\leqq n)$ とするとき，$\det A=\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ で表わすこともある．n 次行列式 $\det(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ の各 $\boldsymbol{x}_j$ の変域を R^n と考えれば，R^n 上の R に値をとる n 変数の関数

$$\det : \underbrace{R^n\times\cdots\times R^n}_{n} \ni (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \longmapsto \det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \in R$$

の値として $\det A=\det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ を考察することもできる．

単位行列 $I_n \in M_n(R)$，零行列 $O_n\in M_n(R)$ に対して

$$\det I_n = 1, \qquad \det O_n = 0$$

であることは定義から明らかである．また $c\in R$, $A\in M_n(R)$ のとき

(4.17) $$\det(cA) = c^n \det A$$

であることも，行列式が n 次同次多項式であることから明らかである．

定理 4.2　$A\in M_n(R)$ とその転置行列 ${}^tA$ の行列式は一致する：

$$\det A = \det {}^tA.$$

証明　$\mathfrak{S}_n$ は群であるから，$\mathfrak{S}_n \ni \sigma \mapsto \sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n$ は全単射である．したがって $A=(a_{ij})$ とすれば

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}.\end{aligned}$$

$\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2), \cdots, \sigma^{-1}(n)$ を $1, 2, \cdots, n$ の順に直し，これに従って各項の積の順序を並べかえる．$\sigma^{-1}(i)=j$ とおけば $i=\sigma(j)$ だから $a_{i\sigma^{-1}(i)}=a_{\sigma(j)j}$ であり，ゆえに

$$\det A = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

この右辺は $\det {}^tA$ に他ならない．▌

例 4.7　上三角行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

の行列式は対角成分の積に等しい：

(4.18) $$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

実際，$A=(a_{ij})$ とすれば，$i>j$ のとき $a_{ij}=0$ であるから，ある ν に対して $\sigma(\nu)<\nu$ となるような $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ に対しては $a_{\nu\sigma(\nu)}=0$ であり，和

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

はすべての i に対して $\sigma(i) \geqq i$ であるような $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ についてだけ考えればよい．ところが $\sigma(i) \geqq i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ となるのは $\sigma = 1_n$ (恒等置換) のときだけである．

定理4.2により下三角行列の行列式についても同じことがいえる．——

注意　定理4.2は行列式の性質を簡明に記述する上で重要である．すなわち，行列式 $\det(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ の列 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ に関して述べられる性質はすべて行についても成立するのである．実際，$X = (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$，${}^tX = (\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n)$ とすれば，$\det X$ の行に関する性質は $\det({}^tX)$ の列 $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ に関する性質として述べることができる．したがって次の項で述べる行列式の列に関する諸性質は，それぞれ断わるまでもなく，行に関しても成立するのである．

b) 行列式の基本的性質

以下ここでも R は単位元をもつ可換環である．R^n に次のように加法，スカラー乗法を定めれば，R^n は左 R 加群になるのであった (第2章，§2.2, a))：$\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, \cdots, a_n)$，$\boldsymbol{b} = {}^t(b_1, \cdots, b_n) \in R^n$，$\lambda \in R$ とするとき，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = {}^t(a_1+b_1, \cdots, a_n+b_n), \\ \lambda \boldsymbol{a} = {}^t(\lambda a_1, \cdots, \lambda a_n). \end{cases}$$

とくに $\boldsymbol{e}_1 = {}^t(1, 0, \cdots, 0)$，$\boldsymbol{e}_2 = {}^t(0, 1, \cdots, 0)$，$\cdots$，$\boldsymbol{e}_n = {}^t(0, 0, \cdots, 1)$ とすれば，R^n の任意の元 $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, \cdots, a_n)$ は $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の‘線型結合’$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n$ として一意的に表わすことができる．そこで順序も考えた組 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ のことを，R が体のときと同様に，R^n の標準底という．(このように‘底’をもつ左 R 加群を一般に有限階数の自由加群といい，底の元の個数をその自由加群の階数という.)

左 R 加群 R^n 上の R に値をとる n 変数関数としての行列式 $\det : \underbrace{R^n \times \cdots \times R^n}_{n} \to R$ について，次の定理に述べる二つの性質は最も基本的である：

定理 4.3　(1)　各 j $(=1, 2, \cdots, n)$ について

$$(4.19) \quad \begin{cases} \det(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_j + \boldsymbol{y}_j, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \\ \quad = \det(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_j, \cdots, \boldsymbol{x}_n) + \det(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_j, \cdots, \boldsymbol{x}_n), \\ \det(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \lambda \boldsymbol{x}_j, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \lambda \det(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_j, \cdots, \boldsymbol{x}_n). \end{cases}$$

(2)　$k \neq l$ のとき，$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}_l$ とすれば

$$\det(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = 0.$$

証明　(1) は行列式の定義 (4.16) から明らかである．$\sigma(i) = j$ であるような i

に対して $x_{i\sigma(i)}$ を $x_{i\sigma(i)}+y_{i\sigma(i)}$, $\lambda x_{i\sigma(i)}$ でおきかえたものが (4.19) の左辺である．

(2) $X=(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)=(x_{ij})$, $\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}_l$ $(k\neq l)$ とする．したがって $x_{ik}=x_{il}$ $(1\leqq i\leqq n)$ である．互換 $\tau=[k\ l]$ を代表元として $\mathfrak{S}_n$ を偶置換，奇置換の類に分ける：$\mathfrak{S}_n=\mathfrak{A}_n\cup\tau\mathfrak{A}_n$．このとき

$$\begin{aligned}\det X &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{A}_n} x_{1\sigma(1)}\cdots x_{n\sigma(n)} - \sum_{\sigma\in\mathfrak{A}_n} x_{1\tau\sigma(1)}\cdots x_{n\tau\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{A}_n}\left(x_{1\sigma(1)}\cdots x_{n\sigma(n)} - x_{1\tau\sigma(1)}\cdots x_{n\tau\sigma(n)}\right).\end{aligned}$$

各 $\sigma\in\mathfrak{A}_n$ に対してそれぞれ i, j を $\sigma(i)=k$, $\sigma(j)=l$ のように定めれば，$\nu\neq i, j$ のときは $\sigma(\nu)=\tau\sigma(\nu)$ だから $x_{\nu\sigma(\nu)}=x_{\nu\tau\sigma(\nu)}$．また i, j に対しても

$$x_{i\sigma(i)} = x_{ik} = x_{il} = x_{i\tau\sigma(i)},$$

$$x_{j\sigma(j)} = x_{jl} = x_{jk} = x_{j\tau\sigma(j)}.$$

ゆえに $\det X=\det(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)=0$ である．▌

次の系1は行列式の計算において大切である．

系 1 行列式のある列に他の列のスカラー倍を加えても行列式の値は不変である：

$$\begin{aligned}&\det(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k+\lambda\boldsymbol{x}_l, \cdots, \boldsymbol{x}_l, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \\ &\quad = \det(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k, \cdots, \boldsymbol{x}_l, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \qquad (\lambda\in R).\end{aligned}$$

証明 (4.19) により左辺を第 k 列に関して二つの行列式にわければ，定理4.3の (2) によって，一方は 0 であることがわかる．▌

一般に R^n 上の R に値をとる m 変数の関数 ($m=n$ とは限らない)

$$F:\ \underbrace{R^n\times\cdots\times R^n}_{m} \longrightarrow R$$

が R^n 上の m **重線型関数**であるというのは，各 j $(=1, 2, \cdots m)$ について

$$(4.20)\qquad \begin{cases} F(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_j+\boldsymbol{y}_j, \cdots, \boldsymbol{x}_m) \\ \quad = F(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_j, \cdots, \boldsymbol{x}_m)+F(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_j, \cdots, \boldsymbol{x}_m), \\ F(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \lambda\boldsymbol{x}_j, \cdots, \boldsymbol{x}_m) = \lambda F(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_j, \cdots, \boldsymbol{x}_m) \qquad (\lambda\in R)\end{cases}$$

をみたすことである．

また R^n 上の m 重線型関数が**交代** (alternating) であるとは，次の条件 (A) をみたすことである：

(A) $k\neq l$ のとき $\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}_l$ とすれば

$$F(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m) = 0.$$

定理4.3は，行列式を R^n 上の n 変数 $(m=n)$ の関数とみなせば，それが交代 n 重線型関数であることを述べているのである．

R^n 上の交代 m 重線型関数 F は次の性質をみたす：

(B)　任意の $\sigma\in\mathfrak{S}_m$ に対して

$$F(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)},\cdots,\boldsymbol{x}_{\sigma(m)})=\varepsilon(\sigma)F(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m).$$

したがってとくに行列式については

系2　任意の $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ に対して

$$\det(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)},\cdots,\boldsymbol{x}_{\sigma(n)})=\varepsilon(\sigma)\det(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n).$$

[(B)の証明]　任意の $\sigma\in\mathfrak{S}_m$ は互換の積として表わすことができるから，任意の互換 $[k\ l]$ に対して(B)を証明すればよい．すなわち(B)と同値な命題

$$\text{(B)}'\qquad F(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\underset{\smile}{\overset{k}{\boldsymbol{x}_l}},\cdots,\underset{\smile}{\overset{l}{\boldsymbol{x}_k}},\cdots,\boldsymbol{x}_m)=-F(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_k,\cdots,\boldsymbol{x}_l,\cdots,\boldsymbol{x}_m)$$

を示すのである．(A)により

$$F(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\overset{k}{\overbrace{\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{x}_l}},\cdots,\overset{l}{\overbrace{\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{x}_l}},\cdots,\boldsymbol{x}_m)=0.$$

この右辺を(4.20)を用いて4個の部分に分解し，再び(A)を用いれば(B)′が得られる．▌

2が R の零因子でないときには，(B)をみたす m 重線型関数は交代，すなわち(A)をみたす．実際，(B)′において $\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}_l$ とおけばただちに(A)が得られる．したがって

“2が R の零因子でなければ，m 重線型関数についての条件(A), (B), (B)′はすべて同値である．”

しかし2が零因子の場合には，(B)′において $\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}_l$ としても，何の強制力もないあたりまえの式しか得られず，(B) $\Longrightarrow$ (A)を示すことはできないのである．性質(B)または(B)′を反対称性ということもある．

なお定理4.3，系1，系2は，行列式のいわば列に関する性質であるが，§4.3，a)の注意で述べたとおり，同じ性質がすべて行に関しても成立する．

例4.8　$\det(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ のある列 $\boldsymbol{a}_j$ が $\boldsymbol{o}={}^t(0,\cdots,0)$ ならば，$\boldsymbol{a}_j=0\cdot\boldsymbol{a}_j$ だから，(4.19)により

$$\det(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=0\cdot\det(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=0.\qquad\text{——}$$

例4.9　系2により

$$\det(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{e}_{\sigma(2)}, \cdots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \det I_n = \varepsilon(\sigma).$$ ——

例 4.10 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 11 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 11 & 10 \\ 0 & 11 & 10 \end{vmatrix}$ (第2行+3×第1行).

したがって定理4.3の(2)に対応する行に関する性質によって，この行列式の値は0である．——

例 4.11 n^2 個の文字 x_{ij} $(1 \leqq i, j \leqq n)$ の行列式 $\det(x_{ij})$ は $\boldsymbol{Z}$ 係数の多項式として既約であることを示そう．有理数体 $\boldsymbol{Q}$ 上の多項式として既約であることをいえば十分である．$\det(x_{ij}) = f \cdot g$ (f, g は $\boldsymbol{Q}$ 上の多項式)と分解されたものとして文字 x_{11} が f に含まれるとしよう．このとき行列式が第1列の各文字 x_{i1} に関して1次式であり，

$$\det(\lambda \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \lambda \det(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \qquad (\lambda \in \boldsymbol{Q})$$

であることから，x_{i1} $(1 \leqq i \leqq n)$ はすべて f に含まれ，g には含まれない．したがってまた第 i 行に関する線型性((4.19)を行に関して言い換えたもの)により，$x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ はすべて f に含まれ，g には含まれない．したがって g は定数である．——

定理4.3が行列式の性質として最も基本的であるという理由は，実はこの二つの性質がほとんど完全に行列式を特徴づけて，定数倍を除き他の R^n 上の n 変数関数から区別することによる．実際，もう少し一般に次の定理を証明することができるのである．

定理 4.4 F を R^n 上の交代 m 重線型関数とする．

(1) $m > n$ のとき $F = 0$.

(2) $m = n$ のとき $F(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = c \det(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$.

(3) $m < n$ のとき $\boldsymbol{x}_j = {}^t(x_{1j}, \cdots, x_{nj})$ $(1 \leqq j \leqq n)$ とすれば

$$F(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m) = \sum_{1 \leqq k_1 < \cdots < k_m \leqq n} c_{k_1 \cdots k_m} \begin{vmatrix} x_{k_1 1} & \cdots & x_{k_1 m} \\ & \cdots\cdots & \\ x_{k_m 1} & \cdots & x_{k_m m} \end{vmatrix}.$$

ただし $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ を R^n の標準底とすれば，(2)において $c = F(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$，(3)において $c_{k_1 \cdots k_m} = F(\boldsymbol{e}_{k_1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_m})$．また(3)の右辺の $\sum$ は $1, 2, \cdots, n$ から m 個取り出す組合せ $\{k_1, \cdots, k_m\}$ 全部$\left(\binom{n}{m} \text{個}\right)$にわたる和である．

証明　$\boldsymbol{x}_j = x_{1j}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_{nj}\boldsymbol{e}_n$ $(1 \leqq j \leqq m)$ とすれば，F の m 重線型性により，$F(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m) = \sum_{\nu_1, \cdots, \nu_m = 1}^{n} x_{\nu_1 1} \cdots x_{\nu_m m} F(\boldsymbol{e}_{\nu_1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{\nu_m})$．$m > n$ ならば $\boldsymbol{e}_{\nu_1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{\nu_m}$ の中にかならず同じものがあるから F の交代性により $F=0$．また $m \leqq n$ のときは $\nu_1, \cdots, \nu_m$ は相異なるものとしてよいから，$\sigma \in \mathfrak{S}_m$ を，$1, 2, \cdots, n$ から取り出した m 文字 $\{k_1, \cdots, k_m\}$ 上の置換とみなし，$\sigma(k_\alpha) = \nu_\alpha$ $(1 \leqq \alpha \leqq m)$ とすれば $F(\boldsymbol{e}_{\nu_1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{\nu_m}) = \varepsilon(\sigma) F(\boldsymbol{e}_{k_1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_m})$．したがって $\det {}^t(x_{k_\alpha j}) = \det(x_{k_\alpha j})$ に注意すれば (2), (3) が得られる．▌

とくに定理4.4の(2)により行列式を R^n 上の交代 n 重線型関数 F で $F(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = 1$ をみたすものと定義することもできるわけである．しかしこの場合には，そのような F が実際に存在すること，およびその一意性を示さなければならない．われわれは行列式を，はじめから存在が明らかな形で定義したのである(なお例4.16参照)．

次の定理は，いまの場合定理4.4の系にすぎないが，行列式を定理4.3とは別の方面から特徴づける基本的なものである(例4.15および例4.28参照)．

定理 4.5　$A, B \in M_n(R)$ とすれば

(4.21)
$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

証明　$\boldsymbol{x}_j$ $(1 \leqq j \leqq n)$ を R^n 上の変数として，$X = (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$，$F(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \det(A\boldsymbol{x}_1, \cdots, A\boldsymbol{x}_n) = \det(AX)$ とおく．このとき F は明らかに R^n 上の交代 n 重線型関数であるから，定理4.4の(2)により

$$F(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = F(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \det(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n).$$

一方，$F(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = \det(AI_n) = \det A$．ここで $X = B$ とおけば(4.21)が得られる．▌

とくに $P \in M_n(R)$ を正則行列とすれば，(4.21)により

(4.22)
$$\det(P^{-1}AP) = \det A$$

が得られる．($|P^{-1}P| = |P^{-1}||P| = 1$，したがって $|P^{-1}| = |P|^{-1}$ であることに注意する．) したがって V を体 K 上の線型空間，T を V 上の線型変換とするとき，V の適当な底に関する T の行列を $A \in M_n(K)$ とすれば，$\det A$ は底のとり方には無関係に T だけで定まるものであることがわかる．そこでこれを線型変換 T の**行列式**といい，やはり $|T|$, $\det T$ 等で表わす．すなわち

(4.23)
$$\det T = \det A.$$

例 4.12　$A=\begin{bmatrix} A_1 & * \\ O & A_2 \end{bmatrix} \in M_n(R)$，$A_1, A_2$ は正方行列であるものとしよう．このとき

$$\det A = \det A_1 \cdot \det A_2. \tag{4.24}$$

$A=\begin{bmatrix} A_1 & O \\ * & A_2 \end{bmatrix}$ の形であっても同様である (定理 4.2)．$A_1 \in M_p(R)$，$A_2 \in M_q(R)$ $(p+q=n)$ とし，$\boldsymbol{x}_j$ $(1 \leqq j \leqq q)$ を R^q 上の変数として，$X=(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_q)$ とおき

$$F(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_q) = \det\begin{bmatrix} A_1 & O \\ * & X \end{bmatrix}$$

を考える．行列式の性質により F は R^q 上の交代 q 重線型関数であるから定理 4.4 の (2) により $F(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_q)=c \det X$.

$$c = F(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_q) = \det\begin{bmatrix} A_1 & O \\ * & I_q \end{bmatrix} = \det A_1$$

を示せばよい．$\begin{bmatrix} A_1 & O \\ * & I_q \end{bmatrix}$ の (i, j) 成分を a_{ij} で表わし，

$$\det\begin{bmatrix} A_1 & O \\ * & I_q \end{bmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{p\sigma(p)} a_{p+1\sigma(p+1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

とする．$i \leqq p$ のとき $\sigma(i) \geqq p+1$ ならば左辺の形から明らかに $a_{i\sigma(i)}=0$ であるから，任意の $i \leqq p$ に対して $\sigma(i) \leqq p$ となる $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ についてだけの和を考えればよい．このような σ については $i \geqq p+1$ のとき $\sigma(i) \geqq p+1$ であるから，また左辺の形により $a_{i\sigma(i)}=\delta_{i\sigma(i)}$ $(i \geqq p+1)$ であることがわかる．したがって上記の和は，実は

$$\mathfrak{S}_n \ni \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & p & p+1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_p & p+1 & \cdots & n \end{pmatrix} \longleftrightarrow \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_p$$

についてだけ考えればよい．すなわち

$$\det\begin{bmatrix} A_1 & O \\ * & I_q \end{bmatrix} = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\tau) a_{1\tau(1)} \cdots a_{p\tau(p)} = \det A_1.$$

ゆえに $F(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_q)=\det A_1 \cdot \det X$ であり，$X=A_2$ とおけば (4.24) が得られる．——

問　A, B を実数体 $\boldsymbol{R}$ 上の n 次正方行列とする．定理 4.3 の系 1 および (4.24) を用いて

(1)　$\det\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A+B) \det(A-B)$,

(2) $\det\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} = |\det(A+\sqrt{-1}\,B)|^2$ 　(| | は絶対値)

を示せ．——

例 4.13 $A=\begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix} \in M_n(R)$，$A_1 \in M_p(R)$，$A_2 \in M_q(R)$ $(p+q=n)$ とする．このとき A_1 が正則ならば

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_p & -A_1^{-1}A_{12} \\ O & I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ A_{21} & A_2-A_{21}A_1^{-1}A_{12} \end{bmatrix}.$$

したがって (4.21), (4.24) により

$$\det A = \det A_1 \cdot \det(A_2-A_{21}A_1^{-1}A_{12}).$$

——

例 4.14 V を体 K 上の n 次元線型空間，T を V 上の線型変換とする．T の行列式について，第3章の定義((3.42) 参照) と (4.23) による定義とが一致することを示そう．

T の特性因子 (定理 3.7) を $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_t$ とし，

$$\varphi_i(X) = X^{\nu_i}+\alpha_1{}^{(i)}X^{\nu_i-1}+\cdots+\alpha_{\nu_i}{}^{(i)} \qquad (i=0, 1, \cdots, t)$$

とすれば，T の特性多項式 $f_T=\varphi_0\varphi_1\cdots\varphi_t$ の定数項は

$$f_T(0) = \varphi_0(0)\varphi_1(0)\cdots\varphi_t(0) = \alpha_{\nu_0}{}^{(0)}\alpha_{\nu_1}{}^{(1)}\cdots\alpha_{\nu_t}{}^{(t)}$$

であるから，(3.42) により $\det T=(-1)^n\alpha_{\nu_0}{}^{(0)}\alpha_{\nu_1}{}^{(1)}\cdots\alpha_{\nu_t}{}^{(t)}$．

一方，T の自然標準形は

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & & 0 \\ & A_1 & \\ 0 & & \ddots \; A_t \end{bmatrix}, \qquad A_i = \begin{bmatrix} 0 & & & & -\alpha_{\nu_i}{}^{(i)} \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 0 & -\alpha_2{}^{(i)} \\ & & & 1 & -\alpha_1{}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (0 \leqq i \leqq t)$$

であるから，(4.23), (4.24) により

$$\det T = \det A = \det A_0 \det A_1 \cdots \det A_t.$$

定理 4.3 の系 2 を用いて

$$\det A_i = (-1)^{\nu_i-1}\begin{vmatrix} -\alpha_{\nu_i}{}^{(i)} & & & \\ \vdots & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\alpha_2{}^{(i)} & & & 1 \\ -\alpha_1{}^{(i)} & & & & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix}\text{第 } n \text{ 列を順次前の列と並} \\ \text{べ換えて第 1 列に出す}\end{pmatrix}$$

であるから，(4.18) により $\det A_i=(-1)^{\nu_i}\alpha_{\nu_i}{}^{(i)}$ である．したがって $\nu_0+\nu_1+\cdots$

$+\nu_t=\deg f_T=n$ に注意すれば，ふたたび $\det T=(-1)^n\alpha_{\nu_0}{}^{(0)}\alpha_{\nu_1}{}^{(1)}\cdots\alpha_{\nu_t}{}^{(t)}$ が得られ，2通りの定義の一致していることがわかった．

また特性多項式 f_T のある分解体を $L\,(\supset K)$ とするとき，T を V の L への係数拡大 V_L 上の線型変換に自然に拡張して考えれば，環 $L[X]$ 上の行列 $XI-A$ の行列式と特性多項式 f_T とは，(3.46) により L 上の関数として一致するから，けっきょく K 係数の多項式として

$$f_T(X)=\det(XI-A) \tag{4.25}$$

であることも示された．(K 上の関数として (3.46) が成立することだけから，多項式としての等式 (4.25) を示すことは，一般にはできない．たとえば K が有限体の場合を考えよ．f_T の分解体上で (3.46) を用いれば，f_T と $\det(XI-A)$ は1次因数がすべて一致する n 次多項式であるから，(4.25) が成立することがわかるのである．なお例4.17参照.) ——

例 4.15　(4.21) は行列式の性質として基本的なものであるから定理の形で述べたわけであるが，その証明から想像されるように，定理4.4の応用としてはもっと一般的なことが証明できる．

$A=(a_{ij})\in M(m,n\,;R)$，$B=(b_{jk})\in M(n,m\,;R)$ とすれば，$C=AB\in M_m(R)$ であるから $\det C$ が定義できる．このとき

$m>n$ ならば

$$\det C=0,$$

$m\leqq n$ ならば

$$\det C=\sum_{1\leqq k_1<\cdots<k_m\leqq n}\begin{vmatrix}a_{1k_1} & \cdots & a_{1k_m}\\ & \cdots\cdots & \\ a_{mk_1} & \cdots & a_{mk_m}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_{k_11} & \cdots & b_{k_1m}\\ & \cdots\cdots & \\ b_{k_m1} & \cdots & b_{k_mm}\end{vmatrix}. \tag{4.26}$$

ここで (4.26) の和の意味は，定理4.4と同じである．とくに $m=n$ の場合が (4.21) に他ならない．証明は定理4.5と同様である．すなわち，$\boldsymbol{x}_j={}^t(x_{1j},\cdots,x_{nj})$ $(1\leqq j\leqq m)$，$X=(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m)$ とおけば

$$F(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m)=\det(AX)=\det(A\boldsymbol{x}_1,\cdots,A\boldsymbol{x}_m)$$

は R^n 上の交代 m 重線型関数であるから，定理4.4を適用すればよい．とくに $m\leqq n$ のとき $A=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ ならば

$$c_{k_1\cdots k_m}=\det(A\boldsymbol{e}_{k_1},\cdots,A\boldsymbol{e}_{k_m})=\det(\boldsymbol{a}_{k_1},\cdots,\boldsymbol{a}_{k_m})$$

であり, $X=B$ とおけば (4.26) が得られる. ——

例 4.16 とくに体 K 上の n 次元列ベクトル空間 K^n の場合, その上の K に値をとる n 変数関数としての行列式は, 実は定理4.3の二つの性質よりも少し弱い条件で特徴づけられることがわかる. すなわち

$$F:\ \underbrace{K^n\times\cdots\times K^n}_{n}\ni(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\longmapsto F(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\in K$$

が次の二つの条件をみたしているものとしよう:

(i) $F(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\lambda\boldsymbol{x}_j,\cdots,\boldsymbol{x}_n)=\lambda F(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_j,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\quad(\lambda\in K)$,

(ii) $k\neq l$ のとき, $\boldsymbol{x}_k$ を $\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{x}_l$ でおきかえても F の値は変わらない.

このとき $F(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)=c\det(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$ である.

条件 (i), (ii) をみたせば, F は K^n 上の交代 n 重線型関数であることをいえばよい. まず $k\neq l$ のとき $\boldsymbol{x}_k$ を $\boldsymbol{x}_k+\lambda\boldsymbol{x}_l$ $(\lambda\in K,\ \lambda\neq 0)$ でおきかえても F の値は不変であることに注意しよう. 実際

$$\begin{aligned}F(\cdots,\boldsymbol{x}_k,\cdots,\boldsymbol{x}_l,\cdots)&=\lambda^{-1}F(\cdots,\boldsymbol{x}_k,\cdots,\lambda\boldsymbol{x}_l,\cdots)\\&=\lambda^{-1}F(\cdots,\boldsymbol{x}_k+\lambda\boldsymbol{x}_l,\cdots,\lambda\boldsymbol{x}_l,\cdots)\\&=F(\cdots,\boldsymbol{x}_k+\lambda\boldsymbol{x}_l,\cdots,\boldsymbol{x}_l,\cdots).\end{aligned}$$

したがって $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ が線型従属のとき, $\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{o}$, $\lambda_k\neq 0$ とすれば

$$\begin{aligned}F(\cdots,\boldsymbol{x}_k,\cdots)&=F\Bigl(\cdots,\boldsymbol{x}_k+\sum_{i\neq k}(\lambda_i/\lambda_k)\boldsymbol{x}_i,\cdots\Bigr)\\&=F(\cdots,\overset{k}{\breve{\boldsymbol{o}}},\cdots)=0\cdot F(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m)=0.\end{aligned}$$

ゆえに, とくに $k\neq l$ のとき $\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}_l$ とすれば F の値は 0 となる.

$F(\cdots,\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{y}_i,\cdots)=F(\cdots,\boldsymbol{x}_i,\cdots)+F(\cdots,\boldsymbol{y}_i,\cdots)$ を示す. 同じことであるから見やすくするために $i=1$ の場合を考えよう. $\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ が線型従属のときは

$$F(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)=F(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)=F(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)=0$$

だから明らか. $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ が線型独立であるとして

$$\boldsymbol{x}_1=\lambda\boldsymbol{a}_1+\sum_{i=2}^{n}\lambda_i\boldsymbol{x}_i,\qquad \boldsymbol{y}_1=\mu\boldsymbol{a}_1+\sum_{i=2}^{n}\mu_i\boldsymbol{x}_i$$

とおけば

$$\begin{aligned}F(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)&=F((\lambda+\mu)\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\\&=(\lambda+\mu)F(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\end{aligned}$$

$$= F(\lambda \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) + F(\mu \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$$
$$= F(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) + F(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n).$$

以上によって，F は交代 n 重線型関数であることが示された．とくに $F(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)=1$ のとき $F=\det$ である．——

§4.4　小行列式と行列式の展開

a）行列式の余因子展開とその応用

$A=(a_{ij}) \in M(m, n; R)$ (R は単位元をもつ可換環) とする．添字 $1, 2, \cdots, m$ から r 個とり出す組合せ $\mu=\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$ $(1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqq m)$，および添字 $1, 2, \cdots, n$ から r 個とり出す組合せ $\nu=\{j_1, j_2, \cdots, j_r\}$ $(1 \leqq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leqq n)$ に対して作った r 次の行列式

$$a_{\mu\nu}{}^{(r)} = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_r} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_r} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{i_rj_1} & a_{i_rj_2} & \cdots & a_{i_rj_r} \end{vmatrix} \tag{4.27}$$

を行列 A の r 次の**小行列式**という．

このような小行列式が A に対して $\binom{m}{r}\binom{n}{r}$ 個存在する．とくに $\mu=\{i\}$，$\nu=\{j\}$ のとき $a_{\mu\nu}{}^{(1)}=a_{ij}$ である．

$m=n$ のとき，$1, 2, \cdots, n$ から $\mu=\{i_1, \cdots, i_r\}$ を除いた添字の集合 $\bar{\mu}=\{i_{r+1}, \cdots, i_n\}$ $(i_{r+1} < \cdots < i_n)$，および $\nu=\{j_1, \cdots, j_r\}$ を除いた添字の集合 $\bar{\nu}=\{j_{r+1}, \cdots, j_n\}$ $(j_{r+1} < \cdots < j_n)$ に対しても $(n-r)$ 次の小行列式 $a_{\bar{\mu}\bar{\nu}}{}^{(n-r)}$ が定まる．これに次のように符号をつけたもの

$$\Delta_{\mu\nu}{}^{(n-r)} = (-1)^{i_1+\cdots+i_r+j_1+\cdots+j_r} a_{\bar{\mu}\bar{\nu}}{}^{(n-r)} \tag{4.28}$$

を $a_{\mu\nu}{}^{(r)}$ の**余因子**という．$r=1$ のとき，すなわち

$$\mu = \{i\}, \qquad \bar{\mu} = \{1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n\} = \bar{i},$$
$$\nu = \{j\}, \qquad \bar{\nu} = \{1, \cdots, j-1, j+1, \cdots, n\} = \bar{j}$$

のときには，$a_{ij}=a_{\mu\nu}{}^{(1)}$ の余因子 $\Delta_{\mu\nu}{}^{(n-1)}$ を単に Δ_{ij} で表わし，A の (i, j) 余因子ともいう．すなわち

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} a_{\bar{i}\bar{j}}{}^{(n-1)}$$

である．

定理 4.6 (余因子展開) $A=(a_{ij})\in M_n(R)$ の (i,j) 余因子を Δ_{ij} $(1\leqq i,j\leqq n)$ とすれば

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\Delta_{ij}\qquad(\text{第 } j \text{ 列に関する展開})$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\Delta_{ij}\qquad(\text{第 } i \text{ 行に関する展開}).$$

証明 列に関する展開だけ証明すれば，行に関する展開の証明も，定理 4.2 によりそれに帰着される.

$A=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$，$\boldsymbol{a}_j={}^t(a_{1j},\cdots,a_{nj})\in R^n$ とおけば，第 j 列を順次前の列と並べ換えて第1列に出すことにより，

$$\det A=(-1)^{j-1}\det(\boldsymbol{a}_j,\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{j-1},\boldsymbol{a}_{j+1},\cdots,\boldsymbol{a}_n).$$

行列 $(\boldsymbol{a}_j,\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{j-1},\boldsymbol{a}_{j+1},\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ の $(i,1)$ 余因子は $(-1)^{i+1}a_{\bar{i}\bar{j}}{}^{(n-1)}$ と一致しているから，一般の行列 $A\in M_n(R)$ について，$\det A$ の第1列に関する展開さえ証明できればよい.

$A=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\in M_n(R)$ に対して，R^n 上の $(n-1)$ 変数関数 $F(\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)=\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$ を考えれば，行列式の性質によりこれは交代 $(n-1)$ 重線型関数である．したがって定理 4.4 の (3) により

$$\det A=F(\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=\sum_{i=1}^{n}c_{\bar{i}}a_{\bar{i}\bar{1}}{}^{(n-1)}.$$

ただし，R^n の標準底を $(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$ とするとき

$$c_{\bar{i}}=c_{1\cdots i-1\,i+1\cdots n}=F(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{i-1},\boldsymbol{e}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n)$$
$$=\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{i-1},\boldsymbol{e}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n).$$

ここで $\boldsymbol{a}_1=a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{21}\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{e}_n$ であるから，定理 4.3 により，けっきょく

$$c_{\bar{i}}=a_{i1}\det(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{i-1},\boldsymbol{e}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n)$$
$$=(-1)^{i-1}a_{i1}\det I_n=(-1)^{i+1}a_{i1}.$$

ゆえに

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}a_{\bar{i}\bar{1}}{}^{(n-1)}=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}\Delta_{i1}.\qquad\blacksquare$$

この定理はさらに次の形に一般化できる：

系 $A=(a_{ij})\in M_n(R)$ の (i,j) 余因子を Δ_{ij} とすれば

(1)　$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varDelta_{il} = \delta_{jl} \det A$,

(2)　$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varDelta_{kj} = \delta_{ik} \det A$.

(ただし δ は Kronecker の記号.)

証明　(1) だけ証明すれば, (2) も同様にできる. $l=j$ ならば (1) は定理 4.6 の第 j 列に関する展開に他ならない. そこで $l \neq j$ とし, $A=(a_{ij})=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ としよう. (1) の左辺は $\det A$ の第 l 列を $\boldsymbol{a}_j$ で置き換えた行列式の第 l 列に関する展開を表わしている:

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \underset{\smile}{\overset{l}{\boldsymbol{a}_j}}, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varDelta_{il}.$$

この左辺は 2 列の等しい行列式であるから値は 0. ▌

定理 4.6 により, どのように次数の大きい行列式でも, それより次数の小さい行列式, 最終的には 2 次の行列式の計算に帰着させることが, 原理的に可能である. 第 1 章で述べた 3 次の行列式の定義の式

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = x_{11}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} - x_{21}\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} + x_{31}\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{22} & x_{23} \end{vmatrix}$$

は, 左辺の第 1 列に関する展開に他ならない.

例 4.17　K を体とし,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & & -\alpha_n \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 0 & -\alpha_2 \\ & & & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \in M_n(K)$$

とする. このとき多項式環 $K[X]$ 上の行列 $XI_n - A$ の行列式

$$\det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} X & & & & \alpha_n \\ -1 & X & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & X & \alpha_2 \\ & & & -1 & X+\alpha_1 \end{vmatrix}$$

を展開し, X の多項式で表わそう. 右辺を第 1 行に関して展開すれば $\det(XI_n - A) = X\varDelta_{11} + \alpha_n\varDelta_{1n}$ が得られる. ここで

$$\Delta_{11}=\begin{vmatrix} X & & & & \alpha_{n-1} \\ -1 & X & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & X & \alpha_2 \\ & & & -1 & X+\alpha_1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{1n}=(-1)^{n+1}\left.\begin{vmatrix} -1 & X & & \\ & -1 & \ddots & \\ & & \ddots & X \\ & & & -1 \end{vmatrix}\right\}{\scriptstyle n-1}$$

であるが，(4.18)により $\Delta_{1n}=(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{n-1}=1$. したがって $\det(XI_n-A)=X\cdot\Delta_{11}+\alpha_n$. Δ_{11} は $\det(XI_n-A)$ と同じ型の $(n-1)$ 次の行列式であるから，同様のことをくりかえして，けっきょく

$$\det(XI_n-A)=X^n+\alpha_1X^{n-1}+\cdots+\alpha_n. \qquad \text{——}$$

行列 $A=(a_{ij})\in M_n(R)$ の (i,j) 余因子 Δ_{ij} を (j,i) 成分とする行列 $\boldsymbol{A}={}^t(\Delta_{ij})$ を A の**余因子行列**という．定理4.6の系の(1), (2)の左辺はそれぞれ $A\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}A$ の (l,j) 成分，(i,k) 成分を表わしている．したがって

(4.29) $$A\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}A=\det A\cdot I_n.$$

定理 4.7 $A\in M_n(R)$ が正則であるための必要十分条件は $\det A\in R$ が R の正則元となることである．このとき A の余因子行列を $\boldsymbol{A}$ とすれば A の逆行列は

(4.30) $$A^{-1}=(\det A)^{-1}\boldsymbol{A}$$

で与えられる．とくに $R=K$ (体)ならば，A が正則であるためには，$\det A\neq 0$ が必要十分である．

証明 $\exists B\in M_n(R): AB=I_n$ ならば

$$\det(AB)=\det A\det B=1$$

であるから，$\det A$ は R の正則元(R は単位元をもつ可換環)．

逆に $\det A$ が R の正則元のとき $B=(\det A)^{-1}\boldsymbol{A}\in M_n(R)$ とおけば，(4.29)により $AB=BA=I_n$. したがって $A\in M_n(R)$ は正則行列であり，B は A の逆行列である．▌

(4.29)の両辺の行列式をとれば，$\det A\det\boldsymbol{A}=(\det A)^n$. したがって A が正則行列ならば(実は例4.22で述べるように，一般に)

(4.31) $$\det\boldsymbol{A}=(\det A)^{n-1}.$$

例 4.18 体 K 上の2次正方行列 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in M_2(K)$ が正則であるための必要十分条件は $\det A=ad-bc\neq 0$. また，A の余因子は $\Delta_{11}=d$, $\Delta_{12}=-c$, $\Delta_{21}=-b$, $\Delta_{22}=a$ であり，したがって A の余因子行列は

$$\boldsymbol{A} = {}^t\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

ゆえに A が正則ならば A の逆行列は (4.15) で与えられることが, (4.30) によりわかる. ——

例 4.19 $A \in M_n(\boldsymbol{Z})$ が正則であるためには $\det A = \pm 1$ であることが必要十分である. また体 K 上の 1 変数多項式環 $K[X]$ の正則元全体は $K^\times = K - \{0\}$ であるから, $A \in M_n(K[X])$ が正則であるためには $\det A \in K^\times$ が必要十分である. ——

体 K 上の, n 個の未知数に関する n 個の 1 次方程式からなる連立 1 次方程式

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (a_{ij}, b_i \in K)$$

は, 係数行列を $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, また $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{b} = {}^t(b_1, \cdots, b_n)$ とすれば

$$(*)' \qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と表わされるのであった. ここでとくに A は正則であるものとしよう. このとき $(*)'$ の解は $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ により一意的に定まるわけであるが, さらに A の余因子行列を $\boldsymbol{A} = {}^t(\Delta_{ij})$ とすれば, (4.30) により

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} &= (\det A)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \\ &= (\det A)^{-1}\, {}^t\!\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta_{i1} b_i, \cdots, \sum_{i=1}^{n} \Delta_{in} b_i\right). \end{aligned}$$

一方 $A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ の第 j 列 $\boldsymbol{a}_j$ を $\boldsymbol{b}$ で置き換えて得られる行列を $A_j = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \overset{j}{\check{\boldsymbol{b}}}, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ とすれば, $\sum_{i=1}^{n} \Delta_{ij} b_i$ は $\det A_j$ の第 j 列に関する余因子展開に他ならない. したがって次の定理が得られる:

定理 4.8 (Cramer の法則) 連立 1 次方程式 $(*)$ の係数行列 $A = (a_{ij}) = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \in M_n(K)$ が正則であるとき, その第 j 列 $\boldsymbol{a}_j$ を $\boldsymbol{b} = {}^t(b_1, \cdots, b_n)$ で置き換えた行列を

$$A_j = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \overset{j}{\check{\boldsymbol{b}}}, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \qquad (1 \leqq j \leqq n)$$

で表わせば, $(*)$ の解は

$$(4.32) \qquad x_j = \frac{\det A_j}{\det A} \qquad (1 \leqq j \leqq n)$$

で与えられる．

例 4.20　体 K 上の連立1次方程式

$$a_1x+b_1y=c_1, \qquad a_2x+b_2y=c_2$$

の係数行列が正則ならば(すなわち $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ ならば)，

$$x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},$$

$$y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \qquad \text{——}$$

例 4.21　定数係数の同次線型系

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt}=-cy+bz, \qquad \frac{dy}{dt}=cx-az, \qquad \frac{dz}{dt}=-bx+ay$$

(ただし $a,b,c\in \boldsymbol{R}$) について，初期条件 ${}^t(x(0),y(0),z(0))={}^t(\alpha,\beta,\gamma)=\boldsymbol{c}$ が与えられたものとして，その解法を考える．

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

とおけば，$(*)$ は $d\boldsymbol{y}/dt=A\boldsymbol{y}$ で表わされる．第2章§2.1((2.17)参照)で述べたとおり，これは演算子の体 $\mathscr{M}$ 上の連立1次方程式 $(sI_3-A)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}$，すなわち

$$(\#) \qquad \begin{bmatrix} s & c & -b \\ -c & s & a \\ b & -a & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

で表わされる．(♯) の係数行列を $S=(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_3)$ とし，

$$S_1=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_3), \qquad S_2=(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{c},\boldsymbol{s}_3), \qquad S_3=(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{c})$$

とすれば，Cramer の法則により

$$x=\frac{\det S_1}{\det S}, \qquad y=\frac{\det S_2}{\det S}, \qquad z=\frac{\det S_3}{\det S}$$

となる．ここで $\det S$ を展開し，s について整理すれば

$$\begin{cases} \det S=s(s^2+\omega^2)=s(s-\sqrt{-1}\,\omega)(s+\sqrt{-1}\,\omega), \\ \omega^2=a^2+b^2+c^2. \end{cases}$$

また $\det S_i$ $(i=1,2,3)$ も同様に整理すれば，s について高々2次の多項式となる．$\det S_i/\det S$ を s に関して部分分数に分解し，$1/s=\{1\}$，$1/(s\mp\sqrt{-1}\,\omega)=\{e^{\pm\sqrt{-1}\,\omega t}\}$，

および

$$e^{\sqrt{-1}\,\omega t}=\cos\omega t+\sqrt{-1}\sin\omega t, \qquad e^{-\sqrt{-1}\,\omega t}=(\overline{e^{\sqrt{-1}\,\omega t}})$$

を用いて書き変えれば，x, y, z が具体的な関数として求められるわけである．

空間 E^3 に直交座標系 Σ を一つ定め，$(*)$ を E^3 の点の運動を表わす方程式と考えよう．$\boldsymbol{p}={}^t(a, b, c)$ とおけば，$(*)$ は

$$(*)' \qquad \frac{d\boldsymbol{y}}{dt}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{y} \qquad \text{(ベクトル積)}$$

で表わされる．明らかに定数関数 $\boldsymbol{y}=\lambda\boldsymbol{p}$ $(\lambda\in\boldsymbol{R})$ は $(*)'$ の解である．$\boldsymbol{y}\neq\lambda\boldsymbol{p}$ とすれば，速度ベクトル $d\boldsymbol{y}/dt$ は $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y}$ と直交していることが $(*)'$ によりわかる．とくにある初期条件のもとで $(*)'$ によって定められた点の運動は，$\boldsymbol{p}$ に垂直なある平面内の運動である．

そこでたとえば $\boldsymbol{c}={}^t(\alpha, \beta, \gamma)={}^t(b, -a, 0)$ としよう．$\boldsymbol{c}$ は(原点を通り $\boldsymbol{p}$ に垂直な)平面 $ax+by+cz=0$ 上の点 $(b, -a, 0)$ の位置ベクトルである．このとき

$$\det S_1=bs^2+cas, \qquad \det S_2=-as^2+bcs, \qquad \det S_3=-(a^2+b^2)s$$

であり，上述の計算を実行すれば

$$\begin{aligned}
x&=\frac{1}{2}\left(b-\sqrt{-1}\,\frac{ac}{\omega}\right)e^{\sqrt{-1}\,\omega t}+\frac{1}{2}\left(b+\sqrt{-1}\,\frac{ac}{\omega}\right)e^{-\sqrt{-1}\,\omega t}\\
&=b\cos\omega t+\frac{ca}{\omega}\sin\omega t,\\
y&=-\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{-1}\,\frac{bc}{\omega}\right)e^{\sqrt{-1}\,\omega t}-\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{-1}\,\frac{bc}{\omega}\right)e^{-\sqrt{-1}\,\omega t}\\
&=-a\cos\omega t+\frac{bc}{\omega}\sin\omega t,\\
z&=\sqrt{-1}\,\frac{a^2+b^2}{2\omega}e^{\sqrt{-1}\,\omega t}-\sqrt{-1}\,\frac{a^2+b^2}{2\omega}e^{-\sqrt{-1}\,\omega t}\\
&=-\frac{a^2+b^2}{\omega}\sin\omega t.
\end{aligned}$$

したがって $x^2+y^2+z^2=a^2+b^2$ であり，初期条件 ${}^t(x(0), y(0), z(0))={}^t(b, -a, 0)$ のもとでは，$(*)$ は，原点を通る $\boldsymbol{p}$ に垂直な平面上で，原点を中心とする

$$\text{半径 } \sqrt{a^2+b^2}, \qquad \text{角速度 } \omega=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

の円運動を表わしていることがわかる．——

b）Laplace 展開

$A=(a_{ij})\in M_n(R)$ の r 次小行列式 $a_{\mu\nu}{}^{(r)}$，その余因子 $\varDelta_{\mu\nu}{}^{(n-r)}$ 等の定義は前項のはじめに述べたとおりである．$1,2,\cdots,n$ から r 個とる組合せ全体の集合

$$J=\{\mu=\{i_1,\cdots,i_r\}\mid 1\leqq i_1<\cdots<i_r\leqq n\}$$

は $\binom{n}{r}$ 個の元からなるわけであるが，この集合にたとえば辞書式の順序を入れる．すなわち，$\mu=\{i_1,\cdots,i_r\}$，$\mu'=\{i_1',\cdots,i_r'\}\in J$ のとき

$$\mu<\mu' \iff \exists s:\ i_1=i_1',\ \cdots,\ i_s=i_s',\ i_{s+1}<i_{s+1}'.$$

この順序により J の元は番号 $1,2,\cdots,\binom{n}{r}$ をもつ．この番号によって定義される R 上の $\binom{n}{r}$ 次正方行列 $A^{(r)}=(a_{\mu\nu}{}^{(r)})$ を A の r 次の**誘導行列**という．また (μ,ν) 成分が $\varDelta_{\nu\mu}{}^{(n-r)}$ で与えられる R 上の $\binom{n}{r}$ 次正方行列 $\boldsymbol{A}^{(r)}={}^t(\varDelta_{\mu\nu}{}^{(n-r)})$ を A の r 次の余因子行列という．このとき (4.29) の一般化として

(4.33)
$$A^{(r)}\boldsymbol{A}^{(r)}=\boldsymbol{A}^{(r)}A^{(r)}=\det A\cdot I_{\binom{n}{r}}$$

が成立する．とくに **Laplace 展開**

(4.34)
$$\det A=\sum_{\mu}a_{\mu\nu}{}^{(r)}\varDelta_{\mu\nu}{}^{(n-r)}=\sum_{\nu}a_{\mu\nu}{}^{(r)}\varDelta_{\mu\nu}{}^{(n-r)}$$

が得られる．余因子展開（定理4.6）は (4.34) の特別な場合である．

[(4.33) の証明]　まず (4.34) を証明する．$\mu=\{i_1,\cdots,i_r\}$，$\bar{\mu}=\{i_{r+1},\cdots,i_n\}$，$\nu=\{j_1,\cdots,j_r\}$，$\bar{\nu}=\{j_{r+1},\cdots,j_n\}$ とし，置換 $\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_n$ を

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&\cdots&r&r+1&\cdots&n\\ i_1&\cdots&i_r&i_{r+1}&\cdots&i_n\end{pmatrix},\qquad \tau=\begin{pmatrix}1&\cdots&r&r+1&\cdots&n\\ j_1&\cdots&j_r&j_{r+1}&\cdots&j_n\end{pmatrix}$$

で与えられるものとする．$A=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ の列ベクトルを τ によって並べ換えて得られる行列を A' とすれば

$$\det A'=\det(\boldsymbol{a}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{a}_{j_r},\boldsymbol{a}_{j_{r+1}},\cdots,\boldsymbol{a}_{j_n})=\varepsilon(\tau)\det A.$$

したがって $\det A=\varepsilon(\tau)\det A'$ である．ここで $j_1<\cdots<j_r$，$j_{r+1}<\cdots<j_n$ であることに注意すれば（例3.40参照），

$$\varepsilon(\tau)=(-1)^{(j_1-1)+(j_2-2)+\cdots+(j_r-r)}.$$

R^n 上の交代 $(n-r)$ 重線型関数

$$F(\boldsymbol{x}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{x}_n)=\det(\boldsymbol{a}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{a}_{j_r},\boldsymbol{x}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{x}_n)$$

に定理4.4の (3) を適用することにより

$$\det A'=F(\boldsymbol{a}_{j_{r+1}},\cdots,\boldsymbol{a}_{j_n})=\sum_{\rho}c_\rho a_{\rho\bar{\nu}}{}^{(n-r)}$$

が得られる．ここで R^n の標準底を $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ とすれば

$$c_\beta = c_{i_{r+1}\cdots i_n} = F(\boldsymbol{e}_{i_{r+1}}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i_n}) = \det(\boldsymbol{a}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{j_r}, \boldsymbol{e}_{\sigma(r+1)}, \cdots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)}).$$

$\boldsymbol{a}_{j_p} = a_{1j_p}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_{nj_p}\boldsymbol{e}_n$ であるから，定理 4.3 およびその系 2 により

$$\begin{aligned}&\det(\boldsymbol{a}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{j_r}, \boldsymbol{e}_{\sigma(r+1)}, \cdots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)})\\ &\quad = \det(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{e}_{\sigma(r)}, \boldsymbol{e}_{\sigma(r+1)}, \cdots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)}) \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_r} \varepsilon(\rho) a_{\rho(i_1)j_1} \cdots a_{\rho(i_r)j_r}\\ &\quad = \varepsilon(\sigma) a_{\mu\nu}{}^{(r)}.\end{aligned}$$

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{(i_1-1)+\cdots+(i_r-r)}$ であるから，けっきょく

$$\det A = \sum_\mu (-1)^{i_1+\cdots+i_r+j_1+\cdots+j_r} a_{\mu\nu}{}^{(r)} a_{\rho\sigma}{}^{(n-r)} = \sum_\mu a_{\mu\nu}{}^{(r)} \Delta_{\mu\nu}{}^{(n-r)}.$$

(4.34) の第 2 式の証明も同様である．

$\nu' = \{j_1', \cdots, j_r'\} \neq \nu$ とするとき，A の第 $j_1', \cdots, j_r'$ 列をそれぞれその第 $j_1, \cdots, j_r$ 列で置き換えた行列を $B = (b_{ij})$ として，B に (4.34) の第 1 式を適用すれば，B の少なくとも二つの列は等しいから

$$0 = \det B = \sum_\mu b_{\mu\nu'}{}^{(r)} \Delta_{\mu\nu'}{}^{(n-r)} = \sum_\mu a_{\mu\nu}{}^{(r)} \Delta_{\mu\nu'}{}^{(n-r)}.$$

ゆえに $\boldsymbol{A}^{(r)} A^{(r)} = \det A \cdot I_{\binom{n}{r}}$ が得られる．(4.33) のもう一つの等式の証明も同様である．▌

例 4.22 n^2 変数 x_{ij} の行列式 $\det(x_{ij})$ を，有理数体上の多項式環 $\tilde{R} = \boldsymbol{Q}[\cdots x_{ij} \cdots]$ 上の行列 $X = (x_{ij})$ の行列式と考えて，X の r 次の誘導行列を $X^{(r)}$，また X の r 次の余因子行列を $\boldsymbol{X}^{(r)}$ とすれば，(4.33) により $X^{(r)}\boldsymbol{X}^{(r)} = \det X \cdot I_{\binom{n}{r}}$．この両辺の行列式を考えれば

$$(*) \qquad \det X^{(r)} \det \boldsymbol{X}^{(r)} = (\det X)^{\binom{n}{r}}$$

である．例 4.11 で述べたように，$\det X$ は $\tilde{R}$ の元として既約多項式であるから，等式 $(*)$ は

$$\det X^{(r)} = c(\det X)^e \qquad \left(c \in \boldsymbol{Q},\ e \text{ は } \binom{n}{r} \text{ の約数}\right)$$

であることを意味する．ここで $X = \lambda I_n$ $(\lambda \in \boldsymbol{Q})$ とおけば（すなわち各変数 x_{ij} に $\lambda\delta_{ij}$ を代入すれば），$X^{(r)} = \lambda^r I_{\binom{n}{r}}$ であり，したがって $\det X^{(r)} = \lambda^{r\binom{n}{r}} = c\lambda^{ne}$．これは任意の $\lambda \in \boldsymbol{Q}$ について成立するから，けっきょく

$$c = 1, \qquad e = \frac{r}{n}\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1}$$

であり, n^2 変数の整係数多項式として

$$\det X^{(r)} = (\det X)^{\binom{n-1}{r-1}}, \qquad \det \boldsymbol{X}^{(r)} = (\det X)^{\binom{n-1}{r}}$$

が成立するのである $\left(\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}=\binom{n}{r}\right)$. ゆえにまた単位元をもつ任意の可換環 R 上の任意の行列 $A \in M_n(R)$ について

$$\det A^{(r)} = (\det A)^{\binom{n-1}{r-1}}, \qquad \det \boldsymbol{A}^{(r)} = (\det A)^{\binom{n-1}{r}}$$

が成立する. (4.31) は第2式の特別な場合 ($r=1$) である. ——

c) 連立1次方程式再論

$A=(a_{ij}) \in M(m,n\,;R)$ (R は単位元1をもつ可換環) の r 次の小行列式がすべて0ならば, $(r+1)$ 次の小行列式もすべて0となることは, 余因子展開を考えれば明らかである. したがってまた $s \geqq r$ のとき s 次の小行列式はすべて0である. そこで, ある r に対して, A のある r 次の小行列式は0ではなく, A の $(r+1)$ 次以上の小行列式はすべて0となるとき, この r を $\rho(A)$ で表わすことにしよう.

一般に $\{1, 2, \cdots, m\}$ から r 個とる組合せ, $\{1, 2, \cdots, n\}$ から r 個とる組合せにそれぞれ辞書式順序を考え, 行列 $A=(a_{ij})$ の r 次小行列式全体からこの順序に関して作った $\left(\binom{m}{r}, \binom{n}{r}\right)$ 型行列を $A^{(r)}=(a_{\mu\nu}{}^{(r)})$ で表わす. (これも r 次の誘導行列という.) $P \in M_m(R)$, $Q \in M_n(R)$ を正則とすれば

(4.35) $$\rho(PAQ) = \rho(A).$$

実際, $P \in M_m(R)$, $Q \in M_n(R)$ とするとき, $r=\rho(A)$ とおけば, $(PAQ)^{(r+1)}=P^{(r+1)}A^{(r+1)}Q^{(r+1)}=0$ (両辺の成分を比較すれば明らか) であるから, $\rho(PAQ) \leqq \rho(A)=r$ である. とくに P, Q がともに正則ならば $B=PAQ$ とおいて $\rho(A)=\rho(P^{-1}BQ^{-1}) \leqq \rho(B) \leqq r=\rho(A)$ であるから $\rho(PAQ)=\rho(A)$ となる.

したがって, とくに体 K 上の行列 $A \in M(m,n\,;K)$ に対して正則行列 $P \in M_m(K)$, $Q \in M_n(K)$ を

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix}, \qquad r = \mathrm{rk}\, A$$

のようにとれば $\rho(PAQ)=r$ であるから

(4.36) $$\mathrm{rk}\, A = \rho(A)$$

であることがわかる. そこで一般に環係数の行列 A に対しても, その**階数**を (4.36) によって定義する.

さて，体 K 上の連立1次方程式

$$(*)\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (1\leqq i\leqq m)$$

の係数行列 $A=(a_{ij})\in M(m,n\,;K)$ の階数は r であるものとしよう．このとき式の順序の並べ換え，および未知数 $x_1,\cdots,x_n$ の番号のつけ換えを行なって

$$\varDelta=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ & \cdots\cdots & \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr}\end{vmatrix}\neq 0,\qquad r=\mathrm{rk}\,A$$

と仮定してよい．このとき $(*)$ が解をもつための必要十分条件は，第 $r+1,\cdots,m$ 番目の式が第 $1,\cdots,r$ 番目の式の定数倍の和として表わされることである(定理4.1の系1参照)．したがって $(*)$ の解は，$\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-r}\in K$ を任意の定数として $x_{r+k}=\lambda_k$ $(1\leqq k\leqq n-k)$ とおき，

$$(*)'\qquad \sum_{j=1}^{r} a_{ij}x_j = b_i-\sum_{k=1}^{n-r} a_{i,r+k}\lambda_k \qquad (1\leqq i\leqq r)$$

に Cramer の法則(定理4.8)を適用することによって得られることがわかる．

とくに $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-r}=0$ とおき，

$$\varDelta_{0j}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \overset{j}{\breve{b}_1} & \cdots & a_{1r} \\ & & \cdots\cdots & & \\ a_{r1} & \cdots & b_r & \cdots & a_{rr}\end{vmatrix}\qquad (1\leqq j\leqq r)$$

とすれば

$$\boldsymbol{x}_1={}^t(x_1,\cdots,x_r,x_{r+1},\cdots,x_n)={}^t\!\left(\frac{\varDelta_{01}}{\varDelta},\cdots,\frac{\varDelta_{0r}}{\varDelta},0,\cdots,0\right)$$

が $(*)$ の一つの特殊解を与える．また

$$\varDelta_{ik}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,r+k} & \cdots & a_{1r} \\ & & \cdots\cdots & & \\ a_{r1} & \cdots & a_{r,r+k} & \cdots & a_{rr}\end{vmatrix}\qquad (1\leqq i\leqq r,\ 1\leqq k\leqq n-r)$$

とおけば，同次方程式 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=0$ $(1\leqq i\leqq r)$ の解空間の底 $(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{n-r})$ が

$$K^n\ni\boldsymbol{u}_k={}^t\!\left(-\frac{\varDelta_{1k}}{\varDelta},\cdots,-\frac{\varDelta_{rk}}{\varDelta},0,\cdots,\overset{r+k}{\breve{1}},\cdots,0\right)\qquad (1\leqq k\leqq n-r)$$

によって与えられることもわかる．($(*)'$ において $b_i=0$，$\lambda_k=1$，$\lambda_l=0$ $(l\neq k)$ と

おいて Cramer の法則を用いる.)

以上のように，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_{n-k}$ を定めれば，(＊)の解は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \sum_{k=1}^{n-r} \lambda_k \boldsymbol{u}_k \qquad (\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-k} \in K) \tag{4.37}$$

で表わされるわけである.

d）行列式因子

ここでは，体 K 上の1変数多項式環 $K[X]$ の元を成分にもつ行列 $A(X) = (a_{ij}(X)) \in M_n(K[X])$ を扱う．$A(X)$ の階数を $r = \rho(A(X))$ としよう．$A(X)$ のすべての k 次の小行列式の最大公約数を $\delta_k(X)$ とするとき，

$$\delta_0(X) = 1, \quad \delta_1(X), \quad \cdots, \quad \delta_r(X)$$

を $A(X)$ の**行列式因子**という.

補題 4.2　$A(X), B(X) \in M_n(K[X])$ に対して正則行列 $P(X), Q(X) \in M_n(K[X])$ を適当にとれば

$$B(X) = P(X)A(X)Q(X)$$

であるものとする．このとき $A(X), B(X)$ の行列式因子は一致する.

証明　$B(X) = P(X)A(X)Q(X)$ ならば，$B(X)$ の k 次の小行列式はすべて $A(X)$ の k 次の小行列式の $K[X]$ 係数の線型結合で表わされる．一方，$P(X)$, $Q(X)$ は正則であるから

$$A(X) = P(X)^{-1}B(X)Q(X)^{-1}$$

であり，したがって $A(X)$ の k 次の小行列式がすべて $B(X)$ の k 次の小行列式の線型結合で表わされることもわかる．ゆえに $A(X), B(X)$ の行列式因子は一致する. ▌

行列 $A(X) \in M_n(K[X])$ に対しても，§4.1, c) で述べたような，次の3通りの‘基本変形’を考えることができる:

(Ⅰ)　$A(X)$ の行あるいは列に $\alpha \in K^{\times}$ ($K[X]$ の正則元) をかける.

(Ⅱ)　$A(X)$ の行(または列)に多項式($\in K[X]$)をかけて他の行(または列)に加える.

(Ⅲ)　$A(X)$ の2行(または2列)を並べ換える.

これ等の変形が $M_n(K[X])$ のある種の正則行列(‘基本行列’)を左右からかけることで表わせることも前と同様である．そこで定理3.3′と類似の，次の定理を

証明しよう．

定理 4.9　$A(X)\in M_n(K[X])$ の階数は r であるものとする．このとき正則行列 $P(X), Q(X)\in M_n(K[X])$ を適当にとれば

$$
(4.38)\qquad \begin{cases} P(X)A(X)Q(X)=\begin{bmatrix} e_1(X) & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & e_r(X) & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}, \\ e_{i-1}(X)\,|\,e_i(X) \qquad (2\leqq i\leqq r). \end{cases}
$$

$e_1(X), \cdots, e_r(X)$ の各最高次の係数は 1 としてよい．さらに $A(X)$ の行列式因子を $\delta_0(X)=1$, $\delta_1(X), \cdots, \delta_r(X)$ とすれば

$$
(4.39)\qquad \delta_k(X)=e_1(X)e_2(X)\cdots e_k(X) \qquad (1\leqq k\leqq r),
$$

$$
(4.40)\qquad e_k(X)=\frac{\delta_k(X)}{\delta_{k-1}(X)} \qquad (1\leqq k\leqq r).
$$

証明　上で述べたことにより，$A(X)$ に有限回の基本変形を行なって (4.38) の右辺の形が得られることをいえばよい．(4.39), (4.40) は補題 4.2 から明らかである．

$A(X)=O_n$ のときは明らかである ($r=0$)．そこで $A(X)\neq O_n$ とし，$A(X)$ に有限回の基本変形を行なって得られる行列のうちで，(1,1) 成分が (0 ではない) 最低次であるものをとり，その (1,1) 成分を $e_1(X)$ とする．$e_1(X)$ の最高次の係数は 1 としてよい．

このときその行列の第 1 列の成分はすべて $e_1(X)$ の倍数である．実際，$e_1(X)$ の倍数ではない多項式 $a(X)$ が第 1 列の成分として存在するとき，$q(X), r(X)\in K[X]$ を $a(X)=q(X)e_1(X)+r(X)$, $\deg r<\deg e_1$, $r(X)\neq 0$ のようにとれるから，第 1 行に $-q(X)$ をかけて，$a(X)$ を第 1 成分とする行に加えれば $r(X)$ が残り，したがってまた基本変形により $r(X)$ が (1,1) 成分となるようにできるが，これは $e_1(X)$ のとり方 (最低次であること) に反する．同様に，第 1 行の成分もすべて $e_1(X)$ の倍数である．ゆえにこの行列にさらに基本変形を行なって $\begin{bmatrix} e_1(X) & {}^t\boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & A_1(X) \end{bmatrix}$ の形にできる．

$A_1(X)$ の成分はすべて $e_1(X)$ の倍数である．実際，ある成分 $a_1(X)$ が $e_1(X)$ の倍数でないとすれば，基本変形によってそれが第 1 列の成分となるようにでき

るから，前と同様にして矛盾であることがわかる．

以下 $A_1(X)$ について同様のことを行なえばよい．▌

(4.40) により，とくに $e_1(X), \cdots, e_r(X)$ は $A(X)$ に対して一意的に定まるものであることがわかる．$e_1(X), \cdots, e_r(X)$ は $A(X)$ の**単因子**とよばれるものである．

とくに

$$A=\begin{bmatrix} 0 & & & -a_n \\ 1 & 0 & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \\ & 1 & 0 & -a_2 \\ & & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \in M_n(K) \tag{4.41}$$

のとき，$A(X)=XI_n-A\in M_n(K[X])$ の単因子は，(4.40) を用いて計算すれば，$\delta_0(X)=\delta_1(X)=\cdots=\delta_{n-1}(X)=1$ であるから

$$1, \cdots, 1 \quad ((n-1)\text{個}), \qquad e(X)=\det(XI_n-A)$$

である．$e(X)=f_A(X)=X^n+a_1X^{n-1}+\cdots+a_n$ (例4.17参照) であることに注意しよう．また $P, Q\in M_n(K)$ ($\subset M_n(K[X])$) を正則行列とすれば，$P^{-1}A(X)P=XI_n-P^{-1}AP$ であるから，(4.41) に相似な任意の行列 $B\in M_n(K)$ に対する $B(X)=XI_n-B$ は，$A(X)$ と同じ単因子 $1, \cdots, 1, e(X)$ をもつ．

このことからさらに，任意の行列 $A\in M_n(K)$ に対してその自然標準形を

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} A_0 & & 0 \\ & A_1 & \\ 0 & & \ddots \ A_t \end{bmatrix} \qquad (\text{各 } A_i \text{ は (4.41) の形}),$$

各 A_i $(0\leqq i\leqq t)$ の最小多項式を $\varphi_i=\varphi_{A_i}$ とするとき，$A(X)=XI_n-A$ の単因子が

$$1, \cdots, 1 \quad ((n-t-1)\text{個}), \qquad \varphi_t(X), \cdots, \varphi_1(X), \varphi_0(X)$$

で与えられることもわかる．とくに $e_n(X)=\varphi_0(X)$ は A の最小多項式と一致する．

したがって K 上の n 次元線型空間 V 上の線型変換 T の特性因子 (定理3.7) $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_t$ を決定するためには，V の適当な底に関する T の行列を $A\in M_n(K)$ として，$A(X)=XI_n-A\in M_n(K[X])$ の行列式因子を求め，(4.40) によって $A(X)$ の単因子を決定すればよいのである．

例 4.23
$$A=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix},\qquad A(X)=XI_n-A$$
とするとき，$A(X)$ の行列式因子は
$$\delta_0(X)=1,\quad \delta_1(X)=1,\quad \delta_2(X)=X-2\left(=\begin{vmatrix}1&0\\0&X-2\end{vmatrix}\right),$$
$$\delta_3(X)=(X-2)^2\left(=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&X-2&0\\0&0&X-2\end{vmatrix}\right),\quad \delta_4(X)=(X-2)^4.$$
したがって (4.40) により単因子は
$$e_1(X)=1,\quad e_2(X)=X-2,\quad e_3(X)=X-2,\quad e_4(X)=(X-2)^2.$$
ゆえに線型変換 $F_A:\boldsymbol{R}^4\ni\boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^4$ の特性因子は
$$\varphi_0(X)=(X-2)^2,\quad \varphi_1(X)=X-2,\quad \varphi_2(X)=X-2$$
であり，とくに最小多項式は $\varphi_0(X)=(X-2)^2$ である．——

§4.5　行列式の応用

a）行列式の典型的な計算例

ここでは§4.3, §4.4 で述べたことの復習を兼ねて，行列式の計算に関するいくつかの基本的な例を扱う．

例 4.24（**Vandermonde の行列式**）　$\varDelta(X_1,\cdots,X_n)$ を定理 3.19 の証明に用いた差積とする．すなわち
$$\varDelta(X_1,\cdots,X_n)=\prod_{i<j}(X_i-X_j)=(-1)^{n(n-1)/2}\prod_{i<j}(X_j-X_i).$$
このとき次の等式が成立する．
$$(4.42)\qquad \begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\X_1&X_2&\cdots&X_n\\X_1{}^2&X_2{}^2&\cdots&X_n{}^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\X_1{}^{n-1}&X_2{}^{n-1}&\cdots&X_n{}^{n-1}\end{vmatrix}=(-1)^{n(n-1)/2}\varDelta(X_1,\cdots,X_n).$$

［証明］　(4.42) の左辺を $f(X_1,\cdots,X_n)\in\boldsymbol{Z}[X_1,\cdots,X_n]$ とおく．定理 4.3 により $X_1=X_2$ とおけば $f=0$ である．したがって f を $\boldsymbol{Z}[X_2,\cdots,X_n]$ 係数の 1 変数

X_1 の多項式とみなせば，普通の剰余定理と同様にして f は X_1-X_2 の倍数であることがわかる．同様に，$X_i-X_j\ (i<j)$ の倍数である．したがって，f は Δ の倍数であるが，両者の n 変数多項式としての次数はともに $n(n-1)/2$ であるから

$$f(X_1, \cdots, X_n) = c\Delta(X_1, \cdots, X_n)$$

となる．両者の $X_2X_3{}^2\cdots X_n{}^{n-1}$ の係数を比較して $c=(-1)^{n(n-1)/2}$ が得られる．▌

一般に $f\in \boldsymbol{Z}[X_1, \cdots, X_n]$ は，${}^\sigma f=\varepsilon(\sigma)f\ (\forall\sigma\in\mathfrak{S}_n)$ であるとき，n 変数の**交代式**であるという．上述の証明と同様にして，任意の n 変数の交代式は n 変数の差積の倍数であることがわかる．

(4.42) は，また n に関する帰納法により大略次のように証明することもできる．左辺の行列式を $D_n(X_1, \cdots, X_n)$ で表わそう．$n=2$ のときは容易に $D_2(X_1, X_2)=-(X_1-X_2)$ が得られる．そこで第1列から第 $(n-1)$ 列までの各列から第 n 列をひく．このとき $(1, j)$ 成分 $(1\leqq j\leqq n-1)$ はすべて0であり，また第 j 列 $(1\leqq j\leqq n-1)$ は X_j-X_n の倍数である．したがって第1行に関する余因子展開を行なえば，$(1, n)$ 余因子の第 j 列 $(1\leqq j\leqq n-1)$ からは X_j-X_n をくくり出すことができ，

$$\begin{aligned} D_n(X_1, \cdots, X_n) &= (-1)^{n-1}(X_1-X_n)\cdots(X_{n-1}-X_n)D_{n-1}(X_1, \cdots, X_{n-1}) \\ &= (-1)^{n(n-1)/2}\Delta(X_1, \cdots, X_n). \end{aligned}$$

なお (4.42) の左辺を Vandermonde の行列式というが，これはたとえば代数体（有理数体の有限次拡大）を扱うとき等に，次の巡回行列式とともにしばしば現われる形の行列式である．——

例 4.25（巡回行列式） ζ を1の原始 n 乗根とする．たとえば，$\zeta=e^{2\pi\sqrt{-1}/n}$ としてよい．このとき

$$(4.43)\qquad \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & \cdots & X_{n-1} \\ X_{n-1} & X_0 & X_1 & \cdots & X_{n-2} \\ & & \cdots\cdots & & \\ X_1 & X_2 & X_3 & \cdots & X_0 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\zeta^{(j-1)k}X_{j-1}\right).$$

［証明］ 簡単のために左辺の第 j 列を $\boldsymbol{x}_{j-1}\ (1\leqq j\leqq n)$ で表わす．$\zeta^n=1$ に注意して

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}_0+\zeta^k\boldsymbol{x}_1+\zeta^{2k}\boldsymbol{x}_2+\cdots+\zeta^{(n-1)k}\boldsymbol{x}_{n-1} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n}\zeta^{(j-1)k}X_{j-1}\right)\cdot{}^t(1, \zeta^k, \cdots, \zeta^{(n-1)k}) \end{aligned}$$

が得られる．したがって，かりに $f_k=\sum_{j=1}^{n}\zeta^{(j-1)k}X_{j-1}$ $(0\leqq k\leqq n-1)$ とおけば

$$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_{n-1})\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\1&\zeta&\cdots&\zeta^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\zeta^{n-1}&\cdots&\zeta^{(n-1)^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\1&\zeta&\cdots&\zeta^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\zeta^{n-1}&\cdots&\zeta^{(n-1)^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_0&&&0\\&f_1&&\\&&\ddots&\\0&&&f_{n-1}\end{bmatrix}$$

である．この両辺の行列式をとり，(4.42) を用いれば

$$\det(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_{n-1})\cdot\prod_{i<j}(\zeta^j-\zeta^i)=\prod_{i<j}(\zeta^j-\zeta^i)\cdot\prod_{k=0}^{n-1}f_k$$

であるから，両辺を $\prod_{i<j}(\zeta^j-\zeta^i)$ $(\neq 0)$ で割って (4.43) が得られる．——

例 4.26 (Jacobi の公式)　R を単位元をもつ可換環とし，$A=(a_{ij})\in M_n(R)$ の (i,j) 余因子を Δ_{ij} とする．また，$\mu=\{i_1,\cdots,i_r\}$ $(i_1<\cdots<i_r)$，$\nu=\{j_1,\cdots,j_r\}$ $(j_1<\cdots<j_r)$ に対する小行列式 $a_{\mu\nu}{}^{(r)}$ の余因子を $\Delta_{\mu\nu}{}^{(n-r)}$ とする．このとき

$$\begin{vmatrix}\Delta_{i_1j_1}&\cdots&\Delta_{i_1j_r}\\&\cdots\cdots&\\\Delta_{i_rj_1}&\cdots&\Delta_{i_rj_r}\end{vmatrix}=(\det A)^{r-1}\Delta_{\mu\nu}{}^{(n-r)}. \tag{4.44}$$

[証明]

$$B=\begin{bmatrix}\Delta_{i_1j_1}&\cdots&\Delta_{i_rj_1}&0&\cdots&0\\&\cdots\cdots&&&&\\\Delta_{i_1j_r}&\cdots&\Delta_{i_rj_r}&0&\cdots&0\\\Delta_{i_1j_{r+1}}&\cdots&\Delta_{i_rj_{r+1}}&&&\\&\cdots\cdots&&&I_{n-r}&\\\Delta_{i_1j_n}&\cdots&\Delta_{i_rj_n}&&&\end{bmatrix}$$

とおけば $\det B=\det({}^tB)=$ ((4.44) の右辺) である．一方

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&\cdots&r&r+1&\cdots&n\\i_1&\cdots&i_r&i_{r+1}&\cdots&i_n\end{pmatrix},\qquad\tau=\begin{pmatrix}1&\cdots&r&r+1&\cdots&n\\j_1&\cdots&j_r&j_{r+1}&\cdots&j_n\end{pmatrix}$$

として，(i,j) 成分が $a_{\sigma(i)\tau(j)}$ である行列を $A_1=(a_{\sigma(i)\tau(j)})$，また $\varepsilon=\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ とすれば

$$(*)\qquad \det A_1=\varepsilon\det A,\qquad \varepsilon=(-1)^{i_1+\cdots+i_r+j_1+\cdots+j_r}.$$

ここで定理4.6の系の (2) を用いれば

$$A_1B=\begin{bmatrix}\det A\cdot I_r&*\\O_{n-r,r}&D^{(n-r)}\end{bmatrix},\qquad D^{(n-r)}=\begin{bmatrix}a_{i_{r+1}j_{r+1}}&\cdots&a_{i_{r+1}j_n}\\&\cdots\cdots&\\a_{i_nj_{r+1}}&\cdots&a_{i_nj_n}\end{bmatrix}$$

であるから $\det A_1\cdot\det B=(\det A)^r\cdot a_{\mu\nu}{}^{(n-r)}$ となる．したがって (∗) を用いて

$\det A(\det B-(\det A)^{r-1}\Delta_{\mu\nu}{}^{(n-r)})=0$. これはもともと a_{ij} を変数 x_{ij} と考えれば, $\boldsymbol{Z}$ 上の多項式環 $\boldsymbol{Z}[\cdots x_{ij}\cdots]$(整域)における恒等式として成立しているのであるから, $\det B=(\det A)^{r-1}\Delta_{\mu\nu}{}^{(n-r)}$ でなければならないことがわかる. ▌

(4.44)において, とくに $\mu=\{i_1, i_2\}$, $\nu=\{j_1, j_2\}$ とすれば

(4.45) $$\Delta_{i_1j_1}\Delta_{i_2j_2}-\Delta_{i_1j_2}\Delta_{i_2j_1}=\det A\cdot\Delta_{\mu\nu}{}^{(n-2)}.$$

また, たとえば $\mu=\nu=\{r+1, \cdots, n\}$ とすれば

$$\begin{vmatrix}\Delta_{r+1,r+1} & \cdots & \Delta_{r+1,n}\\ & \cdots\cdots & \\ \Delta_{n,r+1} & \cdots & \Delta_{nn}\end{vmatrix}=(\det A)^{n-r-1}\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1r}\\ & \cdots\cdots & \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr}\end{vmatrix}.$$ ——

例 4.27 (対称行列の階数) K を体とする. $A=(a_{ij})\in M_n(K)$ に対して

$$a_{\nu\nu}{}^{(r)} \qquad (\nu=\{j_1, \cdots, j_r\},\ j_1<\cdots<j_r)$$

の形の小行列式を A の r 次の**主小行列式**という. とくに対称行列の階数について次のことを証明しよう.

"$A\in M_n(K)$ を階数 r の対称行列とすれば, A の r 次の主小行列式の中で0でないものが存在する. とくに $K=\boldsymbol{R}$(実数体)の場合, 0でない r 次の主小行列式はすべて正であるか, すべて負であるかのどちらかである."

[証明] A の階数は r であるから適当に $\mu=\{i_1, \cdots, i_r\}$ $(i_1<\cdots<i_r)$, $\nu=\{j_1, \cdots, j_r\}$ $(j_1<\cdots<j_r)$ をえらべば $a_{\mu\nu}{}^{(r)}\neq0$ となる. このとき $A=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ の列ベクトルのうち $\boldsymbol{a}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{j_r}$ は線型独立であり, 他の列ベクトルはこれ等の線型結合である. とくに $\boldsymbol{a}_{i_\alpha}=\sum_{\beta=1}^{r}c_{\alpha\beta}\boldsymbol{a}_{j_\beta}$ $(c_{\alpha\beta}\in K,\ 1\leqq\alpha\leqq r)$ とすれば, ${}^tA=A$ により

$$a_{hi_\alpha}=\sum_{\beta=1}^{r}c_{\alpha\beta}a_{hj_\beta}, \qquad \text{すなわち} \quad a_{i_\alpha h}=\sum_{\beta=1}^{r}c_{\alpha\beta}a_{j_\beta h}$$

が各 $h=1, \cdots, n$ について成立する. したがって $\lambda=\{h_1, \cdots, h_r\}$ $(h_1<\cdots<h_r)$, $A_{\mu\lambda}=(a_{i_\alpha h_\gamma})$, $A_{\nu\lambda}=(a_{j_\beta h_\gamma})$, $C=(c_{\alpha\beta})\in M_r(K)$ とすれば $A_{\mu\lambda}=CA_{\nu\lambda}$. 両辺の行列式をとれば

$$a_{\mu\lambda}{}^{(r)}=\det C\cdot a_{\nu\lambda}{}^{(r)}$$

となり, とくに $\lambda=\nu$ とすれば $a_{\mu\nu}{}^{(r)}\neq0$ であるから $a_{\nu\nu}{}^{(r)}\neq0$.

また $A_{\lambda\mu}=A_{\lambda\nu}{}^tC$ であることに注意しよう. はじめに $\mu=\{i_1, \cdots, i_r\}$ を任意にとったものとしても, $\boldsymbol{a}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{j_r}$ が線型独立であれば, 上の議論と同様に C を定めることができる. このとき

$$A_{\mu\mu} = A_{\mu\nu}{}^tC = CA_{\nu\nu}{}^tC$$

であるから $a_{\mu\mu}{}^{(r)} = (\det C)^2 a_{\nu\nu}{}^{(r)}$. したがって, $K=\boldsymbol{R}$ のとき, $a_{\mu\mu}{}^{(r)} \neq 0$ ならば $a_{\mu\mu}{}^{(r)}$ は $a_{\nu\nu}{}^{(r)}$ と同符号である. ▌

さらに次のことを証明できる.

"対称行列 $A=(a_{ij}) \in M_n(K)$ の, ある r 次の主小行列式が 0 ではなく, それを含むすべての $(r+1)$ 次および $(r+2)$ 次の主小行列式が 0 ならば, A の階数は r である."

[証明] $a_{\nu\nu}{}^{(r)} \neq 0$ $(\nu=\{j_1, \cdots, j_r\}, j_1 < \cdots < j_r)$ としよう. このとき $A=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ の列ベクトルのうち $\boldsymbol{a}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{j_r}$ は線型独立である. これに他のどの 1 列 $\boldsymbol{a}_k$ をつけ加えても $\boldsymbol{a}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{j_r}, \boldsymbol{a}_k$ が線型従属になることをいえばよい. そのためには k, l を $1, \cdots, n$ のうち ν には含まれない任意の文字とし, $\nu_1=\nu\cup\{k\}$, $\nu_2=\nu\cup\{l\}$ とするとき $a_{\nu_1\nu_2}{}^{(r+1)}=0$ であることを示せば十分である. $\mu=\nu\cup\{k, l\}$ とし, $(r+2)$ 次の行列式 $a_{\mu\mu}{}^{(r+2)}$ に対して (4.45) を用いれば ($n=r+2$ の場合), 容易に

$$a_{\nu_1\nu_1}{}^{(r+1)} a_{\nu_2\nu_2}{}^{(r+1)} - (a_{\nu_1\nu_2}{}^{(r+1)})^2 = a_{\mu\mu}{}^{(r+2)} a_{\nu\nu}{}^{(r)}$$

であることがわかる. 仮定により $a_{\nu\nu}{}^{(r)}$ を含む主小行列式 $a_{\nu_1\nu_1}{}^{(r+1)}, a_{\nu_2\nu_2}{}^{(r+1)}, a_{\mu\mu}{}^{(r+2)}$ は 0 であるから, たしかに

$$a_{\nu_1\nu_2}{}^{(r+1)} = 0. \qquad \text{——}$$

例 4.28 (乗法公式 (4.21) による行列式の特徴づけ) n^2 個の変数 x_{ij} $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$ の有理整係数多項式 $f(\cdots x_{ij} \cdots) \in \boldsymbol{Z}[\cdots x_{ij} \cdots]$ を $X=(x_{ij})$ の関数 (R を任意の単位元をもつ可換環として固定すれば, X は $M_n(R)$ 上の変数) として $f(X)$ と表わすとき

$$(*) \qquad f(XY) = f(X)f(Y)$$

をみたすものとしよう. このとき $\boldsymbol{Z} \ni \exists k \geq 0$ により

$$f(X) = (\det X)^k$$

と表わすことができる.

[証明] $X=(x_{ij}) \in M_n(\boldsymbol{Q}[\cdots x_{ij} \cdots])$ の余因子行列を $\boldsymbol{X}$ とすれば, (4.29) により $X\boldsymbol{X}=\det X \cdot I_n$. したがって $\boldsymbol{Q}[\cdots x_{ij} \cdots]$ の元として

$$f(X)f(\boldsymbol{X}) = f(\det X \cdot I_n).$$

そこで $\varphi: \boldsymbol{Q}[\cdots x_{ij} \cdots] \to \boldsymbol{Q}[\cdots x_{ij} \cdots]$ を $\varphi(\xi)=f(\xi I_n)$ によって定義すれば, φ は $R=\boldsymbol{Q}[\cdots x_{ij} \cdots]$ 上の R に値をとる 1 変数多項式関数であり, f に関する仮定に

より $\varphi(\xi\eta)=\varphi(\xi)\varphi(\eta)$ でなければならない．$\varphi(\xi)=\sum_{\nu=0}^{l}a_\nu\xi^\nu$, $a_l\neq 0$ とおけば

$$\varphi(\xi\eta)=\sum_{\nu=0}^{l}a_\nu(\xi\eta)^\nu$$

$$=\varphi(\xi)\varphi(\eta)=\varphi(\xi)\cdot\sum_{\nu=0}^{l}a_\nu\eta^\nu.$$

$\xi\in R$ を任意に固定しておき，η の多項式としての最高次の係数を比較すれば $a_l\xi^l=\varphi(\xi)a_l$，ゆえに $\varphi(\xi)=\xi^l$ となる．ゆえに $f(X)f(\boldsymbol{X})=(\det X)^l$ である．$\det X$ は x_{ij} $(1\leqq i, j\leqq n)$ の既約多項式であったから，$f(X)=\lambda(\det X)^k$ $(\lambda\in\boldsymbol{Q}^\times)$ であるが，ふたたび $(*)$ により $\lambda^2=\lambda$, $\lambda\neq 0$ である．ゆえに $\lambda=1$, すなわち $f(X)=(\det X)^k$ が得られる．——

例 4.29 (行列の Kronecker 積とその行列式)　R を単位元をもつ可換環とする．$A=(a_{ij})\in M(m,p\,;R)$, $B=(b_{kl})\in M(n,q\,;R)$ に対して1次式

$$F_i=\sum_{j=1}^{p}a_{ij}X_j\in R[X_1,\cdots,X_p]\qquad(1\leqq i\leqq m)$$

$$G_k=\sum_{l=1}^{q}b_{kl}Y_l\in R[Y_1,\cdots,Y_q]\qquad(1\leqq k\leqq n)$$

を考える．F_i, G_k を $R[X_1,\cdots,X_p,Y_1,\cdots,Y_q]$ の元とみなせば，積 F_iG_k を定義することができる：

$$F_iG_k=\sum_{j,l}a_{ij}b_{kl}X_jY_l\qquad(1\leqq i\leqq m,\ 1\leqq k\leqq n).$$

$\alpha=\{i,k\}$, $\beta=\{j,l\}$, $H_\alpha=F_iG_k$, $Z_\beta=X_jY_l$, $c_{\alpha\beta}=a_{ij}b_{kl}$ とおけば $H_\alpha=\sum_\beta c_{\alpha\beta}Z_\beta$. mn 個の $\{H_\alpha\}$, pq 個の $\{Z_\beta\}$ に適当な順序を入れることにより $\alpha=1,2,\cdots,mn$, $\beta=1,2,\cdots,pq$ とみなして (mn,pq) 型の行列 $C=(c_{\alpha\beta})\in M(mn,pq\,;R)$ が得られる．この C を A,B の **Kronecker 積**あるいはテンソル積といい，$C=A\otimes B$ で表わす．このとき $\{\alpha\}$ の順序，$\{\beta\}$ の順序をそれぞれ，たとえば

$$\{i,k\}<\{i',k'\}\Leftrightarrow i\leqq i' \text{ であり，} i=i' \text{ ならば } k<k',$$
$$\{j,l\}<\{j',l'\}\Leftrightarrow j\leqq j' \text{ であり，} j=j' \text{ ならば } l<l'$$

によって定めれば

$$(*)\qquad A\otimes B=\begin{bmatrix}a_{11}B & \cdots & a_{1p}B\\ & \cdots\cdots & \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mp}B\end{bmatrix}.$$

行列 $C=A\otimes B$ は $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$ の順序のとり方に依存するが，行および列の並べ換えを除けば一意的に定まる．

とくに $m=p$, $n=q$ の場合，$A\otimes B$ は mn 次の正方行列である．たとえば $A=I_m$, $B=I_n$ (単位行列) とすれば $F_i=X_i$, $G_k=Y_k$ であるから $H_\alpha=Z_\alpha$ となり，添字の順序をどのようにとっても $I_m\otimes I_n=I_{mn}$ である．添字の順序を上述のようにとって(＊)を用いれば，$A\otimes B$ は $M_{mn}(R)$ の中での積 $A\otimes B=(A\otimes I_n)(I_m\otimes B)$ であり，

$$(4.46)\qquad \det(A\otimes B)=\det(A\otimes I_n)\det(I_m\otimes B) = (\det A)^n(\det B)^m$$

であることが容易な計算によって確かめられる．実際，$\det(I_m\otimes B)=(\det B)^m$ は明らか．$\det(A\otimes I_n)$ については Laplace 展開を繰り返し用いて

$$\det(A\otimes I_n)=\det A\cdot\det(A\otimes I_{n-1})=\cdots=(\det A)^n$$

が得られる．

添字の順序をとりかえたとき符号がかわる可能性も考えて，かりに $\det(A\otimes B)=\varepsilon(\det A)^n(\det B)^m$ $(\varepsilon=\pm1)$ としよう．ε は明らかに A, B に無関係に定まるから，とくに $A=I_m$, $B=I_n$ とおけば $\varepsilon=1$ である．すなわち (4.46) は添字の順序に無関係に成立する．——

b）終結式と判別式

Ω を代数的閉体とする．多項式 $f, g\in\Omega[X]$ を

$$f(X)=a_0X^m+a_1X^{m-1}+\cdots+a_m \qquad (a_0\neq0)$$
$$g(X)=b_0X^n+b_1X^{n-1}+\cdots+b_n \qquad (b_0\neq0)$$

とするとき，$f(X)=0$, $g(X)=0$ が共通根をもつための必要十分条件を，a_i $(0\leqq i\leqq m)$, b_j $(0\leqq j\leqq n)$ を用いて表わすことを考える．

$\alpha\in\Omega$ が $f(X)=0$, $g(X)=0$ の共通根であったとしよう．このとき $(m+n)$ 個の未知数 $x_0, x_1, \cdots, x_{m+n-1}$ に関する $(m+n)$ 個の式からなる同次連立1次方程式

$$\begin{cases} a_0x_{0+\nu}+a_1x_{1+\nu}+\cdots+a_mx_{m+\nu}=0 & (0\leqq\nu\leqq n-1) \\ b_0x_{\mu+0}+b_1x_{\mu+1}+\cdots+b_nx_{\mu+n}=0 & (0\leqq\mu\leqq m-1) \end{cases}$$

は自明でない解

$$x_0=\alpha^{m+n-1},\quad x_1=\alpha^{m+n-2},\quad \cdots,\quad x_{m+n-1}=1$$

をもつ．実際，$\alpha^\nu f(\alpha)=0$, $\alpha^\mu g(\alpha)=0$ である．したがって係数行列の行列式を

$$
(4.47)\qquad R(f,g)=\begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & \cdots & a_m & & & \\
 & a_0 & a_1 & \cdots & a_m & & \\
 & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\
 & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_m \\
b_0 & \cdots & b_{n-1} & b_n & & & \\
 & \ddots & & \ddots & \ddots & & \\
 & & b_0 & \cdots & b_{n-1} & b_n & \\
 & & & b_0 & \cdots & b_{n-1} & b_n
\end{vmatrix}\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}n\\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}m\end{matrix}
$$

とすれば，$R(f,g)=0$ でなければならない．この右辺の形の行列式を一般に Sylvester の行列式といい，とくに $a_i\ (0\leqq i\leqq m)$，$b_j\ (0\leqq j\leqq n)$ がそれぞれ $f,g\in\Omega[X]$ の係数であるときにこの行列式の値 $R(f,g)$ を f,g の**終結式** (resultant)という．

逆に $R(f,g)=0$ ならば，$f(X)=0$, $g(X)=0$ は共通根をもつことを証明しよう．Ω は代数的閉体であるから Ω の中で

$$f(X)=a_0\prod_{i=1}^{m}(X-\alpha_i),\qquad g(X)=b_0\prod_{j=1}^{n}(X-\beta_j).$$

$\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in\Omega$ が $f(X)=0$ のすべての根，$\beta_1,\cdots,\beta_n\in\Omega$ が $g(X)=0$ のすべての根である．それぞれ右辺を展開して X のベキに整理し，係数を比較すれば，a_i は $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ の i 次同次多項式，b_j は $\beta_1,\cdots,\beta_n$ の j 次同次多項式である．ある i,j について $\alpha_i=\beta_j$ であったとすれば，初めに証明したことにより $R(f,g)=0$ でなければならないから，$R(f,g)$ を α_i に関する多項式とみなしたとき，それは $\alpha_i-\beta_j$ を因数として持っている．すなわち，α_i,β_j の多項式としての $R(f,g)$ は mn 次同次多項式 $\prod_{i,j}(\alpha_i-\beta_j)$ の倍数である．ところで，行列式の定義により (4.47) の右辺は，$i<0$ または $i>m+1$ のとき $a_i=0$，$j<0$ または $j>n+1$ のとき $b_j=0$ とすれば

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{m+n}}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)-1}a_{\sigma(2)-2}\cdots a_{\sigma(n)-n}b_{\sigma(1+n)-1}b_{\sigma(2+n)-2}\cdots b_{\sigma(m+n)-m}$$

と表わされる．この 0 ではない各項の，α_i,β_j に関する次数は

$$\sum_{k=1}^{n}(\sigma(k)-k)+\sum_{k=1}^{m}(\sigma(k+n)-k)=\sum_{k=1}^{m+n}k-\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{m}k=mn.$$

すなわち，$R(f,g)$ も α_i,β_j の mn 次同次多項式である．ゆえに $R(f,g)=0$ ならば $\prod_{i,j}(\alpha_i-\beta_j)=0$ であり，$f(X)=0$, $g(X)=0$ は共通根をもつことがわかった．

$R(f,g)=a_0{}^nb_0{}^mR((1/a_0)f,(1/b_0)g)$ であり，$(\beta_1\beta_2\cdots\beta_n)^m=(-1)^{mn}(b_n/b_0)^m$ で

あるから

$$R(f,g)=a_0{}^n b_0{}^m \prod_{i,j}(\alpha_i-\beta_j) \tag{4.48}$$
$$=a_0{}^n \prod_{i=1}^{m} g(\alpha_i)=(-1)^{mn} b_0{}^m \prod_{j=1}^{n} f(\beta_j).$$

以上により次の定理が証明された.

定理 4.10 $f(X)=a_0\prod_{i=1}^{m}(X-\alpha_i)$, $g(X)=b_0\prod_{j=1}^{n}(X-\beta_j)\in\Omega[X]$ とすれば, f, g の終結式 $R(f,g)$ は (4.48) で与えられる. また, $f(X)=0$, $g(X)=0$ が共通根をもつための必要十分条件は $R(f,g)=0$ となることである. ——

次に実係数の1変数多項式の導関数と同じ性質をもつものを $\Omega[X]$ の元についても定義しよう. まず写像 $D:\Omega[X]\ni f\mapsto Df\in\Omega[X]$ を

(1) $D(f+g)=Df+Dg$,

$D(\lambda f)=\lambda Df \quad (f,g\in\Omega[X],\ \lambda\in\Omega)$,

(2) $DX^k=kX^{k-1}\ (k\geqq 1),\quad D1=0$

によって定義しよう. (N を任意の自然数として $V_N=\{f\in\Omega[X]\mid \deg f\leqq N\}$ とおけば, V_N は $(1,X,\cdots,X^N)$ を底にもつ $\Omega[X]$ の Ω 上の線型部分空間であり, V_N 上で (1), (2) をみたすもの D_N は V_N 上の線型変換として一意的に定義される. $D_{N+1}|V_N=D_N$ であるから, $\{0\}\subset V_1\subset V_2\subset\cdots\subset V_N\subset V_{N+1}\subset\cdots$ によって $\Omega[X]$ 全体で D が一意的に定まる.) このとき

$$D(fg)=Df\cdot g+f\cdot Dg \qquad (\forall f,g\in\Omega[X]). \tag{4.49}$$

実際, f または g が定数 $(\in\Omega)$ のときは明らか. $\deg f=m\geqq 1$, $\deg g=n\geqq 1$ として $f(X)=\sum a_iX^i$, $g(X)=\sum b_jX^j$ $(a_mb_n\neq 0)$ とおき, 両辺を計算して比較すれば (4.49) が得られる.

$$D(X-\alpha)^k=k(X-\alpha)^{k-1} \qquad (\alpha\in\Omega,\ k\in\boldsymbol{Z},\ k\geqq 1). \tag{4.50}$$

[証明] $k=1$ のときは明らか. $k\geqq 2$ として, $k-1$ のときまでを仮定すれば, (4.49) により

$$D((X-\alpha)^k)=(X-\alpha)^{k-1}+(X-\alpha)\cdot D(X-\alpha)^{k-1}$$
$$=(X-\alpha)^{k-1}+(k-1)(X-\alpha)^{k-1}$$
$$=k(X-\alpha)^{k-1}.$$
▮

さて D による f の像を簡単に f' で表わし, これを f の導関数ということにする: $f'=Df$. このとき

"$f(X)=0$ が重根をもつ $\Leftrightarrow f(X)=0,\ f'(X)=0$ は共通根をもつ."

[証明]　$f(X)=0$ が重根 $\alpha\in\Omega$ をもてば $f(X)=(X-\alpha)^2h(X)$ $(h\in\Omega[X])$. したがって (4.49), (4.50) により

$$f'(X)=2(X-\alpha)h(X)+(X-\alpha)^2h'(X)$$

であり，$f'(X)=0$ は根 α をもつ．逆に α が $f(X)=0,\ f'(X)=0$ の共通根であるものとして $f(X)=(X-\alpha)g(X)$ $(g\in\Omega[X])$ とおけば，$\deg f'\geqq 1$ であるから $\deg f\geqq 2$，すなわち $\deg g\geqq 1$．そこで $g(X)=(X-\alpha)h(X)+r$ $(h\in\Omega[X],\ r\in\Omega)$ とおけば

$$f'(X)=g(X)+(X-\alpha)g'(X),\qquad \text{すなわち}\quad f'(\alpha)=g(\alpha)=r.$$

ゆえに $r=0$ であり，$f(X)=(X-\alpha)^2h(X)$. ▌

このことと定理4.10とにより

"$f(X)=0$ が重根をもつ $\Leftrightarrow R(f,f')=0$."

一般に任意の $f\in\Omega[X]$ に対して

$$d(f)=(-1)^{n(n-1)/2}\frac{1}{a_0}R(f,f') \tag{4.51}$$

とおき，これを f の**判別式** (discriminant) という．したがって

系　　$f(X)=0$ が重根をもつ $\Leftrightarrow d(f)=0$.　——

また，$f(X)=a_0\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$ とすれば，(4.49) をくりかえし用いて $f'(X)=a_0\sum_{k=1}^{n}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_{k-1})(X-\alpha_{k+1})\cdots(X-\alpha_n)$ であるから (4.48) により

$$R(f,f')={a_0}^{n-1}\prod_{i=1}^{n}f'(\alpha_i)={a_0}^{2n-1}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(\alpha_i-\alpha_j)$$
$$=(-1)^{n(n-1)/2}{a_0}^{2n-1}\Bigl(\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)\Bigr)^2.$$

したがって差積 $\Delta(X_1,\cdots,X_n)$ を用いて

$$d(f)={a_0}^{2n-2}\Delta(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)^2. \tag{4.52}$$

例4.30　$f(X)=aX^2+bX+c=a(X-\alpha)(X-\beta)$ とすれば，$\alpha+\beta=-(b/a)$，$\alpha\beta=c/a$ であるから

$$d(f)=a^2(\alpha-\beta)^2=a^2((\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta)$$
$$=b^2-4ac.\qquad ——$$

例4.31　$f(X)=X^3+pX+q$ のとき，$f'(X)=3X^2+p$ だから (4.47) により

$$R(f,f')=\begin{vmatrix}1&0&p&q&0\\0&1&0&p&q\\3&0&p&0&0\\0&3&0&p&0\\0&0&3&0&p\end{vmatrix}\underset{\left(\substack{\text{第 3 行}-3\times(\text{第 1 行})\\\text{第 4 行}-3\times(\text{第 2 行})}\right)}{=}\begin{vmatrix}-2p&-3q&0\\0&-2p&-3q\\3&0&p\end{vmatrix}$$

$$=4p^3+27q^3.$$

したがって $d(f)=-(4p^3+27q^2)$. ——

c) 空間の向きづけ，Euclid 空間上の体積

S を実数体 $\boldsymbol{R}$ 上の n 次元アフィン空間，$V=V(S)$ を S に付随するベクトル空間とする．$\mathfrak{A}=(a_1,\cdots,a_n)$ および $\mathfrak{A}'=(a_1',\cdots,a_n')$ を V の任意の二つの底とするとき，

$$a_j'=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}a_i \qquad (1\leqq j\leqq n,\ \alpha_{ij}\in\boldsymbol{R})$$

によって行列 $A=(\alpha_{ij})\in M_n(\boldsymbol{R})$ を定め，これを底の変換 $\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}'$ の行列というのであった．A は正則行列であるから $\det A\neq 0$ である．そこで $\det A>0$ のとき $\mathfrak{A}\sim\mathfrak{A}'$，$\det A<0$ のとき $\mathfrak{A}\not\sim\mathfrak{A}'$ として，V の底全体の集合に関係 $\sim$ を定義すれば，これは明らかに同値関係であり，底全体を二つの類に分ける．この類の一方を指定したとき，その類に含まれる V の底を**正系**，他の類に含まれるものを**負系**という．また，S の座標系 $\Sigma=\{O;\mathfrak{A}=(a_1,\cdots,a_n)\}$ についても，$\mathfrak{A}$ が正系のとき Σ を正系，同様に $\mathfrak{A}$ が負系のとき Σ は負系であるという．このように座標系について正系，負系の概念が定められたとき，S に**向き**が定義されたというのである (第 1 章 §1.1, g) 参照).

列ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ に向きづけを行なうときは，通常標準底 $(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$ が正系であるような向きを考え，これに従って $A_{\boldsymbol{R}}{}^n$ にも向きづけを行なう．向きづけられた n 次元アフィン空間 S に正系 $\Sigma=\{O;u_1,\cdots,u_n\}$ を一つ固定しておけば，$\Phi:V(S)\ni x=\sum_{i=1}^{n}\xi_iu_i\mapsto\boldsymbol{x}={}^t(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\boldsymbol{R}^n$ によって定められる同型写像は向きを保っている．とくに $a_1,\cdots,a_n$ が線型独立のとき，$\boldsymbol{a}_j=\Phi(a_j)$ とおけば

$$a_1,\cdots,a_n \text{ が正系をなす} \iff \det(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)>0.$$

$\boldsymbol{R}$ 上の n 次元アフィン空間 S の 1 点を P_0 とし，また n 個の線型独立なベクトル $a_1,\cdots,a_n\in V(S)$ を固定しておく．このとき S の部分集合

$$(4.53)\qquad \mathcal{P} = \mathcal{P}(P_0; a_1, \cdots, a_n) = \{P \in S \mid (\overrightarrow{P_0P}) = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n,\ 0 \leqq \lambda_i \leqq 1\}$$

を，P_0 を一つの頂点とする $a_1, \cdots, a_n$ で張られた**平行 $2n$ 面体**という．(4.53) において，とくに $\lambda_i=0$ として定義される $\mathcal{P}$ の部分集合を $\mathcal{S}_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$，$\lambda_i=1$ として定義される $\mathcal{P}$ の部分集合を $\bar{\mathcal{S}}_i$ で表わそう．明らかに $\mathcal{S}_i /\!/ \bar{\mathcal{S}}_i$ (すなわち $\mathcal{S}_i$ を含む超平面と $\bar{\mathcal{S}}_i$ を含む超平面とが平行) である．この $2n$ 個の $\mathcal{P}$ の部分集合 $\mathcal{S}_i$, $\bar{\mathcal{S}}_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ を $\mathcal{P}$ の**面**というわけである．2次元，3次元の Euclid 空間の場合 $\mathcal{P}$ はたしかに通常の意味でそれぞれ平行四辺形，平行六面体になっている．

$a_1, \cdots, a_n$ が線型従属である場合にも一応 $\mathcal{P}$ を (4.53) によって定義し，これを**退化**した平行 $2n$ 面体という．いわば‘つぶれた’平行面体である．退化した平行 $2n$ 面体が E^n のある超平面に含まれることは明らかである．退化していない平行面体は非退化であるという．

アフィン空間 S に向きが定義されているとき，(4.53) によって定義された非退化な平行 $2n$ 面体 $\mathcal{P}$ にも向きを考えることができる．すなわち，$a_1, \cdots, a_n$ が正系(負系)をなすとき，$\mathcal{P}$ は正(負)の向きをもつというのである．退化した平行面体については向きを考えないことにする．

ここで n 次元 Euclid 空間の概念を明確にするために，まず実数体 $\boldsymbol{R}$ 上の線型空間 V のベクトルの‘長さ’の概念を定義する．$\|\ \|: V \ni x \mapsto \|x\| \in \boldsymbol{R}$ が**ノルム**であるとは

(i) $\|x\| \geqq 0$;　等号 $\Leftrightarrow$ $x = o$,

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$　($\alpha \in \boldsymbol{R}$, $|\alpha|$ は α の絶対値),

(iii) (三角不等式)　$\|x \pm y\| \leqq \|x\| + \|y\|$

の三つの条件をみたすことである．V にノルムが一つ定められているとき，V を $\boldsymbol{R}$ 上の**計量線型空間**[1]といい，$\|x\|$ をベクトル $x \in V$ のノルムあるいは**長さ**という．以下では一般のノルムを考えるわけではなく，もう少し特殊なものを考えるのである．

$\boldsymbol{R}$ 上の線型空間 V 上の2変数関数 $\langle\ ,\ \rangle: V \times V \ni (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle \in \boldsymbol{R}$ が V に**内積**を定めるとは，

1) 計量線型空間の詳細については本選書の田坂隆士“2次形式”を参照されたい．

(1) $\langle x_1+x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle+\langle x_2, y\rangle$,

$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle \quad (\lambda \in \boldsymbol{R})$,

(2) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,

(3) $\langle x, x\rangle \geqq 0$; 等号 $\Leftrightarrow$ $x = o$

の三つの条件を $\langle\ ,\ \rangle$ がみたすことである．このような $\langle\ ,\ \rangle$ を V に一つ固定して考えるとき，$\langle x, y\rangle \in \boldsymbol{R}$ をベクトル $x, y \in V$ の内積という．とくに性質(3)により $\langle x, x\rangle \geqq 0$ であるから，$x \in V$ に対して $\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle}$ とおくことにより，V に一つのノルムを定めることができる．実際，ノルムの性質(i), (ii)は明らかである．(iii)を示そう．$x, y \in V$ とすれば

$$(*) \qquad \|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2+2\langle x, y\rangle+\|y\|^2$$

であるから

(4.54) **(Schwarz の不等式)** $\quad |\langle x, y\rangle| \leqq \|x\|\|y\|$

を示せば，$\|x+y\|^2 \leqq \|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2$ となって，(iii)が得られる．

[(4.54)の証明] $\lambda \in \boldsymbol{R}$ を任意の実数とするとき，$(*)$により

$$\|\lambda x+y\|^2 = \lambda^2\|x\|^2+2\lambda\langle x, y\rangle+\|y\|^2 \geqq 0.$$

$x \neq o$ とすればこれが $\forall\lambda \in \boldsymbol{R}$ について成立するのであるから，λ に関する2次式としての(1/4)×(判別式)は

$$(\langle x, y\rangle)^2-\|x\|^2\|y\|^2 \leqq 0.$$

$x=o$ のときは(4.54)は明らかである．▌

このノルムによって V を計量線型空間とみなしたとき，V を **Euclid ベクトル空間**という．列ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ について，たとえば

$$(\natural) \qquad \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n)$$

とおけば，これは $\boldsymbol{R}^n$ に一つの内積を定め，したがって $\boldsymbol{R}^n$ は Euclid ベクトル空間になる．($\natural$)によって定義された内積を，$\boldsymbol{R}^n$ の**標準内積**あるいは自然な内積という．以下では $\boldsymbol{R}^n$ の内積としては標準内積だけを考える．

V を n 次元 Euclid ベクトル空間としよう．したがって V には内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が一つ固定されている．このとき $u_1, \cdots, u_k \in V$ が**正規直交系**をなすとは，$\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$ $(i, j=1, \cdots, k)$ となることである．言い換えれば，各 u_i の長さは1であり，$i \neq j$ のとき $\langle u_i, u_j\rangle=0$ となることである．一般に $x, y \in V$ は $\langle x, y\rangle=0$ であるときたがいに**直交**するといい，$x \perp y$ で表わすこともある．$u_1, \cdots, u_k$ が正規直交

系をなすとき，$u_1, \cdots, u_k$ は線型独立である．実際，$u=\lambda_1 u_1+\cdots+\lambda_k u_k$ ($\lambda_i \in \boldsymbol{R}$)$=o$ とすれば $0=\langle u, u_i\rangle=\lambda_i$ ($1\leqq i\leqq k$)．したがって，とくに n 個のベクトル $u_1, \cdots, u_n$ ($n=\dim V$) が正規直交系をなすならば，これ等は V の底をなす．このとき底 $(u_1, \cdots, u_n)$ を V の**正規直交底**という．

補題 4.3 (Schmidt の直交化法)　V を n 次元 Euclid ベクトル空間とする．このとき $a_1, \cdots, a_k$ ($k\leqq n$) が線型独立ならば，

$$u_1=\frac{a_1}{\|a_1\|}, \qquad u_i=\frac{a_i-\sum_{\nu=1}^{i-1}\langle a_i, u_\nu\rangle u_\nu}{\left\|a_i-\sum_{\nu=1}^{i-1}\langle a_i, u_\nu\rangle u_\nu\right\|} \quad (i=2, \cdots, k)$$

とおくとき，$u_1, \cdots, u_k$ は正規直交系をなす．とくに V は必ず正規直交底をもつ．

証明　帰納法による．(u_1) は明らかに正規直交系．そこで $(u_1, \cdots, u_{i-1})$ は正規直交系であるものとし，簡単のために $a_i'=a_i-\sum_{\nu=1}^{i-1}\langle a_i, u_\nu\rangle u_\nu$ とおく．$a_1, \cdots, a_k$ は線型独立であるから $a_i'\neq o$．$u_i=a_i'/\|a_i'\|$ は長さ1のベクトルである．一方，$j\leqq i-1$ とすれば

$$\begin{aligned}\langle a_i', u_j\rangle &= \langle a_i, u_j\rangle-\sum_{\nu=1}^{i-1}\langle a_i, u_\nu\rangle\langle u_\nu, u_j\rangle \\ &= \langle a_i, u_j\rangle-\langle a_i, u_j\rangle = 0.\end{aligned}$$

したがって $\langle u_i, u_j\rangle=0$ である．ゆえに $(u_1, \cdots, u_i)$ はまた正規直交系である．V の任意の底 $(a_1, \cdots, a_n)$ からこの方法で正規直交底を作ることができる．▌

多変数の微分積分学を行なう場所としての n 次元 Euclid 空間 E^n とは，実数体 $\boldsymbol{R}$ 上のアフィン空間であり，$V=V(E^n)$ が Euclid ベクトル空間であるもののことに他ならない．したがって V には内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が一つ定められている．$P, Q\in E^n$ とするとき，$\overline{PQ}=\|(\overrightarrow{PQ})\|$ を線分 PQ の**長さ**，あるいは2点 P, Q 間の**距離**というのである．また，$x, y\in V$ に対しては (4.54) により

$$\cos\theta=\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}, \qquad 0\leqq\theta\leqq\pi$$

であるような実数 θ が一意的に定まるが，この θ をベクトル x, y 間の**角**という．3点 O, P, Q に対しては，ベクトル $(\overrightarrow{OP}), (\overrightarrow{OQ})$ 間の角 $\angle POQ$ を線分 OP, OQ 間の角というのである．n 次元 Euclid 空間 E^n 上のアフィン変換 F が任意の2点間の距離を保つとき，すなわち

$$\overline{F(P)F(Q)} = \overline{PQ} \qquad (\forall P, Q \in E^n)$$

であるとき，F を E^n 上の**合同変換**という．E^n 上の合同変換全体が一つの群をなし，この群を合同変換群ということ，合同変換群によって不変な図形を調べることを E^n における Euclid 幾何学というのであること等，すべて E^3 について第1章で述べたとおりである．また，E^n の座標系 $\Sigma=\{O; u_1, \cdots, u_n\}$ は，$(u_1, \cdots, u_n)$ が $V(E^n)$ の正規直交底であるとき，**直交座標系**であるという．以下ではわれわれはとくに図形の体積の概念を考察する．

ここでは，n 次元 Euclid 空間 E^n における多面体とは，有限個の平行 $2n$ 面体の共通部分あるいは合併集合をとる操作を有限回行なって得られる図形のことであるものとする．これは何やらうさんくさい定義であるが，2次元および3次元の場合を考えて直観的に把握すればよい．正確に定義することも可能であるが，以下の議論のためにはこれで十分である．実は平行面体の体積がさしあたりの関心事だからである．

E^n の多面体全体の集合を $\mathfrak{P}$ で表わすことにしよう．$\mu: \mathfrak{P} \to \boldsymbol{R}$ が次の四つの条件をみたすとき，μ を E^n 上の**体積**という：

(1) $\mu(\mathscr{M}) \geqq 0$,

(2) $\mathscr{M}$ が E^n のある超平面の部分集合ならば，$\mu(\mathscr{M}) = 0$,

(3) $\mu(\mathscr{M}_1 \cup \mathscr{M}_2) = \mu(\mathscr{M}_1) + \mu(\mathscr{M}_2) - \mu(\mathscr{M}_1 \cap \mathscr{M}_2)$,

(4) $\mathscr{M}_1$ を平行移動して $\mathscr{M}_2$ になるとすれば，$\mu(\mathscr{M}_1) = \mu(\mathscr{M}_2)$.

実際，これは E^2 における‘面積’，E^3 における‘体積’がみたす性質とよく合致している．$\mathscr{M} \in \mathfrak{P}$ に対して $\mu(\mathscr{M})$ を $\mathscr{M}$ の体積という．

とくに (4) により，平行 $2n$ 面体 $\mathscr{P}(P; a_1, \cdots, a_n)$ の体積は $P \in E^n$ には無関係に $a_1, \cdots, a_n \in V(E^n)$ だけで定まる．そこでこの値を $\mu(a_1, \cdots, a_n)$ で表わし，V 上の n 変数関数と考えることにする．すなわち

$$\mu(a_1, \cdots, a_n) = \mu(\mathscr{P}(P; a_1, \cdots, a_n)).$$

補題 4.4 平行 $2n$ 面体の体積 $\mu: \underbrace{V\times\cdots\times V}_{n} \to \boldsymbol{R}$ は次の二つの性質をもつ $(V=V(E^n))$：

(i) $\mu(a_1, \cdots, \alpha a_j, \cdots, a_n) = \alpha\mu(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_n) \quad (\alpha \geqq 0)$,

(ii) $\mu(a_1, \cdots, \overset{k}{\overbrace{a_k + a_l}}, \cdots, a_l, \cdots, a_n) = \mu(a_1, \cdots, a_k, \cdots, a_l, \cdots, a_n)$.

証明　(i)　$a_1, \cdots, a_n$ の順序は適当に並べかえてもよいから，$j=1$ について証明すれば十分である．$a_1, \cdots, a_n$ が線型従属のときは (2) により明らか．したがって $a_1, \cdots, a_n$ は線型独立としてよい．

$$\varphi(\alpha) = \mu(\alpha a_1, a_2, \cdots, a_n) \qquad (\alpha \geqq 0)$$

とおいて，$\varphi(\alpha)=\alpha\varphi(1)$ を示せばよい．$\mathcal{P}_1=\mathcal{P}(P\,;\alpha a_1, a_2, \cdots, a_n)$ とし，$Q \in E^n$ を $(\overrightarrow{PQ})=\alpha a_1$ となるような点とする．さらに $\mathcal{P}_2=\mathcal{P}(Q\,;\beta a_1, a_2, \cdots, a_n)$ とおけば，$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ は超平面 $L=(Q, W)$ (W は $a_2, \cdots, a_n$ で生成される部分空間) に含まれる．したがって $\mu(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2)=0$ であり，

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha+\beta) &= \mu((\alpha+\beta)a_1, a_2, \cdots, a_n) = \mu(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)\\ &= \mu(\mathcal{P}_1)+\mu(\mathcal{P}_2) = \varphi(\alpha)+\varphi(\beta).\end{aligned}$$

また明らかに $\varphi(0)=0$ である．そこで $\tilde{\varphi}: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を

$$\tilde{\varphi}(\alpha) = \varphi(\alpha), \qquad \tilde{\varphi}(-\alpha) = -\varphi(\alpha) \qquad (\alpha \geqq 0)$$

によって定義すれば，$\tilde{\varphi}(\alpha+\beta)=\tilde{\varphi}(\alpha)+\tilde{\varphi}(\beta)$ $(\forall\alpha, \beta \in \boldsymbol{R})$ である．$\tilde{\varphi}(1)=\varphi(1)=c$ とおく．

とくに $m \in \boldsymbol{Z}$ に対しては $\tilde{\varphi}(m)=m\tilde{\varphi}(1)=mc$．また，$q=m/n \in \boldsymbol{Q}$ のとき $mc=\tilde{\varphi}(nq)=n\tilde{\varphi}(q)$ であるから，$\tilde{\varphi}(q)=(m/n)c=qc$．したがって任意の $q \in \boldsymbol{Q}$ に対して $\tilde{\varphi}(q)=q\tilde{\varphi}(1)$ が成立する．$\tilde{\varphi}(\alpha+\beta)=\tilde{\varphi}(\alpha)+\tilde{\varphi}(\beta)$ から明らかに，$\alpha<\beta$ ならば $\tilde{\varphi}(\alpha)<\tilde{\varphi}(\beta)$．そこで任意の $\alpha \in \boldsymbol{R}$ に対して $q, q' \in \boldsymbol{Q}$ を $q<\alpha<q'$ のようにとれば $qc<\tilde{\varphi}(\alpha)<q'c$．$q, q'$ はいくらでも α に近くとれるから，けっきょく $\tilde{\varphi}(\alpha)=\alpha c$ であることがわかる．とくに $\varphi(\alpha)=\alpha\varphi(1)$ $(\forall\alpha \geqq 0)$．

(ii)　必要ならば $a_1, \cdots, a_n$ の順序を並べかえて，$k=1$, $l=2$ としてよい．すなわち

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}(O\,;a_1, \cdots, a_n), \qquad \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}(O\,;a_1+a_2, a_2, \cdots, a_n)$$

として $\mu(\mathcal{P}_1)=\mu(\mathcal{P}_2)$ をいえばよい．$a_1, \cdots, a_n$ が線型従属のときは明らかだから，以下 $a_1, \cdots, a_n$ は線型独立とする．$b=a_1+a_2$ とおいて

$$\mathcal{M}_1 = \left\{P \,|\, (\overrightarrow{OP})=\alpha_1 a_1+\alpha_2 b+\sum_{i=3}^{n}\alpha_i a_i,\ 0 \leqq \alpha_i \leqq 1,\ \alpha_1+\alpha_2 \leqq 1\right\},$$
$$\mathcal{M}_2 = \{P \,|\, (\overrightarrow{OP})=a_2+(\overrightarrow{OQ}),\ Q \in \mathcal{M}_1\}$$

とする．$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ の適当な平行移動，および共通部分をとる操作によって $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in \mathfrak{P}$ であることは容易に証明できる．$\mathcal{M}_2$ は $\mathcal{M}_1$ を a_2 に沿って平行移動したも

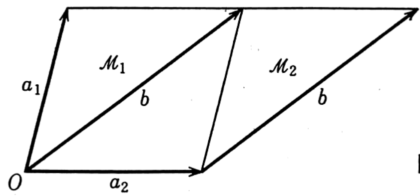


図 4.1

のであるから $\mu(\mathcal{M}_1)=\mu(\mathcal{M}_2)$. 明らかに $\mathcal{M}_1\subset\mathcal{P}_1$, $\mathcal{M}_2\subset\mathcal{P}_2$ である. また, $P\in\mathcal{P}_1, P\notin\mathcal{M}_1$ とすれば

$$(\overrightarrow{OP}) = \lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots = (\lambda_1-\lambda_2)a_1+\lambda_2 b+\cdots$$

において $0\leqq\lambda_1$, $\lambda_2\leqq 1$, $\lambda_1-\lambda_2<0$. したがって

$$(\overrightarrow{OP}) = \lambda_1 b+(\lambda_2-\lambda_1)a_2+\cdots, \qquad 0<\lambda_2-\lambda_1\leqq 1$$

により $P\in\mathcal{P}_2$. 同様にして, $P\in\mathcal{P}_2$, $P\notin\mathcal{M}_2$ ならば $P\in\mathcal{P}_1$ であることがわかる. ゆえに $\mathcal{P}_1\cup\mathcal{M}_2=\mathcal{P}_2\cup\mathcal{M}_1$.

一方, $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{M}_2$ はある超平面の部分集合である. 実際, $P\in\mathcal{P}_1\cap\mathcal{M}_2$ とすれば, $0\leqq\lambda_i\leqq 1$, $0\leqq\alpha_i\leqq 1$ を適当にとって

$$(\overrightarrow{OP}) = \lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots = a_2+\alpha_1 a_1+\alpha_2 b+\cdots$$

であるが, $b=a_1+a_2$ であるから $\lambda_1=\alpha_1+\alpha_2$, $\lambda_2=1+\alpha_2$ であり, したがって $\alpha_2=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_1=\alpha_1$ となる. ゆえに $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{M}_2$ は $\mathcal{P}_1$ の一つの面 $\mathcal{S}_2$ と一致する. 同様にして, $\mathcal{P}_2\cap\mathcal{M}_1$ が $\mathcal{P}_2$ の一つの面と一致することもわかる.

以上により, $\mu(\mathcal{P}_1\cup\mathcal{M}_2)=\mu(\mathcal{P}_2\cup\mathcal{M}_1)$, $\mu(\mathcal{P}_1\cap\mathcal{M}_2)=\mu(\mathcal{P}_2\cap\mathcal{M}_1)=0$ であるから, 体積の性質 (3) により, たしかに $\mu(\mathcal{P}_1)=\mu(\mathcal{P}_2)$ となる. ▌

ここで n 次元 Euclid 空間 E^n は向きづけられているものとし, 正系である直交座標系 $\Sigma=\{O;e_1,\cdots,e_n\}$ を一つ固定しておく. したがって $(e_1,\cdots,e_n)$ を $\boldsymbol{R}^n$ の標準底 $(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$ と同一視することにより, $V(E^n)=\boldsymbol{R}^n$ とみなしてよい. そこで

$$(4.55)\qquad \omega(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=\begin{cases}\mu(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n) & (\det(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\geqq 0)\\ -\mu(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n) & (\det(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)<0)\end{cases}$$

とおいて $\boldsymbol{R}^n$ 上の n 変数実数値関数 ω を定義しよう. このとき $\alpha<0$ ならば補題 4.4 の (i) により

$$\omega(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\alpha\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n) = -\omega(\boldsymbol{a}_1,\cdots,|\alpha|\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$$

$$= \mp|\alpha|\mu(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = \pm\alpha\mu(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$$
$$= \alpha\omega(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n).$$

したがって $\boldsymbol{R}^n$ 上の n 変数関数として ω は

(i) $\omega(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \lambda\boldsymbol{x}_j, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \lambda\omega(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_j, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \quad (\forall\lambda \in \boldsymbol{R})$,

(ii) $\omega(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \underbrace{\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{x}_l}_{k}, \cdots, \boldsymbol{x}_l, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \omega(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k, \cdots, \boldsymbol{x}_l, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$

をみたす．ゆえに例4.16で述べたように，ω は $\boldsymbol{R}^n$ 上の交代 n 重線型関数であり，

$$(4.56) \qquad \begin{cases} \omega(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = c\det(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \\ c = \omega(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = \mu(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \end{cases}$$

となる．$\mu(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)=1$ であるとき，μ を E^n 上の**標準体積**という．3次元の場合，単位立方体の体積を1としたもののことである．

以上によって次の定理が証明された．

定理 4.11 μ を n 次元 Euclid 空間上の標準体積とすれば，平行 $2n$ 面体 $\mathcal{P} = \mathcal{P}(P; \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ の体積は

$$(4.57) \qquad \mu(\mathcal{P}) = |\det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)|$$

で与えられる．——

これは第1章で2次および3次の行列式の幾何学的意味として述べたことの一般化に他ならない．

(4.55)によって定義した ω を，向きづけられた n 次元 Euclid 空間 E^n の一つの**体積要素**という．平行 $2n$ 面体の向きが正ならばその体積を正，向きが負ならばその体積を負と定義して，体積に符号を考えたものである．

例 4.32 V を n 次元 Euclid ベクトル空間，$a_1, \cdots, a_l$ を V の有限個のベクトルとする．このとき V の内積を $\langle\ ,\ \rangle$ として

$$(4.58) \qquad G(a_1, \cdots, a_l) = \begin{vmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \langle a_1, a_2\rangle & \cdots & \langle a_1, a_l\rangle \\ \langle a_2, a_1\rangle & \langle a_2, a_2\rangle & \cdots & \langle a_2, a_l\rangle \\ & \cdots\cdots & & \\ \langle a_l, a_1\rangle & \langle a_l, a_2\rangle & \cdots & \langle a_l, a_l\rangle \end{vmatrix}$$

とおき，これを $a_1, \cdots, a_l$ の **Gram の行列式**という．

いま V に正規直交底 $(u_1, \cdots, u_n)$ を一つ定めておき，

$$a_j = \alpha_{1j}u_1 + \cdots + \alpha_{nj}u_n \longleftrightarrow \boldsymbol{a}_j = {}^t(\alpha_{1j}, \cdots, \alpha_{nj}) \in \boldsymbol{R}^n$$

と同一視すれば，$\langle a_i, a_j\rangle={}^t\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j=\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j\rangle$ である．したがって $A=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_l)$ $\in M(n, l\,; \boldsymbol{R})$ とおけば，$\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j\rangle$ は ${}^tAA$ の (i, j) 成分であり

$$G(a_1, \cdots, a_l) = \det({}^tAA). \tag{4.59}$$

ゆえに例4.15により

$$G(a_1, \cdots, a_l) = 0 \qquad (l>n) \tag{4.60}$$

または

$$G(a_1, \cdots, a_l) = \sum_{k_1<\cdots<k_l} \begin{vmatrix} \alpha_{k_1 1} & \cdots & \alpha_{k_1 l} \\ & \cdots\cdots & \\ \alpha_{k_l 1} & \cdots & \alpha_{k_l l} \end{vmatrix}^2 \qquad (l\leqq n) \tag{4.61}$$

となる．とくに $l\leqq n$ のとき

$$\begin{aligned} a_1, \cdots, a_l \text{ が線型独立 } &\Leftrightarrow \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_l \text{ が線型独立} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{rk} A = \rho(A) = l \quad ((4.36)\text{ 参照}) \\ &\Leftrightarrow A \text{ のある } l \text{ 次の小行列式} \neq 0. \end{aligned}$$

したがって (4.60), (4.61) により，けっきょく

“$a_1, \cdots, a_l$ が線型独立であるための必要十分条件は $G(a_1, \cdots, a_l)\neq 0$.”

また $V=V(E^n)$ とし，μ を E^n の標準体積とすれば，平行 $2n$ 面体 $\mathcal{P}=\mathcal{P}(P\,; a_1, \cdots, a_n)$ の体積は，(4.59) および (4.57) により $G(a_1, \cdots, a_n)=(\det A)^2=\mu(\mathcal{P})^2$ であるから，

$$\mu(\mathcal{P}) = \sqrt{G(a_1, \cdots, a_n)} \tag{4.57$'$}$$

で与えられることがわかる．——

問　　題

1　次の連立1次方程式を解け．

(1) $\begin{cases} x_1+4x_2-3x_3+5x_4-x_5=-1 \\ -2x_1-3x_2+6x_3-6x_4+2x_5=2 \\ 3x_1+2x_2-4x_3+2x_4+2x_5=2 \\ -x_1+x_2+5x_3-3x_4+3x_5=3. \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} ax_2+bx_3+cx_4=1 \\ ax_1+cx_3+bx_4=1 \\ bx_1+cx_2+ax_4=0 \\ cx_1+bx_2+ax_3=0. \end{cases}$　(4) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \\ a^3x+b^3y+c^3z=d^3. \end{cases}$

(ただし a, b, c は相異なるものとする.)

2　次の行列の逆行列を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$．　(2) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$．　(3) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$．

(4) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$．　(5) $\left.\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \text{\huge 0} \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ \text{\huge 0} & & & -1 & 2 \end{bmatrix}\right\}n$．

(6) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$．　(7) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$．

(8) $\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$　(ただし $A, B \in M_n(\boldsymbol{R})$，$\det(A+B) \neq 0$，$\det(A-B) \neq 0$)．

3　次の行列式を計算せよ．

(1) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & ab & ca \\ ab & (c+a)^2 & bc \\ ca & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}$．　(2) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$．

(3) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & c & b & a \end{vmatrix}$．　(4) $\begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix}$．

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$．　(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots & \binom{n+1}{1} \\ \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \cdots & \binom{n+2}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n}{n} & \binom{n+1}{n} & \binom{n+2}{n} & \cdots & \binom{2n}{n} \end{vmatrix}$．

(7) 特性多項式が $f_A(X) = X^3 + X^2 + X - 8$ であるような行列 A の余因子行列を $\boldsymbol{A}$ とするとき，$\det \boldsymbol{A}$．

4　次の等式を証明せよ．

(1) $$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1-b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_1-b_n} \\ & \cdots\cdots & \\ \dfrac{1}{a_n-b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_n-b_n} \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2} \frac{\prod_{i<j}(a_i-a_j)(b_i-b_j)}{\prod_{k,l}(a_k-b_l)}.$$

(2) $$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ a_1 & X & -1 & & \vdots \\ a_2 & 0 & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -1 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & X \end{vmatrix} = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n.$$

(3) $$\begin{vmatrix} X_1 & a & \cdots & a & 1 \\ b & X_2 & \cdots & a & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & X_n & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{k=1}^{i-1}(X_k-a)\prod_{k=i+1}^{n}(X_k-b)\right).$$

(4) $$\begin{vmatrix} X_1 & a & \cdots & a \\ b & X_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & X_n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n}(X_k-a) + a\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{k=1}^{i-1}(X_k-a)\prod_{k=i+1}^{n}(X_k-b)\right).$$

5 $$F_k = X_1{}^k + X_2{}^k + \cdots + X_n{}^k, \qquad F_0 = n,$$

$$D_k = \begin{vmatrix} F_0 & F_1 & \cdots & F_{k-1} \\ F_1 & F_2 & \cdots & F_k \\ & \cdots\cdots & & \\ F_{k-1} & F_k & \cdots & F_{2k-2} \end{vmatrix}$$

とおけば

$$\begin{cases} D_n = \varDelta(X_1, \cdots, X_n)^2 & (\varDelta \text{ は } X_1, \cdots, X_n \text{ の差積}), \\ k < n \quad \text{ならば} \quad D_k = \displaystyle\sum_{i_1<\cdots<i_k} \varDelta(X_{i_1}, \cdots, X_{i_k})^2, & \\ k > n \quad \text{ならば} \quad D_k = 0 & \end{cases}$$

であることを証明せよ.

6　空間 E^3 の, 同一直線上にない 3 点 $P_i = (a_i, b_i, c_i)$ $(i=1, 2, 3)$ を通る平面の方程式は

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

で与えられることを証明せよ.

7　$P_i = (a_i, b_i)$ $(1 \leqq i \leqq 5)$ を平面 E^2 上の相異なる 5 点とする. 行列

$$A=\begin{bmatrix}1 & a_1 & b_1 & a_1^2 & a_1b_1 & b_1^2\\ 1 & a_2 & b_2 & a_2^2 & a_2b_2 & b_2^2\\ 1 & a_3 & b_3 & a_3^2 & a_3b_3 & b_3^2\\ 1 & a_4 & b_4 & a_4^2 & a_4b_4 & b_4^2\\ 1 & a_5 & b_5 & a_5^2 & a_5b_5 & b_5^2\end{bmatrix}$$

の階数は

5点が同一直線上にあれば3,

P_i $(1\leqq i\leqq 5)$ のうち4点が同一直線上にあれば4, それ以外は5

であることを証明せよ.

8　R は単位元をもつ可換環とする. $A=(a_{ij})\in M(l,m;R)$, $B=(b_{ij})\in M(m,n;R)$, $C=(c_{ij})\in M(n,l;R)$ とするとき,

$l>m$ または $l>n$ ならば

$$\det(ABC)=0,$$

$l\leqq m$, $l\leqq n$ ならば

$$\det(ABC)=\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_l\\ j_1<\cdots<j_l}}\begin{vmatrix}a_{1i_1} & \cdots & a_{1i_l}\\ & \cdots\cdots & \\ a_{li_1} & \cdots & a_{li_l}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_{i_1j_1} & \cdots & b_{i_1j_l}\\ & \cdots\cdots & \\ b_{i_lj_1} & \cdots & b_{i_lj_l}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}c_{j_11} & \cdots & c_{j_1l}\\ & \cdots\cdots & \\ c_{j_l1} & \cdots & c_{j_ll}\end{vmatrix}$$

を示せ.

9　変数 x_{ij} $(1\leqq i\leqq n,\ 1\leqq j\leqq n)$ の n 次正方行列 $X=(x_{ij})$ は ${}^tX=-X$ をみたすものとする.

(1)　n が奇数ならば, $\det X=0$ であることを示せ.

(2)　$(i-2, j-2)$ 成分 $(3\leqq i, j\leqq n)$ が $x_{12}x_{ij}-x_{1i}x_{2j}+x_{2i}x_{1j}$ である $(n-2)$ 次正方行列を $Y=(x_{12}x_{ij}-x_{1i}x_{2j}+x_{2i}x_{1j})$ とすれば, $\det X=(1/x_{12}^{n-4})\det Y$ であることを示せ.

(3)　n が偶数のとき, $\det X$ は x_{ij} のある多項式 $P_n(\cdots,x_{ij},\cdots)$ の完全平方式, すなわち, $\det X=P_n(\cdots,x_{ij},\cdots)^2$ となることを示せ.

($P_n(\cdots,x_{ij},\cdots)$ を交代行列 X の Pfaff 多項式 (Pfaffian) という.)

10　R を単位元をもつ可換環とし, $A=(a_{ij})\in M_n(R)$ の余因子行列を $\mathrm{adj}\,A$ で表わす. 次のことを証明せよ.

(1)　$\mathrm{adj}(AB)=\mathrm{adj}\,B\cdot\mathrm{adj}\,A$.

(2)　$AB=BA$　ならば　$(\mathrm{adj}\,A)B=B(\mathrm{adj}\,A)$.

(3)　$\mathrm{adj}(\mathrm{adj}\,A)=(\det A)^{n-2}A$.

(4)　$\mathrm{rk}\,A=n$　ならば　$\mathrm{rk}(\mathrm{adj}\,A)=n$,

　　$\mathrm{rk}\,A=n-1$　ならば　$\mathrm{rk}(\mathrm{adj}\,A)=1$,

　　$\mathrm{rk}\,A<n-2$　ならば　$\mathrm{rk}(\mathrm{adj}\,A)=0$.

アフィン幾何・射影幾何

第1章　Klein の Erlangen プログラム

§1.1　幾何学と変換群

近世にいたるまで，幾何といえば，われわれをとりまく世界のただ一つの幾何，すなわち Euclid 幾何しか考えられなかった．しかし，Euclid 幾何における平行線の公理(任意の直線 l に対して，l の上にない任意の1点 P をとれば，l と P との定める平面上に，P を通って，l と交わらない直線が(たかだか)一つ存在する)を，何とか他の公理から導こうという多くの人々の試みから，かえって平行線の公理の成り立たない，いわゆる非 Euclid 幾何が 19 世紀前半に生れた(N. I. Lobačevskii, J. Bolyai)．他方 19 世紀には，J.-V. Poncelet，A. F. Möbius，J. Steiner, J. Plücker, A. Cayley などの数学者によって，線分の長さや角の大きさを扱う Euclid 幾何とは別の立場に立つ射影幾何も生れた．その他にも別の名称で呼ばれる幾何も唱えられるようになった．

“これらのいろいろの幾何を統一し，あるいは分類する何等かの原理がないものであろうか”ということが考えられ，当時 23 歳の若い F. Klein は **Erlangen プログラム**(1872 年)で一挙にその時代の各種の幾何全体を見通す考え方を示した．

まず平面の Euclid 幾何を考えてみよう．そこでは，平面上においては直線，三角形，四角形などの直線図形や円などの図形が扱われ，例えば二等辺三角形の性質，円に内接する四辺形の性質などのように，図形の形に関する性質が主として論ぜられた．これらは，特定の位置にある定まった大きさの図形の性質でなく，或る図形の形に関する性質である．すなわち，或る図形 F に関する性質で，F と同時に，F に合同な，また F に相似な図形に共通な性質である．

このことをいいかえると次のようになる．いま，平面 $\boldsymbol{E}^2$ から $\boldsymbol{E}^2$ への全単射(1対1で上への写像) f が，$\boldsymbol{E}^2$ の**合同変換**であるとは

(i)　任意の線分 AB の像は，また $f(A), f(B)$ を結ぶ線分で，

(ii)　それらの長さが等しい：$\overline{AB}=\overline{f(A)f(B)}$

の成り立つことをいう．平面 $\boldsymbol{E}^2$ の合同変換の全体を $\boldsymbol{G}_E$ で表わすと，$\boldsymbol{G}_E$ は一つの変換群を作る．すなわち

I　$f_1, f_2 \in \boldsymbol{G}_E$ ならば，それらの結合 $f_1 \circ f_2$ も $\boldsymbol{G}_E$ に属する，

II　$f \in \boldsymbol{G}_E$ ならば，f の逆変換 f^{-1} も $\boldsymbol{G}_E$ に属する．

$\boldsymbol{G}_E$ を平面 $\boldsymbol{E}^2$ の**合同変換群**(congruence transformation group)という．

また平面 $\boldsymbol{E}^2$ から $\boldsymbol{E}^2$ への全単射 f が**相似変換**であるとは，

(i)′　任意の線分 AB の像は $f(A), f(B)$ を結ぶ線分であり，

(ii)′　ある定数 $k>0$ があって

(1.1)
$$\overline{AB} = k\overline{f(A)f(B)}$$

の成り立つことをいう．(k は f のみに依存する．)

(ii)′ をいいかえると，平面 $\boldsymbol{E}^2$ 上の任意の3点 A, B, C に対して

(1.2)
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{f(A)f(B)}}{\overline{f(A)f(C)}}$$

ということと同値である．

さて平面 $\boldsymbol{E}^2$ 上の相似変換の全体 $\boldsymbol{G}_S$ も一つの変換群を作る．すなわち

I′　$f_1, f_2 \in \boldsymbol{G}_S$ ならば $f_1 \circ f_2 \in \boldsymbol{G}_S$,

II′　$f \in \boldsymbol{G}_S$ ならば $f^{-1} \in \boldsymbol{G}_S$.

$\boldsymbol{G}_S$ を平面 $\boldsymbol{E}^2$ の**相似変換群**(similarity transformation group)という．明らかに，合同変換は相似変換の一種であるから，合同変換群は相似変換群の部分群である．

合同変換によって線分の長さは不変に保たれるが，相似変換によっては線分の長さは一般に変化する．ただし，(1.1)または(1.2)によって，二つの線分のなす

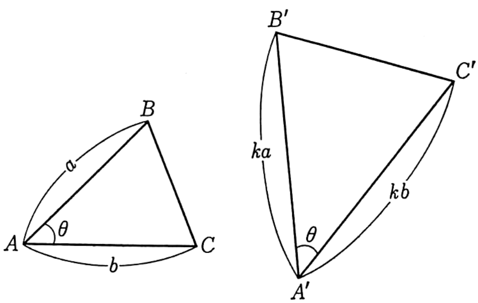


図 1.1

角 $\angle BAC$ の大きさは，相似変換によって不変に保たれる．また相似変換によって，円は(半径の長さは一般に初めの円の半径の長さと異なる)円にうつされる．

一般に，任意の相似変換によって不変に保たれる図形の性質を，**図形の形**という．

以上を反省して，Klein は次のように幾何学というものを定めた．

まずある空間 Ω を考える．(Ω は単に集合とみてもよい．Ω を**基礎集合**と呼ぼう．) Ω 上の或る種の図形(例えば直線図形，円など)を考え，それらの図形についての或る種の性質(例えば線分の長さ，図形の形など)を考える．

次に，集合 Ω から Ω への全単射 f で

(i)　考えている種類の図形 F は，同種の図形 $f(F)$ にうつる，

(ii)　F について考えられている性質 P は，$f(F)$ に対しても不変に保たれる

という性質をもつ全体を $\boldsymbol{G}$ とする．合同変換や相似変換の場合と同様に，$\boldsymbol{G}$ に対しても性質 I, II と同じことが成り立つ．したがって，$\boldsymbol{G}$ は一つの**変換群**を作る．

逆に，空間 Ω と，Ω の変換群 $\boldsymbol{G}$ とを与えるとき，Ω 上の図形 F の性質で，任意の $f\in\boldsymbol{G}$ によって(上記(i), (ii)の意味で)不変に保たれるもののことを，Ω 上の($\boldsymbol{G}$ によって定まる)**幾何学的性質**ということにする．これは，変換群 $\boldsymbol{G}$ を上記(i), (ii)によって定めることと，見方を全く逆にした考え方である．

しかし，この新しい立場をとるならば，おのおのの幾何には，それに固有の一つの変換群 $\boldsymbol{G}$ が定められていて

幾何学的性質 $\Longleftrightarrow$ 変換群 $\boldsymbol{G}$ に属する各変換 f で不変に保たれる性質

という図式によって，変換群 $\boldsymbol{G}$ によりその幾何が完全に特徴づけられることになる．この意味で

幾何　　$(\Omega, \boldsymbol{G})$

と表わすことができる．

§1.2　いろいろの幾何の比較

a)　アフィン幾何

Ω を Euclid 空間とし，$\boldsymbol{G}_E$ を Ω の合同変換群，$\boldsymbol{G}_S$ を Ω の相似変換群とする．$\boldsymbol{G}_E$ は $\boldsymbol{G}_S$ の部分群である．どちらもふつう Euclid 幾何と呼ばれているものであるが，これらを区別して

$$\textbf{合同幾何} = (\Omega, \boldsymbol{G_E})$$

$$\textbf{相似幾何} = (\Omega, \boldsymbol{G_S})$$

と呼ぶことにする.

$\boldsymbol{G_E} \subseteqq \boldsymbol{G_S}$ であるから，すべての $f \in \boldsymbol{G_S}$ で不変に保たれるような図形の性質 P は，特に $g \in \boldsymbol{G_E}$ に対しても不変に保たれる．故に相似幾何において成り立つ図形の性質(すなわち，すべての $f \in \boldsymbol{G_S}$ で不変に保たれる性質)は，合同幾何においても成り立つ．しかし，その逆は必ずしも真でない．

どちらの幾何においても，直線(線分)，円は不変な性質である．また角の大きさは相似幾何において不変な性質であり，したがって合同幾何においても不変である．

しかし，線分の長さ(平行四辺形の面積，平行六面体の体積)は合同幾何では不変な性質であるが，相似幾何では不変でない．

一般に，二つの幾何があって，基礎集合 Ω は両者に共通であるが，変換群が異なっている場合に，変換群が大きければ，それだけ不変に保たれる性質は制限をうけて少なくなる．

この意味で，Euclid 空間における変換群で，$\boldsymbol{G_S}$ より真に大きい変換群には，どのようなものがあるだろうか．われわれが既に知っているものとして，アフィン変換群がある．合同変換が§1.1の(i), (ii)によって，また相似変換が§1.1の(i)′, (ii)′ によって特徴づけられたのに対して，Euclid 空間 Ω の**アフィン変換** f は，Ω から Ω への全単射であって

(i)″ 任意の線分 AB の像は，また $f(A), f(B)$ を結ぶ線分である，

(ii)″ 同一直線上の3点 A, B, C に対して

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{f(A)f(B)}}{\overline{f(A)f(C)}} \tag{1.3}$$

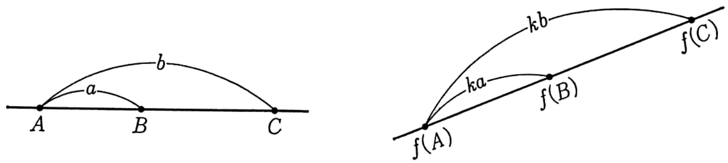


図1・2

が成り立つものとして定義される．

すなわち，相似変換の条件(1.2)と比べると，相似変換の場合には任意の3点 A, B, C に対して，(1.2)が成り立つのに対して，アフィン変換では同一直線上の3点 A, B, C のみに対して(1.3)が成り立つことを条件とするのである．したがって

$$f\text{: 相似変換} \Longrightarrow f\text{: アフィン変換}$$

であるが，逆向き $\Longleftarrow$ は一般には成り立たない．

さて，Ω 上のアフィン変換に対しても，§1.1のI, IIと同じ性質があるので，Ω 上のアフィン変換全体 $\boldsymbol{G}_A$ は一つの変換群を作る．この $\boldsymbol{G}_A$ を**アフィン変換群**(affine transformation group)という．アフィン変換群 $\boldsymbol{G}_A$ に対して

$$\textbf{アフィン幾何} = (\Omega, \boldsymbol{G}_A)$$

が定義される．

アフィン幾何の性質，すなわち，任意のアフィン変換 f に対して不変に保たれる性質は何であろうか．

まず，仮定(i)″によって，アフィン変換 f によって直線は直線にうつされ，平面は平面にうつされることがわかる．次に2直線 l_1, l_2 が点 P で交われば，f によって2直線 $f(l_1)$ と $f(l_2)$ とは点 $f(P)$ で交わる．したがって2直線 l_1, l_2 が同一平面上で平行であれば，$f(l_1)$ と $f(l_2)$ も同一平面上にあって平行である．

Euclid空間 Ω で，二つの有向線分 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ が同値である：

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \tag{1.4}$$

ことを

(α)　4点 A, B, C, D が同一直線上にない場合には，この4点が同一平面上にあって，$AB \parallel CD$ かつ $AC \parallel BD$ である：

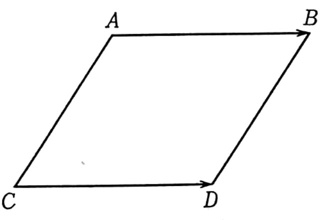


図 I・3

または

(β) 4点 A, B, C, D は同一直線 l 上にあって，l を含む平面 π 上に別に2点 E, F をとるとき，(α)の意味で

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF} \sim \overrightarrow{CD}$$

となることとして定義する.

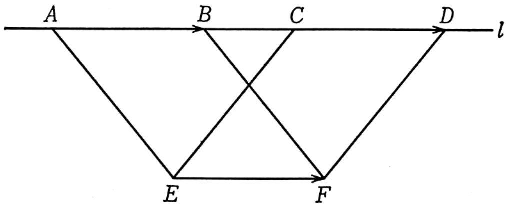


図 1·4

Ω 上のすべての有向線分を，(1.4)の意味による同値関係 $\sim$ によって類別したとき，各同値類 $\boldsymbol{a}$ を Ω 上の**ベクトル**という.

ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ とに対して，それらの和

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

およびベクトル $\boldsymbol{a}$ のスカラー倍

$$\lambda\boldsymbol{a} \qquad (\lambda \text{ は実数})$$

が定義される.

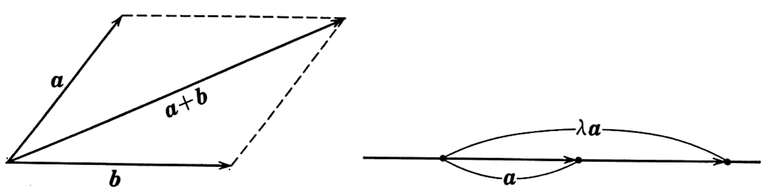


図 1·5

Ω 上のベクトル全体の集合を

$$\boldsymbol{V}(\Omega)$$

で表わすことにする．上に述べたことから，$\boldsymbol{V}(\Omega)$ は一つのベクトル空間を作る.

いま Ω 上のアフィン変換 f を任意にとる．アフィン変換の性質 (i)″ を用いると，f によって平面は平面にうつり，平行直線は平行直線にうつるので，同値 $\sim$

の条件 (α), (β) に対して

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Longrightarrow \overrightarrow{f(A)f(B)} \sim \overrightarrow{f(C)f(D)}$$

が成り立つ. すなわち, Ω 上のベクトル $\boldsymbol{a}$ は, アフィン変換 f によってまた一つのベクトル $\boldsymbol{a}'$ にうつる. これを

$$\boldsymbol{a}' = \varphi(\boldsymbol{a})$$

と定めよう. このとき

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \Longrightarrow \varphi(\boldsymbol{a})+\varphi(\boldsymbol{b}) = \varphi(\boldsymbol{c})$$

となる.

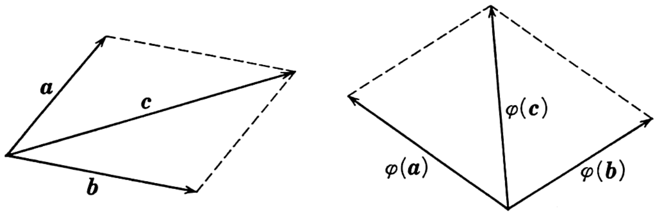


図 1・6

次にアフィン変換の条件 (ii)″ によって

$$\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a} \Longrightarrow \varphi(\boldsymbol{b}) = \lambda\varphi(\boldsymbol{a})$$

が成り立つ.



図 1・7

すなわち, アフィン変換 f によって, ベクトルはベクトルにうつり, ベクトルの和はベクトルの和に, ベクトルのスカラー倍はベクトルの同じスカラー倍にうつる. これから, ベクトル, ベクトルの和, ベクトルのスカラー倍の概念はアフィン幾何の性質であることがわかった.

また, ベクトルの概念を用いれば, "三角形の 3 中線は 1 点で交わる" とか, Menelaus の定理, Ceva の定理, Pappus の定理, Desargues の定理などが証

明されるので，これらの諸定理は，Euclid 幾何的性質というよりはアフィン幾何的性質ということができる．

以上に説明した三つの幾何において，同一集合 Ω の変換群として

$$\boldsymbol{G}_E \subseteqq \boldsymbol{G}_S \subseteqq \boldsymbol{G}_A$$

であった．これら変換群の大きさの相違は，例えばこれらの群の含む自由に動き得る実パラメータの個数によっても表現される．例えば，Ω を Euclid 平面とするとき

$$\begin{cases} \boldsymbol{G}_E \text{ の含む自由パラメータ} & 3\text{個} \\ \boldsymbol{G}_S \text{ の含む自由パラメータ} & 4\text{個} \\ \boldsymbol{G}_A \text{ の含む自由パラメータ} & 6\text{個} \end{cases}$$

となっている．

またこれら変換群の大きさの相違は，変換群による均質性の度合(可移度)によっても表わされる．例えば，Euclid 平面 Ω に対して

$\boldsymbol{G}_E$ は Ω 上の任意の点 A を任意の点 A' にうつす変換 f_1 を含む：

$$f_1(A) = A'.$$

$\boldsymbol{G}_S$ は Ω 上の任意の2点 A, B を任意の2点 A', B' にうつす変換 f_2 を含む：

$$f_2(A) = A' \quad \text{かつ} \quad f_2(B) = B'.$$

$\boldsymbol{G}_A$ は(同一直線上にない)任意の3点 A, B, C を(同一直線上にない)任意の3点 A', B', C' にうつす変換 f_3 を含む：

$$f_3(A) = A', \quad f_3(B) = B' \quad \text{かつ} \quad f_3(C) = C'.$$

ただし，1点 A を固定する合同変換 f_1 は A を中心とする回転となり，2点 A, B を固定する相似変換は，AB を軸とする折り返しかまたは恒等変換であり，同一直線上にない3点を固定するアフィン変換は恒等変換しかない．

b）球面の幾何

今度は $\boldsymbol{G}_E$ の部分群 $\boldsymbol{G}$ で，やはり一種の幾何を生じるものはないかどうかを考えてみよう．いま Ω を3次元 Euclid 空間とし，$\boldsymbol{G}_E$ の部分群 $\boldsymbol{G}_R$ を1点 O を中心とする回転全体の作る変換群とする．$\boldsymbol{G}_R$ は Ω 上に可移に作用していない．(すなわち，Ω 上の2点 A, A' に対して $f(A)=A'$ となる $f \in \boldsymbol{G}_R$ は必ずしも存在しない．) この場合には，Ω の部分集合 Ω_1 を点 O を中心とし半径 $r>0$ の球面とする．$f \in \boldsymbol{G}_R$ に対して

$$f(\Omega_1)=\Omega_1$$

であり，かつ $\boldsymbol{G}_R$ は Ω_1 上で可移に作用している．ここで新しい幾何

(1.5) $$(\Omega_1, \boldsymbol{G}_R)$$

が導かれる．これを**球面の幾何**と呼ぶことにしよう．

Ω_1 上で直線の代りをするものは大円であり，線分の長さに相当するものは大円の弧の長さであり，角に相当するものが大円のなす角である．これらは $f\in\boldsymbol{G}_R$ に対して不変な性質となっている．

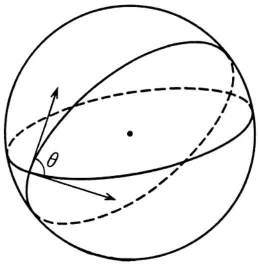


図 1・8

一般に幾何 $(\Omega, \boldsymbol{G})$ において，基礎集合 Ω の或る類別 $\sim$ があり，任意の $f\in\boldsymbol{G}$ に対して

(1.6) $$A\sim B \Longrightarrow f(A)\sim f(B)$$

が成り立つとする．そのとき同値類全体の集合 $\tilde{\Omega}=\Omega/\sim$ の上にやはり $\boldsymbol{G}$ が作用している．$f\in\boldsymbol{G}$ で，$\tilde{\Omega}$ の任意の元を自分自身にうつすものの全体(すなわち，任意の $A\in\Omega$ に対して $f(A)\sim A$ となるような f の全体)を $\boldsymbol{N}$ とするとき，$\boldsymbol{N}$ は $\boldsymbol{G}$ の正規部分群となる．何故ならば，任意の $A\in\Omega$ と任意の $g\in\boldsymbol{G}$ に対して，$f\circ g(A)\sim g(A)$，したがって $g^{-1}\circ f\circ g(A)\sim g^{-1}\circ g(A)=A$，となるので，$g^{-1}\circ f\circ g\in\boldsymbol{N}$ となるからである．よって $\tilde{\boldsymbol{G}}=\boldsymbol{G}/\boldsymbol{N}$ は $\tilde{\Omega}$ の上の変換群となる．これから新しく

(1.7) 幾何 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\boldsymbol{G}})$

が導かれる．

さて球面の幾何 $(\Omega_1, \boldsymbol{G}_R)$ において，$A\sim B$ とは A と B とが球面上でその中心に対して対称である(すなわち互いに対蹠点である)としよう．そのとき球面 Ω_1 の任意の回転 $f\in\boldsymbol{G}_R$ に対して，$A\sim B$ であれば $f(A)\sim f(B)$ である．よって球面 Ω_1 を同値類に分けて得られる空間 $\tilde{\Omega}_1$ に対して，新しい幾何

(1.8)　　$(\tilde{\Omega}_1, \tilde{\boldsymbol{G}}_R)$

が，上の一般方針にしたがって導かれる．ただし，任意の点 $A \in \Omega_1$ に対して $f(A) \sim A$ となる回転 f は，恒等写像または中心に対する対称写像 σ_0 であるので，

$$\tilde{\boldsymbol{G}}_R = \boldsymbol{G}_R/\boldsymbol{N}, \qquad \boldsymbol{N} = \{1, \sigma_0\}$$

である．この空間 $\tilde{\Omega}_1$ においては，直線は(大円)/∼ であり，線分の長さ，角の大きさは Ω_1 上のそれらをそのまま用いればよい．また $\tilde{\Omega}_1$ 上では，任意の2直線は必ずただ1点で交わる．幾何(1.8)は2次元**楕円的非 Euclid 幾何**と呼ばれるものである．($\tilde{\Omega}_1$ は空間として次に見る射影平面と一致する．)

c) 射影幾何

b)において合同幾何 $(\Omega, \boldsymbol{G}_E)$ から Ω の部分集合 Ω_1 をとり，Ω_1 を Ω_1 にうつすような $f \in \boldsymbol{G}_E$ の全体 $\boldsymbol{G}_R$ をとって，$\boldsymbol{G}_R$ を Ω_1 上の変換群とみるとき，新しい幾何 $(\Omega_1, \boldsymbol{G}_R)$ が考えられた．この過程を逆にとって，n 次元 Euclid 空間 Ω を含む或る集合 Ω^*：

$$\Omega \subseteqq \Omega^*$$

および Ω^* 上の或る変換群 $\boldsymbol{G}^*$ を考えよう．$f^* \in \boldsymbol{G}^*$ で特に Ω を Ω にうつすようなものの全体 $\boldsymbol{G}(\Omega)\,(\subseteqq \boldsymbol{G}^*)$ は，Ω 上の変換群とみることができる．これがちょうど初めに与えられたアフィン変換群と一致する：

$$\boldsymbol{G}_A = \boldsymbol{G}(\Omega) \subseteqq \boldsymbol{G}^*$$

となるものはないであろうか．

つまり，Euclid 空間 Ω と合同変換群 $\boldsymbol{G}_E$ から，これを球面 Ω_1 に制限して，球面の幾何 $(\Omega_1, \boldsymbol{G}_R)$ $(\Omega_1 \subseteqq \Omega,\ \boldsymbol{G}_R \subseteqq \boldsymbol{G}_E)$ を生じたと同じく，新しい幾何 $(\Omega^*, \boldsymbol{G}^*)$ から，これを $\Omega\,(\subseteqq \Omega^*)$ 上に制限してアフィン幾何 $(\Omega, \boldsymbol{G}_A)$ となるようなものが考えられないであろうか．

事実われわれは第4章，第5章で見るように，n 次元 Euclid 空間 Ω に無限遠超平面を添加して n 次元**射影空間** Ω^* を作り，Ω^* の変換群として**射影変換群** $\boldsymbol{G}^*$ をとれば，$f^* \in \boldsymbol{G}^*$ で Ω を自分自身にうつすものの全体 $\boldsymbol{G}(\Omega)$ が，ちょうど Ω のアフィン変換の全体と一致することがわかる．

しかも，このようにして考えられた n 次元**射影幾何**：

(1.9)　　$(\Omega^*, \boldsymbol{G}^*)$

は，アフィン幾何よりもより強い均質性を持っている．すなわち，$n=2$ の射影

平面 Ω^* の場合に，Ω^* 上の任意の 4 点 A, B, C, D および任意の 4 点 A', B', C', D'（ただし，どちらの組の中の 3 点も同一(射影)直線上にはないものとする)を与えるとき，$f^* \in \boldsymbol{G}^*$ で

$$f^*(A) = A', \quad f^*(B) = B', \quad f^*(C) = C', \quad f^*(D) = D'$$

となるものがつねに存在し，しかもただ一つに定まる．したがって $\boldsymbol{G}^*$ の含む自由パラメータは 8 個となる．

n 次元射影幾何 $(\Omega^*, \boldsymbol{G}^*)$ は n 次元アフィン幾何 $(\Omega, \boldsymbol{G}_A)$ より無限遠超平面を添加して得られるが，別に b) の方針によっても導くことができる．すなわち(第5章でくわしく説明するように) $n+1$ 次元アフィン幾何 $(\Omega^{n+1}, \boldsymbol{G}_A{}^{n+1})$ において，Ω^{n+1} の 1 点 O を定め ${}^*\Omega^{n+1} = \Omega^{n+1} - \{O\}$ とする．$f \in \boldsymbol{G}_A{}^{n+1}$ で $f(O) = O$ となるものの全体を ${}^*\boldsymbol{G}_A{}^{n+1}$ とすると，$f \in {}^*\boldsymbol{G}_A{}^{n+1}$ は ${}^*\Omega^{n+1}$ 上の変換群となる．さて ${}^*\Omega^{n+1}$ 上で

$$A \sim B \Longleftrightarrow \text{直線}\ OA = \text{直線}\ OB$$

（すなわち，O, A, B は同一直線上にある）

と定めて，$\tilde{\Omega}^n = {}^*\Omega^{n+1}/\sim$ とおく．一方 $\boldsymbol{N} \subseteqq {}^*\boldsymbol{G}_A{}^{n+1}$ を任意の $A \in {}^*\Omega^{n+1}$ に対して $f(A) \sim A$ となる $f \in {}^*\boldsymbol{G}_A{}^{n+1}$ の全体とする．$\tilde{\boldsymbol{G}}^n = {}^*\boldsymbol{G}_A{}^{n+1}/\boldsymbol{N}$ とおく．ここに新しい幾何 $(\tilde{\Omega}^n, \tilde{\boldsymbol{G}}^n)$ を生じる．第5章で見るように，この $(\tilde{\Omega}^n, \tilde{\boldsymbol{G}}^n)$ が実は n 次元射影幾何 $(\Omega^*, \boldsymbol{G}^*)$ と一致するのである．

さて，19 世紀においてふつう考えられていた他のいろいろの幾何は，すべて射影幾何から，或る種の制限として導かれることが Klein によって示された．この意味で当時にあっては射影幾何は万能の幾何であった．その一例として**双曲的非 Euclid 幾何**(Lobačevskii-Bolyai の非 Euclid 幾何)がある．これについては巻末の付記で簡単にふれよう．

なお，Klein の幾何全般に対しては，Klein の原著の訳・解説が出版されている(参考書 [9])．邦書としては滝沢 [5] 第5章に簡潔に，かつ具体的に説明されている．

d）多様体上の幾何

19 世紀後半になって，G. F. B. Riemann は Euclid 空間内の曲面上の幾何を拡張して，n 次元多様体(微分可能多様体)上の Riemann 計量を定義していわゆる Riemann 幾何を構成した(1854 年)．

一般に n 次元 Riemann 多様体上に可移に作用し，かつ計量を不変に保つような変換群は存在しない．したがって Riemann 幾何は Klein のいう幾何の枠の中に入らないものである．

今日では，幾何はおよそ二つに大別されて

$$\begin{cases} \text{Klein の幾何} \\ \text{多様体上の幾何} \end{cases}$$

とに分けられる．Klein のいう幾何は大体において 19 世紀中に主要な発展を終わり，今日では後者の方が発展をつづけている．ただし，20 世紀初頭以来急速に発展して来た**位相幾何**は，位相空間 Ω と，Ω 上の位相変換全体(位相変換群)を考え，Ω の位相的不変量を求めるという点では Klein の幾何に分類されるものである．

今日の幾何がどんなものとなってきているかについては，本選書のその方面のテーマで説明がなされるであろうから，ここに簡単な説明を加えることを差し控える．しかし，19 世紀に Klein が考えた幾何と群との関係は，今日ではすでに古典的なものとなっているが，数学発展途上での一つの大きな段階とみなされるべきであろう．

第2章　アフィン幾何

§2.1　アフィン空間

a）アフィン空間の定義

アフィン空間を定義する方法は幾通りかある．もちろんそれらは同値なものであるが，基礎概念として何をとるかという点で異なるものである．ここでは線型代数の立場に立って，基礎集合 $\boldsymbol{X}$ とベクトル空間 $\boldsymbol{V}$ との組としてアフィン空間を定義することにする．

定義 2.1　$\boldsymbol{n}$ **次元アフィン空間**

$$\boldsymbol{A}^n = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$$

とは，次の公理系をみたす集合 $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{n}$ 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{V}^n$ との組をいう．（ベクトル空間 $\boldsymbol{V}^n$ の係数は任意の可換体 K でよいが，今後特にことわらない限り K は実数体 $\boldsymbol{R}$ とする．）このとき集合 $\boldsymbol{X}$ をこのアフィン空間 $\boldsymbol{A}^n$ の**基礎集合** (basic set, underlying set)，$\boldsymbol{V}^n$ をこのアフィン空間 $\boldsymbol{A}^n$ の**同伴ベクトル空間** (associated vector space) という．

公理 2.1　任意のベクトル $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}^n$ に対して，$\boldsymbol{X}$ から $\boldsymbol{X}$ への写像 $f_{\boldsymbol{a}}$ が定まる．$f_{\boldsymbol{a}}$ をベクトル $\boldsymbol{a}$ に対応する**平行移動** (translation) という．

公理 2.2　$\boldsymbol{X}$ 上の任意の 2 点 P, Q に対して

$$f_{\boldsymbol{a}}(P) = Q$$

となる平行移動 $f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}^n)$ が存在して，しかもただ一つに定まる．

公理 2.3　$\boldsymbol{V}^n$ に属する任意の 2 ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して

$$f_{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}} = f_{\boldsymbol{b}} \circ f_{\boldsymbol{a}}$$

が成り立つ．ただし $\circ$ は写像の結合の記号である．

[記号]　任意の $P \in \boldsymbol{X}$ と任意の $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}^n$ とに対して

(2.1)　$$f_{\boldsymbol{a}}(P) = P + \boldsymbol{a}$$

と表わすことにする．この記号を用いると，公理 2.1, 2.2, 2.3 は次のように表わされる：

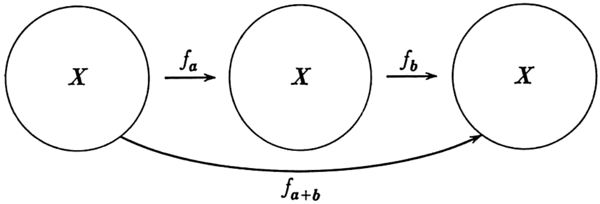


図2・1

公理 2.1* 任意の $P \in X$, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}^n$ に対して

$$Q = P + \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{X}$$

が定まる.

公理 2.2* $\boldsymbol{X}$ 上の任意の 2 点 P, Q に対して

$$Q = P + \boldsymbol{a} \tag{2.2}$$

となるベクトル $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}^n$ が存在して，しかもただ一つに定まる．

公理 2.3* 任意の $P \in X$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{V}^n$ に対して

$$(P + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b} = P + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}). \tag{2.3}$$

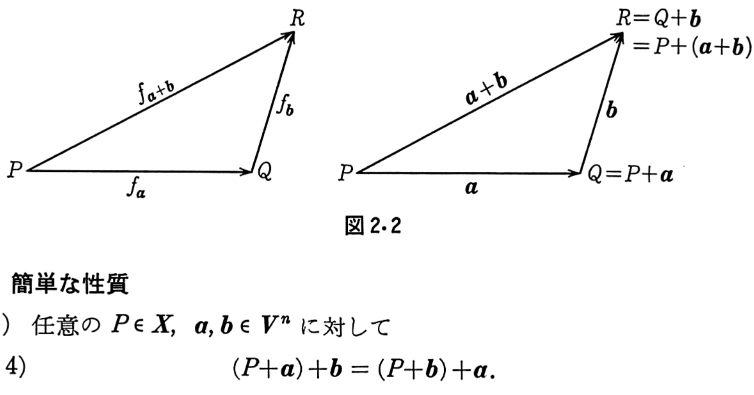


図2・2

b) 簡単な性質

(I) 任意の $P \in X$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{V}^n$ に対して

$$(P + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b} = (P + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{a}. \tag{2.4}$$

証明 公理 2.3* によって，(2.4)の左辺$= P + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$，(2.4)の右辺$= P + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a})$であるが，$\boldsymbol{V}^n$ においては $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ であるので，(2.4)の両辺は一致する．∎

[記号] 公理 2.2* によって，任意の $P, Q \in \boldsymbol{X}$ に対して

$$Q = P + \boldsymbol{a}$$

となる $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}^n$ はただ一つ定まる．このベクトル $\boldsymbol{a}$ を

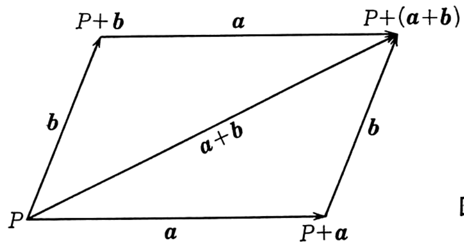


図 2・3

(2.5)
$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PQ}$$

と表わす．この記号を用いると，公理 2.3* は次のように表わされる：

公理 2・3**　任意の $P, Q, R \in \boldsymbol{X}$ に対して

(2.6)
$$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}.$$

すなわち，$P+\boldsymbol{a}=Q$, $Q+\boldsymbol{b}=R$ とすれば，公理 2.3* によって $R=P+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ である．よって

$$\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{QR} = \boldsymbol{b}, \quad \overrightarrow{PR} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

となり，(2.6) が成り立つ．逆に (2.6) から (2.3) が同様に導かれる．

以下，公理 2.1, 2.2, 2.3 より導かれる簡単な性質を列挙しよう．

(II)　ベクトル空間 $\boldsymbol{V}^n$ の零元 $\boldsymbol{0}$ に対して

$$f_0 = \text{恒等写像},$$

すなわち，任意の点 $P \in \boldsymbol{X}$ に対して

(2.7)
$$P+\boldsymbol{0} = P.$$

また $P+\boldsymbol{a}=P$ となるのは $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ の場合に限る．

証明　公理 2.2* によって，任意の点 P に対して

$$P+\boldsymbol{x} = P$$

となる $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}^n$ がただ一つ定まる．

さて $P+\boldsymbol{0}=Q$ とすると

$$\begin{aligned} Q = P+\boldsymbol{0} &= (P+\boldsymbol{x})+\boldsymbol{0} \\ &= P+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}) = P+\boldsymbol{x} = P \end{aligned}$$

となる．よって $P=Q$, すなわち $P+\boldsymbol{0}=P$ が成り立つ．

逆に $P=P+\boldsymbol{a}$ とすれば，$P=P+\boldsymbol{0}=P+\boldsymbol{a}$ より，公理 2.2* によって $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ でなければならない．▌

(III)　任意の $P, Q \in \boldsymbol{X}$ に対して

$$P+\boldsymbol{a}=Q \Leftrightarrow Q+(-\boldsymbol{a})=P, \tag{2.8}$$

すなわち

$$-\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QP} \tag{2.9}$$

が成り立つ.

証明　$Q=P+\boldsymbol{a}$ とすれば，公理 2.3* および(II)より

$$\begin{aligned} Q+(-\boldsymbol{a}) &= (P+\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a}) = P+(\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})) \\ &= P+\boldsymbol{0} = P \end{aligned}$$

となる. ∎

(IV)　任意の $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}^n$ に対して，$\boldsymbol{X}$ の平行移動 $f_{\boldsymbol{a}}$ は $\boldsymbol{X}$ の全単射である.

証明　$f_{\boldsymbol{a}}$ が単射のこと：$f_{\boldsymbol{a}}(P)=f_{\boldsymbol{a}}(P')=Q$ であれば(III)によって $P=P'=f_{-\boldsymbol{a}}(Q)$ である.

$f_{\boldsymbol{a}}$ が全射のこと：任意の $Q \in \boldsymbol{X}$ に対して，$P=f_{-\boldsymbol{a}}(Q)=Q+(-\boldsymbol{a})$ とおけば，$f_{\boldsymbol{a}}(P)=P+\boldsymbol{a}=Q$ となる. ∎

注意　集合論的表現を好む読者にとっては，次の表現の方がわかり易いかも知れない. 集合 $\boldsymbol{X}$ とベクトル空間 $\boldsymbol{V}^n$ との組 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ で

(i)　写像

$$F: \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{V}^n \longrightarrow \boldsymbol{X}$$

が定義されている. これを

$$F(P, \boldsymbol{a}) = P+\boldsymbol{a} \qquad (P \in \boldsymbol{X},\ \ \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}^n)$$

と表わす.

(ii)　結合法則. 可換図式

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{V}^n\times\boldsymbol{V}^n & \longrightarrow & \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{V}^n \\ \downarrow & \circlearrowright & \downarrow F \\ \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{V}^n & \xrightarrow{F} & \boldsymbol{X} \end{array}$$

が成り立つ. すなわち，$P \in \boldsymbol{X}$,　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{V}^n$ に対して

$$\begin{array}{ccc} (P, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & \longmapsto & (P, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (P+\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & \longmapsto & (P+\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b} = P+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \end{array}$$

となる.

(iii)　任意の $P \in \boldsymbol{X}$ に対して $P+\boldsymbol{0}=P$. すなわち $P+\boldsymbol{a}=f_{\boldsymbol{a}}(P)$ と書くとき，$f_{\boldsymbol{0}}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ は恒等写像となる.

(iv) 任意の $P, Q \in \boldsymbol{X}$ に対して $P+\boldsymbol{a}=Q$ となる $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}^n$ が存在する．(すなわち，$\boldsymbol{V}^n$ は $\boldsymbol{X}$ 上に**可移**(transitive)に作用する．)
(以上(i)-(iv)をいいかえると，ベクトル空間 $\boldsymbol{V}^n$ を**変換群**として $\boldsymbol{X}$ は**等質空間**となる．)

(v) $P+\boldsymbol{a}=P$ が成り立つのは $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ に限る．すなわち1点 P を固定する $f_{\boldsymbol{a}}$ は $f_{\boldsymbol{0}}$ 以外に存在しない．(これを $\boldsymbol{V}^n$ が $\boldsymbol{X}$ に**単純に**(simply)作用するという．)

以上が成り立つとき，$\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ をアフィン空間という．

定義 2.2 A^1 を**アフィン直線**(affine line)，A^2 を**アフィン平面**(affine plane)という．

例 2.1 任意に n 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{V}^n$ を与えるとき，或る集合 $\boldsymbol{X}$ をとって，$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ がアフィン空間であるようにすることができる．

[解] 例えば $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{V}^n$ にとればよい．▌

§2.2 アフィン座標枠

a) 座標枠と座標

n 次元アフィン空間 $\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ を一つ定めておく．

定義 2.3 n 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{V}^n$ の一つの基底を $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ とする．すなわち

$$\boldsymbol{V}^n = \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_1+\cdots+\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_n \tag{2.10}$$

で，$\boldsymbol{V}^n$ の任意の元 $\boldsymbol{a}$ は一意に

$$\boldsymbol{a} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n \qquad (\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \boldsymbol{R})$$

と表わされるものとする．そのとき，$\boldsymbol{X}$ の1点 O を任意に定め

$$\Sigma_A = (O\,;\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \tag{2.11}$$

をこのアフィン空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ の**アフィン座標枠**(affine frame)(または単に**座標枠**)という．また $\boldsymbol{e}_i=\overrightarrow{OE_i}\ (i=1, \cdots, n)$ とするとき，

$$\Sigma_A = (O\,; E_1, \cdots, E_n)$$

と表わすこともある．このとき O を**原点**，$E_1, \cdots, E_n$ を**単位点**という．

いまアフィン空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ の座標枠 $\Sigma_A=(O\,;\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ を一つ固定する．任意の点 $P \in \boldsymbol{X}$ に対して

$$P = O+\boldsymbol{a} \qquad (\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}^n)$$

となる $\boldsymbol{a}$ がまず一意に定まり，次に

$$\boldsymbol{a} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n \qquad (\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \boldsymbol{R})$$

となる $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ が $\boldsymbol{a}$ に対して一意に定まる．すなわち

(2.12) $$P = O+\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n$$

と表わされる．このとき

(2.13) $$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

を点 P の座標枠 Σ_A に関する**アフィン座標**(affine coordinates)または単に**座標**という.

(V) アフィン空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ の座標枠 $\Sigma_A=(O\,;\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ を定めることにより，$\boldsymbol{X}$ の任意の点 P に対してその座標 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ が一意に定まる．逆に，任意に n 個の実数 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ を与えるとき，これを座標とする点 $P\in\boldsymbol{X}$ がつねに存在してただ一つに定まる.

この全単射を Ψ_{Σ_A} とおこう：

(2.14) $$\Psi_{\Sigma_A}:\ \boldsymbol{X}\longrightarrow \boldsymbol{R}\times\cdots\times\boldsymbol{R},$$

すなわち $P=O+\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n$ のとき

(2.15) $$\Psi_{\Sigma_A}(P) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

と表わす.

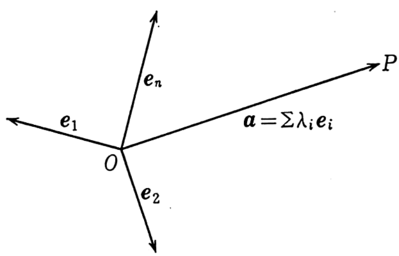


図 2・4

例 2.2 アフィン空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ の座標枠 $\Sigma_A=(O\,;\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ に関して，点 P, Q の座標をそれぞれ $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, $(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ とすれば

(2.16) $$\overrightarrow{PQ} = \sum_{i=1}^{n}(\mu_i-\lambda_i)\boldsymbol{e}_i$$

となる．逆に

$$\Psi_{\Sigma_A}(P) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n), \qquad \boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n}\tau_i\boldsymbol{e}_i$$

であれば，点 $Q=P+\boldsymbol{a}$ の座標 $\Psi_{\Sigma_A}(Q)=(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ は

(2.17) $$\mu_i = \lambda_i + \tau_i, \quad i = 1, \cdots, n$$

となる．

b）座標変換

(VI) アフィン空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ の二つの座標枠

$$\Sigma_A = (O; \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n), \quad \Sigma_A' = (O'; \boldsymbol{e}_1', \cdots, \boldsymbol{e}_n')$$

に関して，点 P の座標をそれぞれ

$$\Psi_{\Sigma_A}(P) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n), \quad \Psi_{\Sigma_A'}(P) = (\lambda_1', \cdots, \lambda_n')$$

とするとき，それらの間の関係は次のようである：

いま $\boldsymbol{V}^n = \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_1' + \cdots + \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_n'$ より

(2.18) $$\boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{n} \tau_{ij} \boldsymbol{e}_i', \quad j = 1, \cdots, n$$

および

(2.19) $$\boldsymbol{e}_j' = \sum_{i=1}^{n} \tau_{ij}' \boldsymbol{e}_i, \quad j = 1, \cdots, n$$

と一意に表わされる．このとき $n \times n$ 行列として

(2.20) $$(\tau_{ij})^{-1} = (\tau_{ij}')$$

が成り立つ．(2.18), (2.19) を行列を用いて表わせば

(2.18)* $$(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{e}_1', \cdots, \boldsymbol{e}_n')(\tau_{ij})$$

および

(2.19)* $$(\boldsymbol{e}_1', \cdots, \boldsymbol{e}_n') = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)(\tau_{ij}')$$

である．いま

(2.21) $$\overrightarrow{O'O} = \sum_{i=1}^{n} \tau_i \boldsymbol{e}_i'$$

および

(2.22) $$\overrightarrow{OO'} = \sum_{i=1}^{n} \tau_i' \boldsymbol{e}_i$$

とする．そのとき $\Psi_{\Sigma_A}(P) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ より

$$P = O + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{e}_j = O' + \overrightarrow{O'O} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} \tau_{ij} \boldsymbol{e}_i' \right)$$

$$= O' + \sum_{i=1}^{n} (\tau_i + \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} \lambda_j) \boldsymbol{e}_i'$$

となる．一方 $\Psi_{\Sigma_A'}(P)=(\lambda_1',\cdots,\lambda_n')$ より

$$P=O'+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i'\boldsymbol{e}_i'$$

であるから，上の式と比べて

$$\lambda_i'=\tau_i+\sum_{j=1}^{n}\tau_{ij}\lambda_j,\qquad i=1,\cdots,n \tag{2.23}$$

が成り立つ．全く同様に

$$\lambda_i=\tau_i'+\sum_{j=1}^{n}\tau_{ij}'\lambda_j',\qquad i=1,\cdots,n \tag{2.24}$$

も成り立つ．(2.23), (2.24)を行列を用いて表わせば

$$\begin{bmatrix}\lambda_1'\\ \vdots\\ \lambda_n'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tau_1\\ \vdots\\ \tau_n\end{bmatrix}+(\tau_{ij})\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{bmatrix} \tag{2.23*}$$

および

$$\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tau_1'\\ \vdots\\ \tau_n'\end{bmatrix}+(\tau_{ij}')\begin{bmatrix}\lambda_1'\\ \vdots\\ \lambda_n'\end{bmatrix} \tag{2.24*}$$

となる．

(2.23), (2.24)を用いれば，点 P の Σ_A に関する座標 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ を用いて表わされる性質は，直ちに点 P の Σ_A' に関する座標 $(\lambda_1',\cdots,\lambda_n')$ について書き改めることができる．

§2.3 アフィン部分空間

a) 部分空間の定義

アフィン空間 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{V}^n)$ のアフィン部分空間の定義を与えよう．

(VII) n 次元アフィン空間 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{V}^n)$ において，1点 $P_0\in\boldsymbol{X}$ と，$\boldsymbol{V}^n$ の r 次元部分ベクトル空間 $\boldsymbol{W}^r$ をとるとき

$$\boldsymbol{Y}=P_0+\boldsymbol{W}^r=\{P_0+\boldsymbol{a}\mid \boldsymbol{a}\in\boldsymbol{W}^r\} \tag{2.25}$$

とおくと，

$$(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{W}^r)$$

は r 次元アフィン空間を作る．

証明　公理 2.1*: 任意の $P \in \boldsymbol{Y}$ は，$P=P_0+\boldsymbol{a}$ $(\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{W}^r)$ と表わされる．したがって，任意の $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{W}^r$ に対して，$P+\boldsymbol{b}=(P_0+\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}=P_0+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \in P_0+\boldsymbol{W}^r=\boldsymbol{Y}$ となる．

公理 2.2*: 任意に $P, Q \in \boldsymbol{Y}$ をとるとき，$P=P_0+\boldsymbol{a}$, $Q=P_0+\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{W}^r)$ と表わされる．したがって

$$Q = P+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) \qquad (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{W}^r)$$

と表わされる．

公理 2.3*: $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ ですでに成り立っているので，同じことは $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{W}^r)$ でも成り立つ．▌

(VII) の $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{W}^r)$ をアフィン空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ のアフィン部分空間というのであるが，これを一般的立場で定義しよう．

定義 2.4　二つのアフィン空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ と $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{W}^r)$ とにおいて，次の (i), (ii), (iii) が成り立つとき，$(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{W}^r)$ を $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ の**アフィン部分空間**という：

(i)　$\boldsymbol{Y} \subseteqq \boldsymbol{X}$　(部分集合),

(ii)　$\boldsymbol{W}^r \subseteqq \boldsymbol{V}^n$　(部分ベクトル空間),

(iii)　$P \in \boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{W}^r$ のとき，$(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{W}^r)$ において

$$Q = P+\boldsymbol{a}$$

が定まるが，同じく $P \in \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}^n$ とみて $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ において

$$Q' = P+\boldsymbol{a}$$

を定義するとき

$$Q = Q'$$

となる．

注意　集合論的表現を用いると，$(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{W}^r)$ が $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ のアフィン部分空間であるとは，**埋め込み写像**

$$\iota_Y\colon \boldsymbol{Y} \longrightarrow \boldsymbol{X} \qquad (\iota_Y(P)=P,\ \ P \in \boldsymbol{Y})$$
$$\iota_W\colon \boldsymbol{W}^r \longrightarrow \boldsymbol{V}^n \qquad (\iota_W(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a},\ \ \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{W}^r)$$

に対して，

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{Y}\times\boldsymbol{W}^r & \xrightarrow{F} & \boldsymbol{Y} \\ {\scriptstyle \iota_Y\times\iota_W}\big\downarrow & \circlearrowright & \big\downarrow{\scriptstyle \iota_Y} \\ \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{V}^n & \xrightarrow{F} & \boldsymbol{X} \end{array}$$

が可換図式となることをいう．すなわち $P \in \boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{W}^r$ に対して

$$\begin{array}{ccc} (P, \boldsymbol{a}) & \longmapsto & P+\boldsymbol{a} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\iota_{\boldsymbol{Y}}(P), \iota_{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{a})) & \longmapsto & \iota_{\boldsymbol{Y}}(P)+\iota_{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{a}) = \iota_{\boldsymbol{Y}}(P+\boldsymbol{a}) \end{array}$$

が成り立つことをいう．

特に n 次元アフィン空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ の1次元アフィン部分空間を $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ 上の**アフィン直線**または単に直線，2次元アフィン部分空間を**アフィン平面**または単に平面，…，$n-1$ 次元アフィン部分空間を**アフィン超平面**(affine hyperplane)または単に超平面という．

(VIII)　(VII)で定義されたアフィン空間 $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{W}^r)$ は，アフィン空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ のアフィン部分空間である．

逆に，n 次元アフィン空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ の r 次元アフィン部分空間 $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{W}^r)$ は，任意の $P_0 \in \boldsymbol{Y}$ に対して

$$\boldsymbol{Y} = P_0 + \boldsymbol{W}^r$$

と(VII)の形に表わされる．

証明　(VII)と上の定義とを比べて見れば明らかである．▌

例 2.3　n 次元アフィン空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ 上のアフィン直線 $(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{W}^1)$ は，任意の $\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{W}^1$ $(\boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0})$ と任意の $P_0 \in \boldsymbol{L}$ とに対して

$$\boldsymbol{W}^1 = \{\lambda \boldsymbol{e} \mid \lambda \in \boldsymbol{R}\} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{e},$$
$$\boldsymbol{L} = \{P_0 + \lambda \boldsymbol{e} \mid \lambda \in \boldsymbol{R}\} = P_0 + \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}$$

と表わされる．

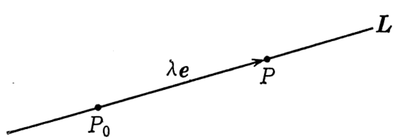


図 2.5

(IX)　n 次元アフィン空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ の r 次元部分空間 $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{W}^r)$ で $n=r$ であれば，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{V}^n=\boldsymbol{W}^r$，すなわち部分空間 $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{W}^r)$ は $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ と一致する．

また $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ の二つの部分空間 $(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{W}_1)$, $(\boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{W}_2)$ で

$$\boldsymbol{Y}_1 \subseteqq \boldsymbol{Y}_2 \quad かつ \quad \dim \boldsymbol{W}_1 = \dim \boldsymbol{W}_2$$

であれば，$(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{W}_1)=(\boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{W}_2)$ となる．

証明 前半：$\boldsymbol{W}^r \subseteqq \boldsymbol{V}^n$，$\dim \boldsymbol{W}=\dim \boldsymbol{V}$ であれば $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{V}$ となる．よって点 O を $\boldsymbol{Y}$ の中からとれば

$$\boldsymbol{X} = \{O+\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}\} = \boldsymbol{Y} = \{O+\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{W}\}$$

となる．後半も同様である．▌

次に二つのアフィン部分空間の平行性について考えよう．

b) 平行性

定義 2.5 n 次元アフィン空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ の二つの r 次元アフィン部分空間 $(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{W}_1{}^r)$ と $(\boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{W}_2{}^r)$ とが**平行**(parallel)であるとは

$$\boldsymbol{W}_1{}^r = \boldsymbol{W}_2{}^r$$

であることをいう．ただし $1 \leqq r \leqq n$ とする．記号で

$$(2.26) \qquad (\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{W}_1{}^r) \,/\!\!/\, (\boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{W}_2{}^r)$$

と書く．

(X) n 次元アフィン空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ の二つの r 次元アフィン部分空間 $(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{W}_1{}^r)$，$(\boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{W}_2{}^r)$ において $(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{W}_1{}^r) /\!\!/ (\boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{W}_2{}^r)$ であれば

(i) $\boldsymbol{Y}_1 = \boldsymbol{Y}_2$,

または

(ii) $\boldsymbol{Y}_1 \cap \boldsymbol{Y}_2 = \phi$

のいずれかである．(ii)の場合には，$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ の或る $r+1$ 次元の部分空間 $(\boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{W}_3{}^{r+1})$ があって

$$(\boldsymbol{Y}_i, \boldsymbol{W}_i{}^r) \subseteqq (\boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{W}_3{}^{r+1}), \qquad i = 1, 2$$

となる．

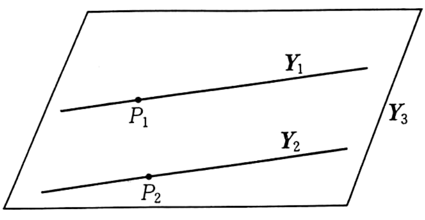


図 2・6

証明 $\boldsymbol{Y}_1 \cap \boldsymbol{Y}_2 \neq \phi$ とする．任意に1点 $P_0 \in \boldsymbol{Y}_1 \cap \boldsymbol{Y}_2$ をとると，

$$\boldsymbol{Y}_1 = P_0 + \boldsymbol{W}_1{}^r, \qquad \boldsymbol{Y}_2 = P_0 + \boldsymbol{W}_2{}^r$$

と表わされる．仮定より $\boldsymbol{W}_1{}^r=\boldsymbol{W}_2{}^r$ であるから，$\boldsymbol{Y}_1=\boldsymbol{Y}_2$ となる．

また $\boldsymbol{Y}_1\cap\boldsymbol{Y}_2=\phi$ のとき，$P_i\in\boldsymbol{Y}_i\,(i=1,2)$ を任意にとり

$$\boldsymbol{W}_3=\boldsymbol{R}\overrightarrow{P_1P_2}+\boldsymbol{W}_1{}^r$$

とおく．$\overrightarrow{P_1P_2}\notin\boldsymbol{W}_1{}^r$ であるから，$\dim\boldsymbol{W}_3=1+\dim\boldsymbol{W}_1{}^r=r+1$ である．いま $\boldsymbol{Y}_3=P_1+\boldsymbol{W}_3$ とおくと，$(\boldsymbol{Y}_3,\boldsymbol{W}_3)$ は $r+1$ 次元部分空間で

$$\boldsymbol{Y}_1=P_1+\boldsymbol{W}_1{}^r\subseteqq P_1+\boldsymbol{W}_3=\boldsymbol{Y}_3,$$
$$\boldsymbol{Y}_2=P_2+\boldsymbol{W}_1{}^r=P_1+\overrightarrow{P_1P_2}+\boldsymbol{W}_1{}^r\subseteqq P_1+\boldsymbol{W}_3=\boldsymbol{Y}_3$$

が成り立つ．▌

定義 2.6　アフィン空間 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{V}^n)$ の二つのアフィン部分空間 $(\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{W}_1{}^r)$, $(\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{W}_2{}^s)$ で $r=\dim\boldsymbol{W}_1$, $s=\dim\boldsymbol{W}_2$ が等しくないとき（例えば $r<s$），$(\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{W}_1{}^r)$ と $(\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{W}_2{}^s)$ とが**広義の平行**であるとは

$$\boldsymbol{W}_1{}^r\subseteqq\boldsymbol{W}_2{}^s$$

の成り立つことをいう．

(XI)　$(\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{W}_1{}^r)$ と $(\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{W}_2{}^s)$ とが広義の平行で，$\dim\boldsymbol{W}_1<\dim\boldsymbol{W}_2$ とするとき

(i)　$\boldsymbol{Y}_1\subseteqq\boldsymbol{Y}_2$,

または

(ii)　$\boldsymbol{Y}_1\cap\boldsymbol{Y}_2=\phi$

である．(ii)の場合には，$(\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{W}_2{}^s)$ の少なくとも一つの r 次元部分空間 $(\boldsymbol{Y}_3,\boldsymbol{W}_3{}^r)$ があって，

$$(\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{W}_1{}^r)\,/\!/\,(\boldsymbol{Y}_3,\boldsymbol{W}_3{}^r)$$

となる．

証明は読者諸氏に譲る．

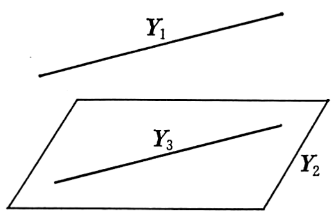


図 2.7

c) 部分空間の交わりと結び

次にアフィン空間 (X, V^n) の二つの部分空間の交わりおよび結びの定義を与えよう.

(XII) アフィン空間 (X, V^n) の二つのアフィン部分空間 $(Y_1, W_1{}^r)$ と $(Y_2, W_2{}^s)$ とに対して

(i) $Y_1 \cap Y_2 = \phi$,

または

(ii) $Y_1 \cap Y_2 \neq \phi$ のときは $(Y_1 \cap Y_2, W_1{}^r \cap W_2{}^s)$ は (X, V^n) のアフィン部分空間となる.

定義 2.7 $(Y_1 \cap Y_2, W_1{}^r \cap W_2{}^s)$ を $(Y_1, W_1{}^r)$ および $(Y_2, W_2{}^s)$ の**交わり** (meet) または**共通部分**といい, $(Y_1, W_1{}^r) \cap (Y_2, W_2{}^s)$ と記す.

証明 $Y_1 \cap Y_2 \neq \phi$ のとき, 任意に1点 $P_0 \in Y_1 \cap Y_2$ をとる. そのとき

$$Y_1 \cap Y_2 = \{P_0 + \boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a} \in W_1{}^r \cap W_2{}^s\} = P_0 + (W_1{}^r \cap W_2{}^s)$$

と表わされる. よって $(Y_1 \cap Y_2, W_1{}^r \cap W_2{}^s)$ は一つのアフィン部分空間となる. ▌

(XIII) アフィン空間 (X, V^n) の二つのアフィン部分空間 $(Y_1, W_1{}^r)$ と $(Y_2, W_2{}^s)$ とに対して, 両者を含む最小のアフィン部分空間 (Y_3, W_3) が定まる.

(i) $Y_1 \cap Y_2 \neq \phi$ のときは

$$W_3 = W_1{}^r + W_2{}^s,$$

$$\dim W_3 = \dim W_1{}^r + \dim W_2{}^s - \dim(W_1{}^r \cap W_2{}^s) \tag{2.27}$$

である.

(ii) $Y_1 \cap Y_2 = \phi$ のときは

$$W_3 = W_1{}^r + W_2{}^s + \boldsymbol{R}\boldsymbol{a},$$

$$\dim W_3 = \dim W_1{}^r + \dim W_2{}^s - \dim(W_1{}^r \cap W_2{}^s) + 1 \tag{2.28}$$

である. ただし, ベクトル $\boldsymbol{a}$ は, 任意の $O_i \in Y_i$ $(i=1, 2)$ に対して

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{O_1 O_2}$$

にとることができる.

定義 2.8 (Y_3, W_3) を $(Y_1, W_1{}^r)$ および $(Y_2, W_2{}^s)$ の**結び** (join) またはこれらの**張るアフィン部分空間**といい

$$(Y_3, W_3) = (Y_1, W_1{}^r) \vee (Y_2, W_2{}^s)$$

と記す.

証明　(i)　$Y_1 \cap Y_2 \neq \phi$ のときは，任意に $P_0 \in Y_1 \cap Y_2$ をとり，$\boldsymbol{W}_3 = \boldsymbol{W}_1{}^r + \boldsymbol{W}_2{}^s$ とおくとき，$Y_3 = P_0 + \boldsymbol{W}_3$ に対して $(Y_3, \boldsymbol{W}_3)$ が求めるアフィン部分空間である．

(ii)　$Y_1 \cap Y_2 = \phi$ のとき，$O_i \in Y_i$ $(i=1, 2)$ を任意にとり，$\boldsymbol{W}_3 = \boldsymbol{W}_1{}^r + \boldsymbol{W}_2{}^s + \boldsymbol{R}\overrightarrow{O_1O_2}$ とおき，$Y_3 = O_1 + \boldsymbol{W}_3$ ととれば，$(Y_3, \boldsymbol{W}_3)$ が求めるアフィン部分空間となる．

次元については，公式

$$\dim(\boldsymbol{W}_1{}^r + \boldsymbol{W}_2{}^s) = \dim \boldsymbol{W}_1{}^r + \dim \boldsymbol{W}_2{}^s - \dim(\boldsymbol{W}_1{}^r \cap \boldsymbol{W}_2{}^s)$$

より導かれる．▌

例 2.4　アフィン空間 $(X, \boldsymbol{V}^n)$ 上に $r+1$ 個の異なる点 $P_0, P_1, \cdots, P_r$ をとるとき，これらの点を含む最小のアフィン部分空間 $(Y, \boldsymbol{W})$ が定まる．これを $\{P_0, \cdots, P_r\}$ の張る部分空間という．一般に

$$\dim \boldsymbol{W} \leqq r$$

である．特に $\dim \boldsymbol{W} = r$ のとき，$P_0, \cdots, P_r$ は**一般の位置**にあるという．

[解]　$(X, \boldsymbol{V}^n)$ の1点は0次元部分空間である．よって(XIII)をくりかえし適用すれば $\dim \boldsymbol{W}$ は求められる．一般に

$$\boldsymbol{W} = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{R}\overrightarrow{P_0P_i}$$

として得られる．故に $\overrightarrow{P_0P_i}$ $(i=1, \cdots, r)$ が $\boldsymbol{V}^n$ において1次独立であれば，$\dim \boldsymbol{W} = r$ となるが，一般には $\dim \boldsymbol{W} \leqq r$ である．▌

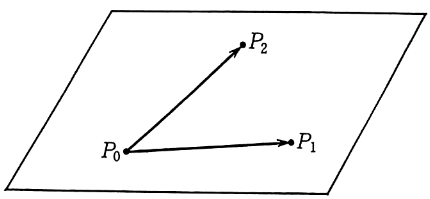


図 2.8

例 2.5　アフィン空間 $(X, \boldsymbol{V}^n)$ において，その上の同一直線上にない異なる4点 A, B, C, D をとるとき

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

であるための必要十分条件は

(i)　A, B, C, D は同一平面上にある，

となる．ここで

$$\boldsymbol{G}_A{}^n = \boldsymbol{G}_S{}^n \cdot \boldsymbol{G}_{SP}{}^n, \qquad \boldsymbol{G}_S{}^n \cap \boldsymbol{G}_{SP}{}^n = \boldsymbol{G}_E{}^n,$$

および同様なことが(3.41)についても成り立つ．

問　題

1　$\boldsymbol{V}_E{}^n$ の $n-1$ 次元部分空間 $\boldsymbol{W}_1{}^{n-1}$ が $n-1$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ で生成され，$\boldsymbol{W}_2{}^{n-1}$ が $n-1$ 個のベクトル $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_{n-1}$ で生成されるとき，$\boldsymbol{W}_1{}^{n-1}$ と $\boldsymbol{W}_2{}^{n-1}$ とのなす角の大きさ θ を，$\boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{W}_2$ に直交するベクトル $\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{b}_0$ のなす角として定義する．そのとき

$$\cos\theta = \frac{\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_{n-1}) \\ & \cdots\cdots & \\ (\boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{b}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{b}_{n-1}) \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_{n-1}) \\ & \cdots\cdots & \\ (\boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}_{n-1}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) & \cdots & (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_{n-1}) \\ & \cdots\cdots & \\ (\boldsymbol{b}_{n-1}, \boldsymbol{b}_1) & \cdots & (\boldsymbol{b}_{n-1}, \boldsymbol{b}_{n-1}) \end{vmatrix}}}$$

を示せ．

2　相似幾何および等積幾何の座標枠は，それぞれどのように定めればよいか．

3　3次元 Euclid 空間において，すべての平行四辺形の面積を不変に保つようなアフィン変換は，合同変換となる．

一般に n 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{E}^n$ において，一定の r $(2 \leqq r \leqq n-1)$ に対して，すべての平行 $2r$ 面体の r 次元体積を不変に保つようなアフィン変換は $\boldsymbol{E}^n$ の合同変換となる．

[追補]　Klein の考え方によれば，空間 $\boldsymbol{X}$ の変換群 $\boldsymbol{G}$ に対して，幾何 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{G})$ が定まる．(3.40) においては，$\boldsymbol{G}_A{}^n$ と $\boldsymbol{G}_E{}^n$ との中間に二つの変換群 $\boldsymbol{G}_S{}^n$ と $\boldsymbol{G}_{SP}{}^n$ とが存在して，それぞれ相似幾何と等積幾何とが得られた．そこで問題は，これら以外の新しい幾何はないかどうかということである．これを (3.41) に移せば，$\boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}_E{}^n)$ の部分群で，$\boldsymbol{O}(n)$ を含むものに，$\boldsymbol{SL}(\boldsymbol{V}_E{}^n)$ と $\boldsymbol{O}(n) \times \boldsymbol{R}^+$ の他のものが存在するかどうかということである．

いまアフィン空間 $\boldsymbol{V}_E{}^n$ の座標枠 Σ_A を一つ固定すれば，$n \times n$ 行列の作る群について，$\boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{R})$ と $\boldsymbol{O}(n)$ との間に入る行列群 $\boldsymbol{G}$ についての問題となる．ここで $\boldsymbol{G}$ について，(i) $\boldsymbol{G}$ は $\boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{R})$ の閉じた部分群であること，(ii) $\boldsymbol{G}$ は連結した部分群であること，を要請しよう．

$n \times n$ 行列 $A^{(m)} = (a_{ij}{}^{(m)})$ $(m=0, 1, \cdots)$，$A(t) = (a_{ij}(t))$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ と表わす．そのとき，(i) は $A^{(m)} \in \boldsymbol{G}$ $(m=1, 2, \cdots)$ かつ $\lim_{m\to\infty} A^{(m)} = A^{(0)}$，すなわち $\lim_{m\to\infty} a_{ij}{}^{(m)} = a_{ij}{}^{(0)}$ $(i, j=1, \cdots, n)$ であれば $A^{(0)} \in \boldsymbol{G}$ ということであり，(ii) は $A(0)$ かつ $A(1) \in \boldsymbol{G}$ であれば，適当な弧 $A(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ を $\boldsymbol{G}$ の中に求めることができるということを表わしている．

(i), (ii) の性質をもつ群 $\boldsymbol{G}$ を求めることは，(ここでは詳しい説明は省くが)，次の**線型**

Lie 代数 (Lie algebra) を求めることに帰着される．すなわち，$n\times n$ 行列 A, B に対して，それらの**括弧積**を $[A, B]=A\cdot B-B\cdot A$ で定義する．そのとき $n\times n$ 行列のある集合 $\mathfrak{g}$ が線型 Lie 代数であるとは

(1) $\mathfrak{g}$ は線型空間を作る：$A, B\in\mathfrak{g} \Longrightarrow rA+sB\in\mathfrak{g}$ (r, s は任意の実数),

(2) $A, B\in\mathfrak{g} \Longrightarrow [A, B]\in\mathfrak{g}$.

(IX) $n\times n$ 行列の作る (i), (ii) を満たす群 $\boldsymbol{G}$ に対して，或る線型 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が一意に対応して，$\boldsymbol{G}$ は $\exp(A)$ $(A\in\mathfrak{g})$ によって生成される．ただし任意の $n\times n$ 行列 A に対して

$$\exp(A)=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}A^m=E+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots$$

を表わす(E は単位行列)．この右辺はつねに収束する．

実際に $\mathfrak{g}$ は $\exp(tA)$ $(t\in\boldsymbol{R})$ がすべて $\boldsymbol{G}$ に属するような行列 A 全体の集合として定められる．

特に群 $\boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{R})$，$\boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{R})$，$\boldsymbol{O}(n)$，$\boldsymbol{R}^+$ に対応する線型 Lie 代数を $\mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{R})$，$\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{R})$，$\mathfrak{o}(n)$，$\mathfrak{r}(n)$ とすれば，$\mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{R})$ は $n\times n$ 行列の全体，$\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{R})$ は $\mathrm{tr}\,A=0$ の全体，$\mathfrak{o}(n)$ は交代行列 A $({}^tA=-A)$ の全体，$\mathfrak{r}(n)$ は対角行列 tE $(t\in\boldsymbol{R})$ の全体である．

(これらについては，例えば，山内恭彦・杉浦光夫：連続群論入門，培風館(1960)に説明がある．)

4 $n=2$ の場合に，$\mathfrak{gl}(2, \boldsymbol{R})$ に含まれ，かつ $\mathfrak{o}(2)$ を含む線型 Lie 代数は，$\mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{R})$ および $\mathfrak{o}(2)+\mathfrak{r}(2)$ しか存在しない．

[ヒント] $E_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $E_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$, $E_3=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, $E_4=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$

とおくとき，

$$\mathfrak{gl}(2, \boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}E_1+\boldsymbol{R}E_2+\boldsymbol{R}E_3+\boldsymbol{R}E_4,\qquad \mathfrak{r}(2)=\boldsymbol{R}E_1,$$
$$\mathfrak{o}(2)=\boldsymbol{R}E_4,\qquad \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}E_2+\boldsymbol{R}E_3+\boldsymbol{R}E_4$$

である．一方容易に計算されるように

$$[E_1, E_i]=0\quad(i=1, 2, 3, 4),\qquad [E_i, E_i]=0\quad(i=2, 3, 4),$$
$$[E_2, E_3]=2E_4,\qquad [E_2, E_4]=2E_3,\qquad [E_3, E_4]=-2E_2$$

となる．以上より $\boldsymbol{R}E_4$ を含む線型 Lie 代数は，$\mathfrak{gl}(2, \boldsymbol{R})$，$\mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{R})$，$\mathfrak{o}(2)+\mathfrak{r}(2)$ しかないことが確かめられる．

5 $n=3$ の場合に同様な考察を試みよ．

第4章　直線と平面の射影幾何

§4.1　射影直線の構成

a) アフィン直線から射影直線へ

一般に射影空間と称せられるものには，その次元に従って射影直線(1次元)，射影平面(2次元)，…，n 次元射影空間がある．今後 n 次元射影空間($n=1, 2, \cdots$)を記号

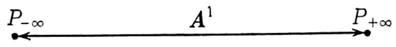
$$\boldsymbol{P}^n$$

で表わすことにする．

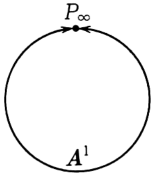
射影空間を構成する方法はいくつかある．§4.1および§4.4では，$n=1, 2$ の場合に，アフィン空間 $\boldsymbol{A}^n$ に無限遠要素をつけ加えることによって $\boldsymbol{P}^n$ を構成する方法を説明しよう．

まず簡単な場合から始めることとして，射影直線 $\boldsymbol{P}^1$ について考えよう．射影直線 $\boldsymbol{P}^1$ はアフィン直線 $\boldsymbol{A}^1$ に無限遠要素を添加して得られる．その際，(i) $\boldsymbol{A}^1$ は正および負の方向に開いているが(例えば $1, 2, \cdots, n, \cdots$ という点列および $(-1), (-2), \cdots$ という点列は発散する)，$\boldsymbol{P}^1$ は**閉じて**いるものとする．(すなわち，$\boldsymbol{P}^1$ に位相を考える場合には，$\boldsymbol{P}^1$ はコンパクトである．) (ii) $\boldsymbol{P}^1$ は**均質**(homogeneous)である，すなわち $\boldsymbol{P}^1$ の任意の2点 P, Q は $\boldsymbol{P}^1$ 内で同じ性質をもつ．(すなわち，$\boldsymbol{P}^1$ に位相を考えるとき，P, Q は同位相の近傍をもつ．)

(i)に対しては，(イ) $\boldsymbol{P}^1=\boldsymbol{A}^1\cup\{P_{+\infty}, P_{-\infty}\}$ とする場合と，(ロ) $\boldsymbol{P}^1=\boldsymbol{A}^1\cup\{P_\infty\}$



(イ)



(ロ)

図4・1

とする場合の二つが考えられる.

前者(イ)においては $\lim_{n\to\infty} n=P_{+\infty}$, $\lim_{n\to\infty}(-n)=P_{-\infty}$ であるが, 後者(ロ)では $\lim_{n\to\infty} n=\lim_{n\to\infty}(-n)=P_\infty$ と考えるのである.

(ii)に対しては, 図4.1から見るように, (イ)の場合には, $P_{+\infty}$ と $P_{-\infty}$ は $\boldsymbol{A}^1$ 上の点と同じ性質をもたないが, (ロ)の場合には, P_∞ も $\boldsymbol{A}^1$ 上の点も区別がない.

よって(ロ)の場合を採用して, $\boldsymbol{P}^1$ は $\boldsymbol{A}^1$ にただ1点 P_∞ を添加して

$$\boldsymbol{P}^1=\boldsymbol{A}^1\cup\{P_\infty\} \tag{4.1}$$

とおくことにする.

Klein 流の考え方によれば, $\boldsymbol{P}^1$ に固有な変換群 $\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{P}^1}$ が存在して, 次の性質をもつようにしたい.

(i)* $\boldsymbol{P}^1$ 上の任意の2点 P, Q に対して, $\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{P}^1}$ に属する変換 g で $g(P)=Q$ となるものが存在する.

(ii)* 点 P_∞ の固定群, すなわち $g(P_\infty)=P_\infty$ となる $g\in\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{P}^1}$ の全体は, $\boldsymbol{A}^1$ のアフィン変換群と一致する.

このような変換群 $\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{P}^1}$ が実際に存在することを示そう. いまアフィン直線 $\boldsymbol{A}^1$ のアフィン座標枠 $\Sigma_A=(O\,;\boldsymbol{e})$ を一つ定めることによって, $\boldsymbol{A}^1$ 上の点 P は Σ_A に関する座標 (x) $(x\in\boldsymbol{R})$ と1対1に対応する. この節では, 点 $P\in\boldsymbol{A}^1$ と $x\in\boldsymbol{R}$ とを同一視して, 単に点 x と呼ぼう. また点 P_∞ を記号化して単に ∞ で表わすことにする.

そのとき, $\boldsymbol{A}^1$ のアフィン変換 g は, 或る $a, b\in\boldsymbol{R}$ によって

$$g(x)=ax+b, \qquad a\neq 0 \tag{4.2}$$

と表わされる.

(I) (i) 射影直線 $\boldsymbol{P}^1$ の変換 g を, $a, b, c, d\in\boldsymbol{R}$ を定めて(ただし $ad-bc\neq 0$ とする)

$$g(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \qquad (x\in\boldsymbol{R}), \tag{4.3}$$

$$g(\infty)=\frac{a}{c} \tag{4.4}$$

で定義する. このような**1次分数変換**の全体を $\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{P}^1}$ とおくと, $\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{P}^1}$ は $\boldsymbol{P}^1$ 上の

変換群を作る．$G_P{}^1$ を P^1 の**射影変換群**という．

(ii)　$G_P{}^1$ は，2×2 行列で行列式が 0 でないものの全体 $GL(2, R)$ により

$$G_P{}^1 \cong GL(2, R)/Z^2 = PGL(2, R) \tag{4.5}$$

と表わされる．ただし

$$Z^2 = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \middle| a \in R,\ a \neq 0\right\} \tag{4.6}$$

とする．$GL(2, R)/Z^2 = PGL(2, R)$ を **2次一般射影線型群**という．

(iii)　$G_P{}^1$ は上記(i)*, (ii)* を満足する．

証明　(i)　まず1次分数変換(4.3), (4.4)が P^1 から P^1 への全単射となることを注意しておく．特に

$$c = 0 \quad \text{ならば} \quad g(\infty) = \infty,$$
$$c \neq 0 \quad \text{ならば} \quad g(\infty) = a/c, \quad g(-d/c) = \infty$$

である．

次に $G_P{}^1$ が P^1 上の変換群を作ることをみよう．

$$g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad h(x) = \frac{a'x+b'}{c'x+d'}$$

であれば，

$$g \circ h(x) = \frac{a''x+b''}{c''x+d''},$$

ここに a'', b'', c'', d'' は行列を用いて

$$\begin{bmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

と計算される．かつ $ad-bc \neq 0$, $a'd'-b'c' \neq 0$ より $a''d''-b''c'' \neq 0$ となる．したがって $g \circ h \in G_P{}^1$ となる．

特に $a=d=1$, $b=c=0$ の場合に(4.3), (4.4)の g は恒等写像となる．

また $g \in G_P{}^1$ に対して $h = g^{-1}$ は

$$h(x) = \frac{a'x+b'}{c'x+d'}, \qquad \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}$$

の形で与えられる．よって $g^{-1} \in G_P{}^1$ となる．

以上で1次分数変換の全体 $G_P{}^1$ は P^1 上の変換群を作ることがわかった．

(ii)　行列式が 0 とならない任意の 2×2 行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に1次分数変換 $g(x) =$

$\dfrac{ax+b}{cx+d}$ を対応させるとき，(4.7)ですでに確かめたように $\boldsymbol{GL}(2, \boldsymbol{R})$ から $\boldsymbol{G_P}^1$ の上への準同型写像が得られる．そのとき，1次分数変換 g が恒等写像となるのは，すべての x に対して

$$x = \frac{ax+b}{cx+d},$$

すなわち，$a=d$, $b=c=0$ の場合に限る．これは

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in \boldsymbol{Z}^2$$

の場合である．よって準同型定理より(4.5)となる．

(iii) (i)*: $\boldsymbol{G_P}^1$ が $\boldsymbol{P}^1$ 上で可移であることは，(イ)任意の $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$ に対して $g(x_1)=x_2$ となる $g \in \boldsymbol{G_P}^1$ の存在すること，および，(ロ)任意の $x_1 \in \boldsymbol{R}$ に対して $g(\infty)=x_1$ となる $g \in \boldsymbol{G_P}^1$ および $h(x_1)=\infty$ となる $h \in \boldsymbol{G_P}^1$ が存在することを示さねばならない．しかし

(イ)に対しては，例えば $g(x)=x+(x_2-x_1)$,

(ロ)に対しては，例えば $g(x)=\dfrac{1}{x}+x_1$, $h(x)=g^{-1}(x)=\dfrac{1}{x-x_1}$ をとればよい．

(ii)*: $g(\infty)=\infty$ となる条件は $c=0, a \neq 0$ である．よって $g(x)=\dfrac{a}{d}x+\dfrac{b}{d}$ と表わされる．これは $\boldsymbol{A}^1$ のアフィン変換である．▌

$\boldsymbol{G_P}^1$ において，点 ∞ の固定群は $\boldsymbol{G_A}^1$ であるから，$g(\infty)=a \in \boldsymbol{R}$ となる $g \in \boldsymbol{G_P}^1$ の全体は，その一つ g_a をとると，

$$g_a \circ \boldsymbol{G_A}^1$$

の全体となる．故に

$$\boldsymbol{G_P}^1 = \boldsymbol{G_A}^1 \cup (\bigcup_{a \in \boldsymbol{R}} g_a \circ \boldsymbol{G_A}^1) \tag{4.8}$$

と表わされる．また $g_0 \circ \boldsymbol{G_A}^1$ の中には

$$h(\infty) = 0, \qquad h(0) = \infty$$

となる h が必ず存在し，その一般形は

$$h(x) = \frac{a}{x}, \qquad a \neq 0 \tag{4.9}$$

である．いま特に

$$g_0(x) = \frac{1}{x} \tag{4.10}$$

とおくとき，g_a として，

$$\begin{cases} g_a(x) = \dfrac{1}{x}+a = h_a \circ g_0(x), \\ h_a(x) = x+a \end{cases}$$

にとることができる．これを(4.8)に代入すれば，$\boldsymbol{G}_P{}^1$ は $\boldsymbol{G}_A{}^1$ と g_0 とから生成されることがわかった．

b）射影変換群の特徴づけ

(I)において，(i)*, (ii)* をみたす $\boldsymbol{G}_P{}^1$ が存在することを実際に $\boldsymbol{G}_P{}^1$ を与えることによって証明したが，逆に $\boldsymbol{G}_P{}^1$ はこれ以外に存在しないことを証明しよう．ただし，$g \in \boldsymbol{G}_P{}^1$ の連続性は仮定する．

われわれは，(i)*, (ii)* をみたす変換群 $\boldsymbol{G}_P{}^1$ があったと仮定する．$g_0(0)=\infty$, $g_0(\infty)=0$ となる $g_0 \in \boldsymbol{G}_P{}^1$ を一つ定めて，$g_0(x)$ の関数形を求めよう．ただし，$g_0(x)$ は $x \neq 0$ で連続とする．

一般に $h(0)=\infty$, $h(\infty)=0$ となる $h \in \boldsymbol{G}_P{}^1$ はどのような形になるであろうか．

$$g_0{}^{-1}\circ h(0) = g_0{}^{-1}(\infty) = 0, \qquad g_0{}^{-1}\circ h(\infty) = g_0{}^{-1}(0) = \infty$$

であるから，(ii)* によって $g_0{}^{-1}\circ h \in \boldsymbol{G}_A{}^1$，かつ $g_0{}^{-1}\circ h$ は 0 を固定する．よってある $a \in \boldsymbol{R}$ $(a \neq 0)$ によって

(4.11) $$g_0{}^{-1}\circ h(x) = ax, \qquad \text{すなわち} \quad h(x) = g_0(ax)$$

となる．全く同様に $h\circ g_0{}^{-1}$ を考えると，ある $b \in \boldsymbol{R}$ $(b \neq 0)$ が定まって

(4.12) $$h\circ g_0{}^{-1}(x) = bx, \qquad \text{すなわち} \quad h(y) = bg_0(y)$$

となる．ただし $y=g_0{}^{-1}(x)$，したがって $x=g_0(y)$ とおいた．

(4.11)と(4.12)とを比べると，

(4.13) $$g_0(ax) = bg_0(x)$$

となる．ただし，まず $a \in \boldsymbol{R}$ $(a \neq 0)$ を定めると，(4.11)によって h が定まり，したがって $b \in \boldsymbol{R}$ $(b \neq 0)$ が a の関数として定まる．(4.13)で $x=1$ とおくと

$$g_0(a) = b\alpha, \qquad \alpha = g_0(1) \quad (\neq 0)$$

となる．故に $b=g_0(a)\cdot\alpha^{-1}$ を(4.13)に代入すれば

(4.14) $$g_0(ax) = \alpha^{-1}\cdot g_0(a)g_0(x)$$

となる．ここで $g_1(x)=\alpha^{-1}\cdot g_0(x)$ とおき，a の代りに y と書けば，(4.14)より

(4.15) $$g_1(xy) = g_1(x)g_1(y)$$

を得る．$x>0$ であれば，$g_1(x)=g_1(\sqrt{x})^2>0$ である．(4.15)に $x=e^s$, $y=e^t$ を代入し，$g_2(s)=\log g_1(e^s)$ とおけば，(4.15)の両辺の log をとることにより

(4.16) $$g_2(s+t) = g_2(s)+g_2(t)$$

となる．$g_2(s)$ は s の連続関数であると仮定すれば，ある定数 $\beta \in \boldsymbol{R}$ によって

$$g_2(s) = \beta s$$

と表わされる．したがって

$$g_1(x) = \exp(\beta \log x) = x^\beta$$

となり，

$$g_0(x) = \alpha x^\beta \tag{4.17}$$

となることがわかった．$g_0 \circ g_0 \in \boldsymbol{G}_P{}^1$ を考えると，0 と ∞ とを固定するから，$g_0{}^{-1} \circ h$ のときと同様に

$$g_0 \circ g_0(x) = cx, \qquad c \neq 0$$

となる．(4.17) をここに代入すれば

$$cx = g_0(\alpha x^\beta) = \alpha(\alpha x^\beta)^\beta = \alpha^{1+\beta} x^{\beta^2}$$

となる．すなわち

$$c = \alpha^{1+\beta}, \qquad \beta^2 = 1$$

でなければならない．もしも $\beta=1$ とすれば，$g_0(0)=\infty$ という仮定に矛盾する．故に $\beta=-1$, $c=1$ となり，

$$g_0(x) = \frac{\alpha}{x}, \qquad \alpha \neq 0 \tag{4.18}$$

となり，(4.10) または (4.9) が確かめられた．

§4.2　射影直線の斉次座標

a）斉次座標

以上の取り扱いにおいて，点 P_∞ の取り扱いが，若干便宜的であった．また点 ∞ は他の点 $a \in \boldsymbol{R}$ とは特別の扱いをうけてきた．これらの点を極めて都合よく扱うことができる．それは斉次座標を用いればよい．すなわち

$$\boldsymbol{P}^1 = \boldsymbol{A}^1 \cup \{P_\infty\}$$

において，点 P の**斉次座標**（または**同次座標**）が (ξ_0, ξ_1)（ただし $(\xi_0, \xi_1) \neq (0, 0)$）であるとは

（i）　$\xi_0=0$ のときは $\xi_1 \neq 0$ であって $P=P_\infty$,

（ii）　$\xi_0 \neq 0$ のときは P は $x=\xi_1/\xi_0$ を座標とする $\boldsymbol{A}^1$ の点

とする．これを $P=(\xi_0, \xi_1)$ または $P(\xi_0, \xi_1)$ と書く．

この表示において，点 P の斉次座標として

$$P(\xi_0, \xi_1) = P(\xi_0{}', \xi_1{}')$$

であるためには，或る $\lambda \neq 0$ に対して $\xi_0{}'=\lambda\xi_0$, $\xi_1{}'=\lambda\xi_1$ となることが必要十分である．すなわち

$$P(\xi_0, \xi_1) = P(\lambda\xi_0, \lambda\xi_1), \qquad \lambda \neq 0 \tag{4.19}$$

である．以上をもう一度書いて

$$\text{(4.20)} \qquad \boldsymbol{P}^1 = \{P(\xi_0, \xi_1) \mid (\xi_0, \xi_1) \neq (0, 0)\},$$

ただし(4.19)とする．ここで

$$\boldsymbol{P}^1 \supseteqq \boldsymbol{A}^1 = \{P(\xi_0, \xi_1) \mid \xi_0 \neq 0\},$$

$$\boldsymbol{P}^1 \ni P_\infty = \{P(0, \xi_1) \mid \xi_1 \neq 0\},$$

したがって $\boldsymbol{P}^1 = \boldsymbol{A}^1 \cup \{P_\infty\}$ である．このように扱えば，P_∞ も $\boldsymbol{A}^1$ の点とまったく平等に表わされたことになる．

次に斉次座標を用いて射影変換 $f \in \boldsymbol{G_P}^1$ を表わしてみよう．いま $f: \boldsymbol{P}^1 \to \boldsymbol{P}^1$ を，$\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{10}, \alpha_{11} \in \boldsymbol{R}$ を定めて

$$f(P(\xi_0, \xi_1)) = P(\eta_0, \eta_1),$$

$$\text{(4.21)} \qquad \begin{cases} \eta_0 = \alpha_{00}\xi_0 + \alpha_{01}\xi_1, \\ \eta_1 = \alpha_{10}\xi_0 + \alpha_{11}\xi_1, \end{cases} \qquad \alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{10}\alpha_{01} \neq 0$$

によって定義する．この定義が意味をもつには

$$P(\xi_0, \xi_1) = P(\lambda\xi_0, \lambda\xi_1)$$

に対して $f(P(\xi_0, \xi_1)) = f(P(\lambda\xi_0, \lambda\xi_1))$ でなければならない．これは(4.21)において，ξ_0, ξ_1 の代りに $\lambda\xi_0, \lambda\xi_1$ とおけば，左辺は $\lambda\eta_0, \lambda\eta_1$ となり，(4.21)は確かに $\boldsymbol{P}^1$ から $\boldsymbol{P}^1$ への写像を定義する．

この f に対して，$\xi_0 \neq 0$ であれば $x = \xi_1/\xi_0 \in \boldsymbol{R}$ は

$$f(x) = \frac{\alpha_{01}x + \alpha_{00}}{\alpha_{11}x + \alpha_{10}}, \qquad \alpha_{01}\alpha_{10} - \alpha_{00}\alpha_{11} \neq 0,$$

$\xi_0 = 0$ に対して

$$f(\infty) = \frac{\alpha_{01}}{\alpha_{11}}$$

となる．これは(4.3), (4.4)で定義した射影変換の式と一致する．よって

(II) $\boldsymbol{P}^1$ の斉次座標を用いれば，射影変換

$$f(P(\xi_0, \xi_1)) = P(\eta_0, \eta_1)$$

は

$$\begin{bmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{bmatrix}, \qquad \det \begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{bmatrix} \neq 0$$

によって表わされる．

ここで2×2行列$(\alpha_{ij})\in \boldsymbol{GL}(2,\boldsymbol{R})$と$(\beta_{ij})\in \boldsymbol{GL}(2,\boldsymbol{R})$に対応する射影変換が等しいためには，或る$\lambda\neq 0$があって

$$(\alpha_{ij})=\lambda(\beta_{ij})$$

となることが必要かつ十分である．したがって

$$\boldsymbol{G_P}^1\cong \boldsymbol{GL}(2,\boldsymbol{R})/\boldsymbol{Z}^2=\boldsymbol{PGL}(2,\boldsymbol{R}).$$

b）射影変換群の自由度

$\boldsymbol{P}^1$の射影変換群の自由度をしらべてみよう．

(III)　$\boldsymbol{P}^1$上の任意の異なる3点(A,B,C)を，任意の異なる3点(A',B',C')にうつす射影変換$f\in \boldsymbol{G_P}^1$が必ず存在し，しかもただ一つに限る．特に異なる3点を固定する射影変換は恒等写像である．

証明　(i)　存在：(A,B,C)が特定の(A_0,B_0,C_0)；$A_0=P(0,1)$, $B_0=P(1,1)$, $C_0=P(1,0)$の場合に求めるfが存在することをいえば十分である．何故ならば

$$f:\ (A_0,B_0,C_0)\longrightarrow (A,B,C),$$
$$g:\ (A_0,B_0,C_0)\longrightarrow (A',B',C')$$

であれば

$$g\circ f^{-1}:\ (A,B,C)\longrightarrow (A',B',C')$$

となるからである．

さて与えられた$A'=P(\xi_0,\xi_1)$，$B'=P(\eta_0,\eta_1)$，$C'=P(\zeta_0,\zeta_1)$に対して，或る$\lambda\neq 0$, $\mu\neq 0$, $\nu\neq 0$によって

$$\begin{cases}\lambda\xi_0=\alpha_{00}0+\alpha_{01}1\\ \lambda\xi_1=\alpha_{10}0+\alpha_{11}1,\end{cases}\qquad \begin{cases}\mu\eta_0=\alpha_{00}1+\alpha_{01}1\\ \mu\eta_1=\alpha_{10}1+\alpha_{11}1,\end{cases}\qquad \begin{cases}\nu\zeta_0=\alpha_{00}1+\alpha_{01}0\\ \nu\zeta_1=\alpha_{10}1+\alpha_{11}0\end{cases}$$

が解けることを見ればよい．これは，まず

$$\begin{bmatrix}\alpha_{00}\\ \alpha_{10}\end{bmatrix}=\nu\begin{bmatrix}\zeta_0\\ \zeta_1\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}\alpha_{01}\\ \alpha_{11}\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}\xi_0\\ \xi_1\end{bmatrix}\tag{4.22}$$

とおき，次に

$$\mu\begin{bmatrix}\eta_0\\ \eta_1\end{bmatrix}=\nu\begin{bmatrix}\zeta_0\\ \zeta_1\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}\xi_0\\ \xi_1\end{bmatrix}\tag{4.23}$$

であるようにλ,μ,νを求めればよい．仮定により，A',B',C'は異なる3点であるので，特に$A'\neq C'$である．これから$\begin{bmatrix}\zeta_0\\ \zeta_1\end{bmatrix}$と$\begin{bmatrix}\xi_0\\ \xi_1\end{bmatrix}$とは1次独立なベクトルとなり，(4.23)は必ず或るλ,μ,νによって解くことができる．しかも$A'\neq B'$, C'

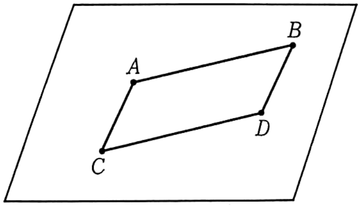


図 2・9

(ii) $AB \parallel CD$, $AC \parallel BD$

の両者の成り立つことである.

d) 座標による定義

次に n 次元アフィン空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ のアフィン部分空間と，座標枠 $\Sigma_A=(O;\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ に関する座標との関係をしらべてみよう.

(XIV) n 次元アフィン空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ の一つの r 次元アフィン部分空間 $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{W}^r)$ をとる. いま $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ の座標枠 $\Sigma_A=(O;\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ を定めておく. そのとき，$(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{W}^r)$ に対して $(x_1, \cdots, x_n)$ を未知数とする或る連立1次方程式

$$
(2.29) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 \quad + \cdots + a_{1n}x_n \quad = b_1 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ a_{n-r,1}x_1 + \cdots + a_{n-r,n}x_n = b_{n-r} \end{cases}
$$

(ただし，$a_{ij}, b_i \in \boldsymbol{R}$) を定めて，点 P がアフィン部分空間 $\boldsymbol{Y}$ に属するための必要十分条件は，点 P の Σ_A に関する座標 $\Psi_{\Sigma_A}(P)=(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ が，(2.29) の解となることとなるようにできる:

$$
(2.30) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_j = b_i, \qquad i=1, \cdots, n-r.
$$

証明 r 次元部分空間 $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{W}^r)$ を

$$
\boldsymbol{Y} = P_0 + \boldsymbol{W}^r \qquad (P_0 \in \boldsymbol{Y})
$$

と表わす. n 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{V}^n$ の基底 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ に対して，r 次元部分ベクトル空間 $\boldsymbol{W}^r$ の基底 $(\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_r)$ を

$$
(2.31) \qquad \boldsymbol{f}_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ji}\boldsymbol{e}_j, \qquad i=1, \cdots, r
$$

とする. ベクトル空間の一般論によって，或る $n-r$ 個の1次独立な行ベクトル

$$
(a_{k1}, \cdots, a_{kn}), \qquad k=1, \cdots, n-r
$$

が存在して，$(\mu_{1i}, \cdots, \mu_{ni})$ $(i=1, \cdots, r)$ は同次連立1次方程式

(2.32) $$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = 0, \quad k = 1, \cdots, n-r$$

の1次独立な解となる：

(2.33) $$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\mu_{ji} = 0, \quad i = 1, \cdots, r.$$

すなわち，同次連立1次方程式(2.32)の一般解 $(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ は，任意の $\xi_1, \cdots, \xi_r \in \boldsymbol{R}$ に対して

(2.34) $$\mu_j = \sum_{i=1}^{r} \xi_i \mu_{ji}, \quad j = 1, \cdots, n$$

と表わされる．さて $\Psi_{\Sigma_A}(P_0) = (\lambda_1{}^0, \cdots, \lambda_n{}^0)$ として

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_j{}^0, \quad i = 1, \cdots, n-r$$

とおくと，非同次連立1次方程式(2.29)の一般解 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ は(2.29)の特殊解 $(\lambda_1{}^0, \cdots, \lambda_n{}^0)$ と，同次連立1次方程式(2.32)の一般解の和として

$$\lambda_j = \lambda_j{}^0 + \sum_{i=1}^{r} \xi_i \mu_{ji}, \quad j = 1, \cdots, n$$

と表わされる．すなわち

$$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \Psi_{\Sigma_A}(P),$$

$$P = P_0 + \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{r} \xi_i \boldsymbol{f}_i \in \boldsymbol{W}^r$$

となる．よって点 P が $\boldsymbol{Y} = P_0 + \boldsymbol{W}^r$ に属するための必要十分条件は $\Psi_{\Sigma_A}(P) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ が連立1次方程式(2.29)の解となることである．▌

(XV) n 次元アフィン空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ の座標枠 Σ_A を一つ定めておく．そのとき任意の連立1次方程式

(2.35) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \cdots, n-r$$

を与えるとき，係数の行列 (a_{ij}) の階数がちょうど $n-r$ であるとすると(いいかえると $n-r$ 個の行ベクトル $(a_{k1}, \cdots, a_{kn})$ $(k=1, \cdots, n-r)$ が1次独立であれば)，(2.35)の解 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ を座標とする点 P の全体は，$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ の r 次元部分アフィン空間を作る．

証明　(2.35)の一般解は，その一つの特殊解$(\lambda_1{}^0, \cdots, \lambda_n{}^0)$と，右辺をすべて0とした同次連立1次方程式(2.32)の一般解$(\mu_1, \cdots, \mu_n)$との和として表わされる．(2.32)の一般解$(\mu_1, \cdots, \mu_n)$は，そのr個の1次独立な解

$$(\mu_{1i}, \cdots, \mu_{ni}), \qquad i=1, \cdots, r$$

の1次結合として(2.34)の形に表わされる．よって$\boldsymbol{f}_i$を(2.31)で定義し，r次元ベクトル空間$\boldsymbol{W}^r$を$\boldsymbol{W}^r=\sum_{i=1}^{r}\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}_i$とおき，$\Psi_{\Sigma_A}(P_0)=(\lambda_1{}^0, \cdots, \lambda_n{}^0)$とおけば$\boldsymbol{Y}=P_0+\boldsymbol{W}^r$に対して$(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{W}^r)$は，求める$r$次元アフィン部分空間となる．▌

例 2.6　n次元アフィン空間$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$の任意の$r$次元アフィン部分空間$(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{W}^r)$は，適当に$n-r$個のアフィン超平面$(\boldsymbol{H}_i, \boldsymbol{U}_i{}^{n-1})$ $(i=1, \cdots, n-r)$をとれば，それらの交わりとして表わされる：

(2.36)　$(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{W}^r)=(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{U}_1{}^{n-1})\cap(\boldsymbol{H}_2, \boldsymbol{U}_2{}^{n-1})\cap\cdots\cap(\boldsymbol{H}_{n-r}, \boldsymbol{U}_{n-r}{}^{n-1})$.

($n=3$, $r=1$の場合)

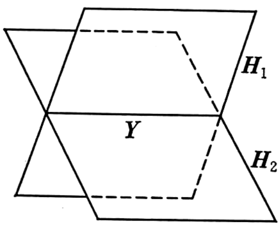


図 2・10

［解］　$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$の座標枠$\Sigma_A$を一つ定めて$\boldsymbol{Y}=\{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\}$を連立1次方程式(2.29)の解全体の集合として表わすことができた．そこで

$$\boldsymbol{H}_k=\{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \mid \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\lambda_j=b_k\}, \qquad k=1, \cdots, n-r$$

とおくと，(XV)によって$\boldsymbol{H}_k$は$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$のアフィン超平面を表わす．かつ

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{H}_1\cap\cdots\cap\boldsymbol{H}_{n-r}$$

と表わされている．これから(2.36)が導かれる．▌

ここで，次のことを注意しよう．アフィン空間$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$の$r$次元アフィン部分空間$(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{W}^r)$とアフィン超平面$(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{U}^{n-1})$とに対して，$\boldsymbol{Y}\cap\boldsymbol{H}\neq\phi$としよう．そのとき

$$\begin{aligned}\dim(\boldsymbol{W}^r\cap\boldsymbol{U}^{n-1}) &= \dim\boldsymbol{W}^r+\dim\boldsymbol{U}^{n-1}-\dim(\boldsymbol{W}^r+\boldsymbol{U}^{n-1})\\ &= r+(n-1)-\dim(\boldsymbol{W}^r+\boldsymbol{U}^{n-1})\end{aligned}$$

より

(i)　$\boldsymbol{W}^r+\boldsymbol{U}^{n-1}=\boldsymbol{V}^n \Leftrightarrow \dim(\boldsymbol{W}^r\cap\boldsymbol{U}^{n-1})=r-1$,

(ii)　$\boldsymbol{W}^r+\boldsymbol{U}^{n-1}=\boldsymbol{U}^{n-1} \Leftrightarrow \boldsymbol{W}^r\subseteqq\boldsymbol{U}^{n-1} \Leftrightarrow \dim(\boldsymbol{W}^r\cap\boldsymbol{U}^{n-1})=r$

となる．すなわち

(i)　$\boldsymbol{Y}\subseteqq\boldsymbol{H} \Longrightarrow (\boldsymbol{Y},\boldsymbol{W}^r)\cap(\boldsymbol{H},\boldsymbol{U}^{n-1})=(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{W}^r)$,

(ii)　$\boldsymbol{Y}\not\subseteqq\boldsymbol{H} \Longrightarrow (\boldsymbol{Y},\boldsymbol{W}^r)\cap(\boldsymbol{H},\boldsymbol{U}^{n-1})=(\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{W}_1)$,

$$\dim \boldsymbol{W}_1=r-1$$

となる．上の例では(2.36)の右辺で(ii)の場合が相ついで適用されて，$\dim \boldsymbol{W}=n-1-(n-r-1)=r$ となったのである．

§2.4　アフィン写像

a）アフィン写像の定義

Klein の Erlangen プログラムによれば，アフィン幾何にとって基本的な考えは，アフィン空間に作用するアフィン変換群である．そこで，まずアフィン写像の定義から始めよう．

定義 2.9　二つのアフィン空間$(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{V}_1{}^n)$と$(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{V}_2{}^m)$において(ただし$\dim \boldsymbol{V}_1=n$, $\dim \boldsymbol{V}_2=m$ は任意とする)，$(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{V}_1{}^n)$から$(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{V}_2{}^m)$への**アフィン写像**(affine mapping)とは

(i)　基礎集合の間の写像 $f:\boldsymbol{X}_1\to\boldsymbol{X}_2$,

(ii)　同伴ベクトル空間の間の線型写像 $\varphi:\boldsymbol{V}_1{}^n\to\boldsymbol{V}_2{}^m$

の組(f,φ)で，f と φ との間に等式

$$f(P_1+\boldsymbol{a}_1)=f(P_1)+\varphi(\boldsymbol{a}_1) \qquad (2.37)$$

が，任意の $P_1\in\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{a}_1\in\boldsymbol{V}_1{}^n$ に対して成り立つものをいう．

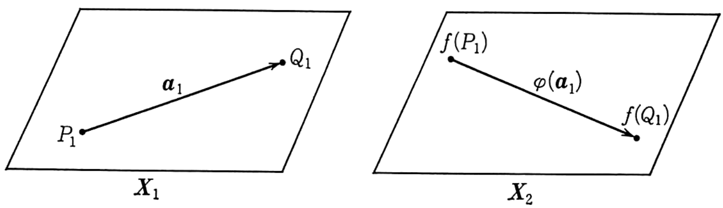


図 2.11

$$P_1+\boldsymbol{a}_1 = Q_1$$

とおくとき

$$\boldsymbol{a}_1 = \overrightarrow{P_1Q_1}$$

であるから，(2.37)を書きかえると

$$f(Q_1) = f(P_1)+\varphi(\overrightarrow{P_1Q_1}) \tag{2.38}$$

となる．さらに(2.38)を書きかえると

$$\overrightarrow{f(P_1)f(Q_1)} = \varphi(\overrightarrow{P_1Q_1}) \tag{2.39}$$

となる．以上(2.37)，(2.38)，(2.39)は互いに同値である．

注意　集合論的表現を用いると (f, φ) が $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{V}_1{}^n)$ から $(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{V}_2{}^m)$ へのアフィン写像であるとは

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{X}_1\times \boldsymbol{V}_1{}^n & \xrightarrow{F_1} & \boldsymbol{X}_1 \\ \downarrow{\scriptstyle f\times\varphi} & \circlearrowright & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \boldsymbol{X}_2\times \boldsymbol{V}_2{}^m & \xrightarrow{F_2} & \boldsymbol{X}_2 \end{array}$$

が可換図式となることである．すなわち，任意の $P_1\in\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{a}_1\in\boldsymbol{V}_1{}^n$ に対して

$$\begin{array}{ccc} (P_1, \boldsymbol{a}_1) & \longmapsto & P_1+\boldsymbol{a}_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (f(P_1), \varphi(\boldsymbol{a}_1)) & \longmapsto & f(P_1)+\varphi(\boldsymbol{a}_1) = f(P_1+\boldsymbol{a}_1) \end{array}$$

が成り立つことをいう．

なおアフィン部分空間 $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{W}^r)$ から $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ への埋め込み写像 $(\iota_{\boldsymbol{Y}}, \iota_{\boldsymbol{W}})$ はアフィン写像の特殊のものとなっていることを注意しておこう．

(XVI)　三つのアフィン空間 $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{V}_1{}^n)$，$(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{V}_2{}^m)$，$(\boldsymbol{X}_3, \boldsymbol{V}_3{}^l)$ において

(f, φ) は $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{V}_1{}^n)$ から $(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{V}_2{}^m)$ へのアフィン写像，

(f', φ') は $(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{V}_2{}^m)$ から $(\boldsymbol{X}_3, \boldsymbol{V}_3{}^l)$ へのアフィン写像

であれば

$(f'\circ f, \varphi'\circ\varphi)$ は $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{V}_1{}^n)$ から $(\boldsymbol{X}_3, \boldsymbol{V}_3{}^l)$ へのアフィン写像

となる：

$$(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{V}_1{}^n) \xrightarrow{(f,\varphi)} (\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{V}_2{}^m) \xrightarrow{(f',\varphi')} (\boldsymbol{X}_3, \boldsymbol{V}_3{}^l), \quad (\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{V}_1{}^n) \xrightarrow{(f'\circ f,\, \varphi'\circ\varphi)} (\boldsymbol{X}_3, \boldsymbol{V}_3{}^l)$$

証明はほとんど自明である．

(XVII)　二つのアフィン空間 $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{V}_1{}^n)$ と $(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{V}_2{}^m)$ とに対して

(i) X_1 の任意の1点 O_1 と X_2 の任意の1点 O_2,

(ii) V_1^n から V_2^m への任意の線型写像 φ

を与えるとき, $f: X_1 \to X_2$ で, 特に

$$f(O_1) = O_2$$

となるような (X_1, V_1^n) から (X_2, V_2^m) へのアフィン写像 (f, φ) がつねに存在し, かつただ一つ定まる.

証明 X_1 上の任意の点 P_1 は $P_1 = O_1 + \overrightarrow{O_1P_1}$ と表わされるので,

$$f(P_1) = O_2 + \varphi(\overrightarrow{O_1P_1}) \tag{2.40}$$

と定める. 特に $f(O_1) = O_2$ である. このように定義された写像 $f: X_1 \to X_2$ に対して, $P_1, Q_1 \in X_1$ をとるとき

$$\begin{aligned} f(Q_1) &= O_2 + \varphi(\overrightarrow{O_1Q_1}) = O_2 + \varphi(\overrightarrow{O_1P_1} + \overrightarrow{P_1Q_1}) \\ &= O_2 + \varphi(\overrightarrow{O_1P_1}) + \varphi(\overrightarrow{P_1Q_1}) = f(P_1) + \varphi(\overrightarrow{P_1Q_1}) \end{aligned}$$

が成り立つ. よって (f, φ) は (X_1, V_1^n) から (X_2, V_2^m) へのアフィン写像である.

逆に, このようなアフィン写像 (f, φ) があれば, (2.40)を満足しなくてはならない. よって f は O_1, O_2, φ によって一意に定まる. ▌

例 2.7 (XVII)によってアフィン写像 (f, φ) は (O_1, O_2, φ) によって一意に定まる. そこで, (O_1, O_2, φ) によって定まるアフィン写像 (f, φ) と (O_1', O_2', φ') によって定まるアフィン写像 (f', φ') とについて

$$(f, \varphi) = (f', \varphi')$$

であるための必要十分条件は

(i) $\varphi = \varphi'$,

(ii) $\varphi(\overrightarrow{O_1O_1'}) = \overrightarrow{O_2O_2'}$

である.

b) アフィン同型

定義 2.10 二つのアフィン空間 (X_1, V_1) と (X_2, V_2) とに対して, アフィン写像 (f, φ) が**アフィン同型写像**(affine isomorphic mapping)であるとは

(i) $f: X_1 \to X_2$ が全単射であり,

(ii) $\varphi: V_1 \to V_2$ が同型写像

であることをいう.

二つのアフィン空間 (X_1, V_1) と (X_2, V_2) とが**アフィン同型**であるとは, それ

らの間のアフィン同型写像 (f, φ) が存在することをいう．このとき

(2.41) $$(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{V}_1) \cong (\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{V}_2)$$

と表わす．

(f, φ) がアフィン同型写像であれば，逆写像 (f^{-1}, φ^{-1}) もアフィン同型であり，(XVI) において (f, φ) と (f', φ') とがアフィン同型写像であれば $(f' \circ f, \varphi' \circ \varphi)$ もアフィン同型写像となる．したがってアフィン同型の関係 $\cong$ は同値関係となる．

それでは，二つのアフィン空間 $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{V}_1)$ と $(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{V}_2)$ とがアフィン同型であるための必要十分条件は何であろうか．答は簡単である．

(XVIII) 二つのアフィン空間 $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{V}_1)$ と $(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{V}_2)$ とがアフィン同型であるための必要十分条件は

(2.42) $$\dim \boldsymbol{V}_1 = \dim \boldsymbol{V}_2$$

である．

証明 必要なこと：$(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{V}_1)$ から $(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{V}_2)$ へのアフィン同型写像 (f, φ) があれば，$\varphi: \boldsymbol{V}_1 \to \boldsymbol{V}_2$ は同型写像であり，したがって(2.42)となる．

十分なこと：(2.42)であれば $\boldsymbol{V}_1 \cong \boldsymbol{V}_2$，すなわち $\varphi: \boldsymbol{V}_1 \to \boldsymbol{V}_2$ という同型写像が存在する．したがって，($O_1 \in \boldsymbol{X}_1$, $O_2 \in \boldsymbol{X}_2$ を任意にとることによって)(XVII)によって (f, φ) という $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{V}_1)$ から $(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{V}_2)$ へのアフィン写像が存在することがわかる．ここで，φ が全単射であることから，f も全単射であることがわかる．▌

(XVIII)によって，アフィン空間全体を(2.41)の同値関係で類別すれば，各同型類はその次元によって定まる．すなわち(ベクトル空間と同様に)

0 次元アフィン空間 $\boldsymbol{A}^0$,　 1 次元アフィン空間 $\boldsymbol{A}^1$,　 $\cdots$,

n 次元アフィン空間 $\boldsymbol{A}^n$,　 $\cdots$

に分類される．われわれが単に $\boldsymbol{A}^n$ という記号を用いるのは，この事実による．

c) アフィン写像の特徴づけ

次に，アフィン写像を基礎集合の間の写像 f のみによって，φ を用いないで特徴づけることを考えよう．

(XIX) アフィン空間 $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{V}_1{}^n)$ と $(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{V}_2{}^m)$ とにおいて，基礎集合の間の写像

$$f: \boldsymbol{X}_1 \longrightarrow \boldsymbol{X}_2$$

が，$(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{V}_1{}^n)$ から $(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{V}_2{}^m)$ へのアフィン写像をひきおこすための必要十分条件は，$\boldsymbol{X}_1$ 上の 4 点 A_1, B_1, C_1, D_1 で，$(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{V}_1{}^n)$ 上で

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \lambda\overrightarrow{C_1D_1} \qquad (\lambda \in \boldsymbol{R}) \tag{2.43}$$

ならば，$(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{V}_2{}^m)$ 上で

$$\overrightarrow{f(A_1)f(B_1)} = \lambda\overrightarrow{f(C_1)f(D_1)} \tag{2.44}$$

が成り立つことである．

証明　必要なこと：写像 f がアフィン写像 (f,φ) を与えるならば，(2.39)によって

$$\overrightarrow{f(A_1)f(B_1)} = \varphi(\overrightarrow{A_1B_1}), \qquad \overrightarrow{f(C_1)f(D_1)} = \varphi(\overrightarrow{C_1D_1})$$

である．よって(2.43)の両辺に φ を作用させれば，φ は線型写像であるので

$$\varphi(\overrightarrow{A_1B_1}) = \varphi(\lambda\overrightarrow{C_1D_1}) = \lambda\varphi(\overrightarrow{C_1D_1}).$$

すなわち(2.44)となる．

十分なこと：いま(2.43)ならば(2.44)が成り立つことを仮定する．任意の $\boldsymbol{a}_1 \in \boldsymbol{V}_1{}^n$ に対して $\boldsymbol{a}_1=\overrightarrow{A_1B_1}$ と表わしたとき

$$\varphi(\boldsymbol{a}_1) = \overrightarrow{f(A_1)f(B_1)} \in \boldsymbol{V}_2{}^m \tag{2.45}$$

と定義する．このとき，$\boldsymbol{a}_1=\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{C_1D_1}$ であっても(2.44)によって $\varphi(\boldsymbol{a}_1)$ の値はかわらない．よって写像

$$\varphi:\ \boldsymbol{V}_1{}^n \longrightarrow \boldsymbol{V}_2{}^m$$

が定義された．次に，任意の $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1 \in \boldsymbol{V}_1{}^n$ に対して

$$\boldsymbol{a}_1 = \overrightarrow{A_1B_1}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \overrightarrow{B_1C_1}, \quad \text{したがって} \quad \boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1 = \overrightarrow{A_1C_1}$$

に点 $A_1, B_1, C_1 \in \boldsymbol{X}_1$ をとれば，(2.45)の定義によって

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{a}_1)+\varphi(\boldsymbol{b}_1) &= \overrightarrow{f(A_1)f(B_1)}+\overrightarrow{f(B_1)f(C_1)} \\ &= \overrightarrow{f(A_1)f(C_1)} = \varphi(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1)\end{aligned}$$

となる．同様に $\boldsymbol{a}_1 \in \boldsymbol{V}_1{}^n$ と $\lambda \in \boldsymbol{R}$ とに対して

$$\boldsymbol{a}_1 = \overrightarrow{A_1B_1}, \qquad \lambda\boldsymbol{a}_1 = \overrightarrow{A_1C_1}$$

にとれば，(2.44)によって $\lambda\overrightarrow{f(A_1)f(B_1)} = \overrightarrow{f(A_1)f(C_1)}$ となる．故に

$$\begin{aligned}\lambda\varphi(\boldsymbol{a}_1) = \lambda\varphi(\overrightarrow{A_1B_1}) &= \lambda\overrightarrow{f(A_1)f(B_1)} \\ &= \overrightarrow{f(A_1)f(C_1)} = \varphi(\lambda\boldsymbol{a}_1)\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって φ: $\boldsymbol{V}_1{}^n \to \boldsymbol{V}_2{}^m$ は線型写像となる．

次に，この (f,φ) がアフィン写像であることは，$(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{V}_1{}^n)$ において

$$A_1 = B_1+\boldsymbol{a}_1 \qquad (A_1, B_1 \in \boldsymbol{X}_1,\ \boldsymbol{a}_1 \in \boldsymbol{V}_1{}^n)$$

であれば，$\boldsymbol{a}_1=\overrightarrow{B_1A_1}$ であるから，$(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{V}_2{}^m)$ において

$$\begin{aligned} f(A_1) &= f(B_1)+\overrightarrow{f(B_1)f(A_1)} \\ &= f(B_1)+\varphi(\overrightarrow{B_1A_1}) = f(B_1)+\varphi(\boldsymbol{a}_1) \end{aligned}$$

が成り立つことよりわかる．▌

例 2.8　(XIX)において $f: \boldsymbol{X}_1\to\boldsymbol{X}_2$ がアフィン写像であるための必要十分条件は次の(i)および(ii)である：

(i)　f は $\boldsymbol{X}_1$ 上の直線 l を $\boldsymbol{X}_2$ 上の直線 $f(l)$ にうつす，

(ii)　l 上で $\overrightarrow{A_1B_1}=\lambda\overrightarrow{A_1C_1}$ であれば，$f(l)$ 上で $\overrightarrow{f(A_1)f(B_1)}=\lambda\overrightarrow{f(A_1)f(C_1)}$ となる．

例 2.9　(i)　アフィン空間 $\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ 上に二つの超平面 $(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{W}_1{}^{n-1})$, $(\boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{W}_2{}^{n-1})$ をとる．これらと交わる直線 l を定めるとき，$\boldsymbol{Y}_1$ 上の任意の点 P に対して，$\boldsymbol{Y}_2$ 上に点 Q をとり，$PQ/\!/l$ として

$$f(P) = Q$$

とおく．そのとき $f: \boldsymbol{Y}_1\to\boldsymbol{Y}_2$ は $(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{W}_1{}^{n-1})$ から $(\boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{W}_2{}^{n-1})$ へのアフィン同型写像を与える．

(ii)　特に $n=2$ の場合，図 2.13 において $\overrightarrow{AD}/\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AE}/\overrightarrow{EC}$ であるための必要十分条件は $DE/\!/BC$ となることである．

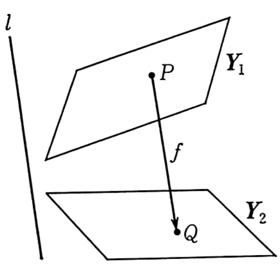


図 2・12

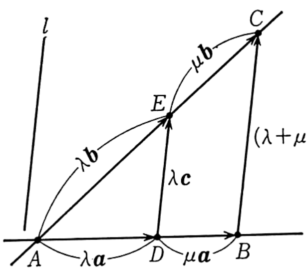


図 2・13

［解］　例 2.8 の条件(i), (ii)をためせばよい．(i)は§2.3 よりわかる．(ii)は $n=2$ の場合に確かめれば十分である．その証明は読者諸氏に譲る(図 2.13 を参照)．▌

例 2.10(Menelaus の定理)　アフィン平面上に 3 点 A, B, C をとり，3 直線 BC, CA, AB 上にそれぞれ点 P, Q, R をとるとき，3 点 P, Q, R が一直線上にあるた

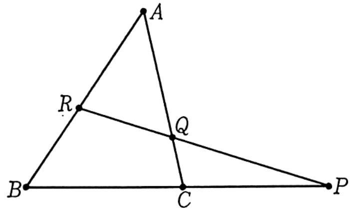


図 2.14

めの必要十分条件は

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=-1 \qquad (2.46)$$

となることである．

［解］　必要なこと：直線 PQR に平行に点 C より平行線をひいて AB との交点を D とする．そのとき例 2.9(ii) によって

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}=\frac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{RD}}, \qquad \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}=\frac{\overrightarrow{DR}}{\overrightarrow{RA}}$$

であり，(2.46)の左辺の値は -1 となる．十分なことの証明は，読者諸氏に譲る．∎

例 2.11 (Ceva の定理)　アフィン平面上の三角形 ABC の頂点 A, B, C をそれらの対辺またはその延長上の点 P, Q, R と結ぶ直線が 1 点 O で出会うかまたは平行であるための必要十分条件は

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=1 \qquad (2.47)$$

となることである．

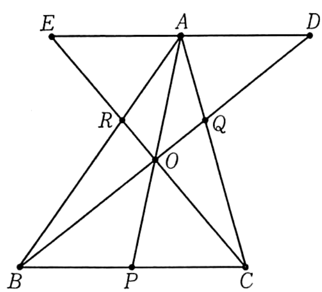


図 2.15

[解] 3直線 AP, BQ, CR が1点 O で交わるとする．そのとき頂点 A を通って BC に平行な直線を引き，BO, CO またはその延長との交点をそれぞれ D, E とする．例2.9(ii)によって

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}=\frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{AE}},\qquad \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}=\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AD}},\qquad \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=\frac{\overrightarrow{EA}}{\overrightarrow{BC}}$$

となるから，これらを辺々掛け合わせれば，(2.47)の左辺の値は1に等しい．3直線が平行な場合，および逆の証明については，読者諸氏に譲る．▌

d) アフィン写像と部分空間

アフィン写像がアフィン部分空間におよぼす作用についてしらべよう．

(XX) アフィン空間 $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{V}_1{}^n)$ からアフィン空間 $(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{V}_2{}^m)$ へのアフィン写像 (f, φ) があるとき，$(f(\boldsymbol{X}_1), \varphi(\boldsymbol{V}_1{}^n))$ は $(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{V}_2{}^m)$ のアフィン部分空間となる．一般に $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{V}_1{}^n)$ のアフィン部分空間 $(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{W}_1{}^r)$ に対して，$(f(\boldsymbol{Y}_1), \varphi(\boldsymbol{W}_1{}^r))$ も $(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{V}_2{}^m)$ のアフィン部分空間となる．$(f(\boldsymbol{Y}_1), \varphi(\boldsymbol{W}_1{}^r))$ を $(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{W}_1{}^r)$ のこのアフィン写像による**像**(image)という．

証明 $\boldsymbol{X}_1=O_1+\boldsymbol{V}_1{}^n$ とするとき

$$f(\boldsymbol{X}_1)=f(O_1)+\varphi(\boldsymbol{V}_1{}^n)$$

で，$\varphi(\boldsymbol{V}_1{}^n)$ は $\boldsymbol{V}_2{}^m$ の部分ベクトル空間である．故に(VII)によって $(f(\boldsymbol{X}_1), \varphi(\boldsymbol{V}_1{}^n))$ は $(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{V}_2{}^m)$ のアフィン部分空間となる．後半も同様である．▌

例 2.12 アフィン空間 $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{V}_1{}^n)$ からアフィン空間 $(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{V}_2{}^m)$ へのアフィン写像 (f, φ) が与えられている．そのとき $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{V}_1{}^n)$ の二つのアフィン部分空間 $(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{W}_1{}^r)$, $(\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{U}_1{}^s)$ に対して，それらの交わり $(\boldsymbol{Y}_1\cap \boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{W}_1{}^r\cap \boldsymbol{U}_1{}^s)=(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{W}_1{}^r)\cap(\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{U}_1{}^s)$ およびそれらの結び $(\boldsymbol{X}_1{}^*, \boldsymbol{V}_1{}^*)=(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{W}_1{}^r)\vee(\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{U}_1{}^s)$ を考える．これらの (f, φ) による像に対して

$$(f(\boldsymbol{Y}_1\cap \boldsymbol{Z}_1), \varphi(\boldsymbol{W}_1{}^r\cap \boldsymbol{U}_1{}^s))\subseteqq(f(\boldsymbol{Y}_1), \varphi(\boldsymbol{W}_1{}^r))\cap(f(\boldsymbol{Z}_1), \varphi(\boldsymbol{U}_1{}^s)),$$
$$(f(\boldsymbol{X}_1{}^*), \varphi(\boldsymbol{V}_1{}^*))=(f(\boldsymbol{Y}_1), \varphi(\boldsymbol{W}_1{}^r))\vee(f(\boldsymbol{Z}_1), \varphi(\boldsymbol{U}_1{}^s))$$

となる．

特に，$\boldsymbol{X}_1$ 中に点 $A_0, \cdots, A_r$ をとるとき，$\boldsymbol{X}_1$ 内でこれらの点の張るアフィン部分空間を $(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{W}_1{}^r)$ とし，$(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{V}_2{}^m)$ の中で $f(A_0), \cdots, f(A_r)$ の張る部分空間を $(\boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{W}_2{}^s)$ とすると

$$f(\boldsymbol{Y}_1)=\boldsymbol{Y}_2, \qquad \varphi(\boldsymbol{W}_1{}^r)=\boldsymbol{W}_2{}^s,$$

すなわち，$(\boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{W}_2{}^s)$ は $(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{W}_1{}^r)$ のアフィン写像 (f,φ) による像となる.

e）アフィン写像の座標による表現

さてアフィン写像を座標を用いて表わしてみよう.

(XXI) 二つのアフィン空間 $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{V}_1{}^n)$, $(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{V}_2{}^m)$ の座標枠をそれぞれ

$$\Sigma_A=(O_1\,;\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n), \qquad \Sigma_A{}'=(O_2\,;\boldsymbol{f}_1,\cdots,\boldsymbol{f}_m)$$

とする. $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{V}_1{}^n)$ から $(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{V}_2{}^m)$ へのアフィン写像 (f,φ) に対して

(2.48) $$\boldsymbol{f}_0=\overrightarrow{O_2f(O_1)}=\sum_{i=1}^m\alpha_i\boldsymbol{f}_i,$$

(2.49) $$\varphi(\boldsymbol{e}_j)=\sum_{i=1}^m\alpha_{ij}\boldsymbol{f}_i, \qquad j=1,\cdots,n$$

とする.

点 $P_1\in\boldsymbol{X}_1$ および $f(P_1)\in\boldsymbol{X}_2$ の $\Sigma_A, \Sigma_A{}'$ に関する座標をそれぞれ $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, $(\mu_1,\cdots,\mu_m)$ とすると

(2.50) $$\mu_i=\alpha_i+\sum_{j=1}^n\alpha_{ij}\lambda_j, \qquad i=1,\cdots,m$$

と表わされる.

逆に，$\Sigma_A, \Sigma_A{}'$ に関して，(2.48), (2.49)によって定まる写像 (f,φ) は $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{V}_1{}^n)$ から $(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{V}_2{}^m)$ へのアフィン写像となる.

証明 アフィン写像 (f,φ) に対して(2.48), (2.49)とする. そのとき

$$P_1=O_1+\sum_{j=1}^n\lambda_j\boldsymbol{e}_j$$

に対して

$$\begin{aligned}f(P_1)&=f(O_1)+\varphi\left(\sum_{j=1}^n\lambda_j\boldsymbol{e}_j\right)\\&=O_2+\overrightarrow{O_2f(O_1)}+\sum_{j=1}^n\lambda_j\left(\sum_{i=1}^m\alpha_{ij}\boldsymbol{f}_i\right)\\&=O_2+\sum_{i=1}^m\alpha_i\boldsymbol{f}_i+\sum_{i=1}^m\left(\sum_{j=1}^n\alpha_{ij}\lambda_j\right)\boldsymbol{f}_i\\&=O_2+\sum_{i=1}^m\mu_i\boldsymbol{f}_i\end{aligned}$$

である. したがって

$$\mu_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\lambda_j, \qquad i = 1, \cdots, m$$

となる.

逆に(2.48), (2.49)によって f および φ を定める. Σ_A に関して $P_1, Q_1 \in \boldsymbol{X}_1$ の座標を $\Psi_{\Sigma_A}(P_1) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, $\Psi_{\Sigma_A}(Q_1) = (\lambda_1', \cdots, \lambda_n')$ とするとき

$$\overrightarrow{P_1Q_1} = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j' - \lambda_j)\boldsymbol{e}_j$$

である. そのとき, Σ_A' に関して $\Psi_{\Sigma_A'}(f(P_1)) = (\mu_1, \cdots, \mu_m)$, $\Psi_{\Sigma_A'}(f(Q_1)) = (\mu_1', \cdots, \mu_m')$ とすると

$$\begin{aligned}
f(P_1) + \varphi(\overrightarrow{P_1Q_1}) &= \left(O_2 + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \boldsymbol{f}_i\right) + \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j' - \lambda_j)\varphi(\boldsymbol{e}_j) \\
&= O_2 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{f}_i + \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\lambda_j\right)\boldsymbol{f}_i + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} (\lambda_j' - \lambda_j)\alpha_{ij}\boldsymbol{f}_i \\
&= \left(O_2 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{f}_i\right) + \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j' \alpha_{ij}\right)\boldsymbol{f}_i \\
&= O_2 + \sum_{i=1}^{m} \mu_i' \boldsymbol{f}_i = f(Q_1)
\end{aligned}$$

となる. 故に (f, φ) はアフィン写像となる. ▌

(2.48), (2.49), (2.50)を行列を用いて表現すれば

(2.48)* $$\overrightarrow{O_2 f(O_1)} = (\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_m)\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix},$$

(2.49)* $$\varphi(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_m)\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ & \cdots\cdots & \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix},$$

(2.50)* $$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ & \cdots\cdots & \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

となる. (2.50)* をさらに書き直すと $(m+1) \times (n+1)$ 行列を用いて

(2.51) $$\begin{bmatrix} 1 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \cdots\cdots & \\ \alpha_m & \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

と表わしてもよい.

§2.5 アフィン変換

a) アフィン変換群

今後は n 次元アフィン空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ を一つ固定する. またこの節では, $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ から $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ へのアフィン写像 (f, φ) で

$$f\colon \boldsymbol{X} \longrightarrow \boldsymbol{X} \qquad (\text{全単射}),$$

$$\varphi\colon \boldsymbol{V}^n \longrightarrow \boldsymbol{V}^n \qquad (\text{同型写像})$$

であるものばかりを考える. このように, f が全単射, φ が同型であるから, (f, φ) は $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ の自己同型アフィン写像である. この場合に (f, φ) を $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ の**アフィン変換**(affine transformation)という.

(XXII) アフィン空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ のアフィン変換の全体 $\boldsymbol{G}_A{}^n$ は, 変換の結合によって群を作る. $\boldsymbol{G}_A{}^n$ を $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ の**アフィン変換群**という.

実際 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ のアフィン変換 (f_1, φ_1), $(f_2, \varphi_2) \in \boldsymbol{G}_A{}^n$ に対して

(i) $(f_1, \varphi_1)\circ(f_2, \varphi_2) = (f_1\circ f_2, \varphi_1\circ\varphi_2) \in \boldsymbol{G}_A{}^n$,

(ii) (結合律) $\{(f_1, \varphi_1)\circ(f_2, \varphi_2)\}\circ(f_3, \varphi_3) = (f_1, \varphi_1)\circ\{(f_2, \varphi_2)\circ(f_3, \varphi_3)\}$,

(iii) (単位元) f, φ 共に恒等写像 $1_{\boldsymbol{X}}, 1_{\boldsymbol{V}}$ であれば, 任意の $(f, \varphi) \in \boldsymbol{G}_A{}^n$ に対して

$$(1_{\boldsymbol{X}}, 1_{\boldsymbol{V}})\circ(f, \varphi) = (f, \varphi)\circ(1_{\boldsymbol{X}}, 1_{\boldsymbol{V}}) = (f, \varphi),$$

(iv) (逆元) $(f, \varphi) \in \boldsymbol{G}_A{}^n$ に対して, f, φ の逆写像を f^{-1}, φ^{-1} とすれば, $(f^{-1}, \varphi^{-1}) \in \boldsymbol{G}_A{}^n$ で

$$(f^{-1}, \varphi^{-1})\circ(f, \varphi) = (f, \varphi)\circ(f^{-1}, \varphi^{-1}) = (1_{\boldsymbol{X}}, 1_{\boldsymbol{V}})$$

である.

アフィン変換が, $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ のアフィン部分空間に及ぼす作用を考えよう. 次の命題(XXIII), (XXIV)は, すでに§2.4で説明したものの特殊な場合である.

(XXIII) アフィン空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ のアフィン変換群を $\boldsymbol{G}_A{}^n$ とする.

(i) $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ のアフィン部分空間 $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{W}^r)$ のアフィン変換 $(f, \varphi) \in \boldsymbol{G}_A{}^n$ による像 $(f(\boldsymbol{Y}), \varphi(\boldsymbol{W}^r))$ も, $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ のアフィン部分空間である.

(ii) (i)において $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{W}^r)$ の次元と, $(f(\boldsymbol{Y}), \varphi(\boldsymbol{W}^r))$ の次元は等しい.

(iii) $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ の二つのアフィン部分空間 $(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{W}_1{}^r)$ と $(\boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{W}_2{}^s)$ とが平行(ま

たは広義に平行)であれば，(f,φ)による像$(f(\boldsymbol{Y}_1),\varphi(\boldsymbol{W}_1{}^r))$と$(f(\boldsymbol{Y}_2),\varphi(\boldsymbol{W}_2{}^s))$とも平行(または広義に平行)である．

(XXIV) **(アフィン変換についての基本定理)** アフィン空間$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$のアフィン変換$(f,\varphi)$に対して

(2.52) $$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD} \Longrightarrow \overrightarrow{f(A)f(B)}=\lambda\overrightarrow{f(C)f(D)},$$

ただし，A, B, C, Dは$\boldsymbol{X}$上の4点，$\lambda\in\boldsymbol{R}$とする．

逆に，アフィン空間$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$の基礎集合$\boldsymbol{X}$上の全単射$f:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{X}$に対して，(2.52)が成り立つならば

(2.53) $$\varphi(\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{f(A)f(B)}$$

によって$\varphi:\boldsymbol{V}^n\to\boldsymbol{V}^n$を定義すれば，$\varphi$は$\boldsymbol{V}^n\cong\boldsymbol{V}^n$(自己同型)を与え，$(f,\varphi)$はアフィン変換となる．

すなわち，(XXIV)はアフィン空間$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$の基礎集合上の変換$f$がアフィン変換であるための必要十分条件を与える．

第1章に述べたKleinの立場に立てば，アフィン幾何において基本的なものは

(i) アフィン空間において，アフィン変換群$\boldsymbol{G}_A$を特徴づけること，

(ii) アフィン空間において，アフィン変換群$\boldsymbol{G}_A$に属する各変換に対して不変に保たれる性質を求めること，

の二つであった．(ii)については，上記(XXIII)，(XXIV)で，ベクトル，ベクトルの演算，ベクトルのスカラー倍，アフィン部分空間，その次元，(広義の)平行性，を挙げた．その他，二つのアフィン部分空間の共通部分，それらの張るアフィン部分空間なども，不変な性質である．

b) 変換群と座標枠

次にアフィン空間の均質性についてしらべよう．

(XXV) **(アフィン座標枠に関する基本定理)** n次元アフィン空間$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$において

(i) その座標枠$\Sigma_A=(O;\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$のアフィン変換$(f,\varphi)$による像

(2.54) $$\Sigma_A{}'=(f(O);\varphi(\boldsymbol{e}_1),\cdots,\varphi(\boldsymbol{e}_n))$$

も一つの座標枠である．

(ii) 任意の二つの座標枠

$$\Sigma_A{}^{(i)}=(O_i;\boldsymbol{e}_1{}^{(i)},\cdots,\boldsymbol{e}_n{}^{(i)}),\quad i=1,2$$

に対して，$\Sigma_A{}^{(1)}$ を $\Sigma_A{}^{(2)}$ にうつすアフィン変換 (f,φ) が存在して，ただ一つに定まる：

$$(2.55)\qquad \begin{cases} f(O_1)=O_2, \\ \varphi(\boldsymbol{e}_j{}^{(1)})=\boldsymbol{e}_j{}^{(2)}, \quad j=1,\cdots,n. \end{cases}$$

(iii) 以上によって，$(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{V}^n)$ の座標枠 $\Sigma_A{}^{(1)}$ を固定することによって，アフィン変換 $(f,\varphi)\in \boldsymbol{G}_A{}^n$ の全体と，座標枠 Σ_A の全体とは

$$(f,\varphi)\Leftrightarrow (f(O_1)\,;\varphi(\boldsymbol{e}_1{}^{(1)}),\cdots,\varphi(\boldsymbol{e}_n{}^{(1)}))$$

によって1対1に対応する．

証明 (i) $\varphi:\boldsymbol{V}^n\to\boldsymbol{V}^n$ がベクトル空間の線型自己同型であるので，$(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$ が $\boldsymbol{V}^n$ の基底であれば，$(\varphi(\boldsymbol{e}_1),\cdots,\varphi(\boldsymbol{e}_n))$ も $\boldsymbol{V}^n$ の基底となる．故に(2.54)の $\Sigma_A{}'$ も $(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{V}^n)$ の座標枠である．

(ii) 任意に座標枠 $\Sigma_A{}^{(1)},\Sigma_A{}^{(2)}$ をとるとき，$\boldsymbol{V}^n$ の基底 $(\boldsymbol{e}_1{}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{e}_n{}^{(1)})$ を基底 $(\boldsymbol{e}_1{}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{e}_n{}^{(2)})$ にうつす $\boldsymbol{V}^n$ の線型自己同型 φ がただ一つ存在する：

$$\varphi(\boldsymbol{e}_j{}^{(1)})=\boldsymbol{e}_j{}^{(2)},\quad j=1,\cdots,n.$$

そのとき(XVII)によって，$f(O_1)=O_2$ となる写像 $f:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{X}$ で，(f,φ) が $(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{V}^n)$ から $(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{V}^n)$ へのアフィン変換となるものがただ一つ存在する．一方 φ は $\boldsymbol{V}^n\cong\boldsymbol{V}^n$ を与えるので，$f:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{X}$ も全単射となる．

(iii)は(ii)のいいかえである．▌

(XXV)をアフィン座標枠に関する基本定理といったのは，主にその(iii)の事実を示すのである．一般に Klein 流の幾何において，その座標枠というのは，このように変換群の要素と1対1に対応するものなのである．他の幾何についても今後順に確かめていくであろう．

(XXVI) **(アフィン空間の均質性)** n 次元アフィン空間 $(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{V}^n)$ において，その上に2組の一般の位置にある $n+1$ 個の点

$$(A_0,A_1,\cdots,A_n)\quad \text{および}\quad (B_0,B_1,\cdots,B_n)$$

を与えるとき，$(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{V}^n)$ のアフィン変換で

$$\varphi(A_i)=B_i,\quad i=0,1,\cdots,n$$

となるものが存在し，かつただ一つに定まる．

証明 $A_0,\cdots,A_n$ が一超平面上にないという仮定から n 個のベクトル

$$\boldsymbol{e}_1=\overrightarrow{A_0A_1},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{e}_n=\overrightarrow{A_0A_n}$$

は $\boldsymbol{V}^n$ において1次独立となる．何となれば，もしも $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ が1次従属であれば，$\boldsymbol{e}_i \in \boldsymbol{W}^{n-1} \subsetneqq \boldsymbol{V}^n\ (i=1, \cdots, n)$ となる $n-1$ 次元部分ベクトル空間 $\boldsymbol{W}^{n-1}$ が存在し，したがって $A_i \in A_0 + \boldsymbol{W}^{n-1}\ (i=0, 1, \cdots, n)$ という超平面が存在する．これは仮定に反することである．よって

$$\Sigma_A = (A_0\,; \overrightarrow{A_0A_1}, \cdots, \overrightarrow{A_0A_n})$$

は $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ の座標枠となる．

全く同様に $\Sigma_A' = (B_0\,; \overrightarrow{B_0B_1}, \cdots, \overrightarrow{B_0B_n})$ も $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ の座標枠となる．(XXV)によって Σ_A を Σ_A' にうつすアフィン変換 (f, φ) はただ一つ存在する：

$$f(A_0) = B_0,$$
$$\varphi(\overrightarrow{A_0A_i}) = \overrightarrow{B_0B_i}, \qquad i = 1, \cdots, n.$$

したがって

$$\begin{aligned} f(A_i) &= f(A_0 + \overrightarrow{A_0A_i}) = f(A_0) + \varphi(\overrightarrow{A_0A_i}) \\ &= B_0 + \overrightarrow{B_0B_i} = B_i, \qquad i = 1, \cdots, n \end{aligned}$$

となる．▌

c) 平行移動

われわれはすでにアフィン変換の特殊な例を知っている．それは，アフィン空間の定義中に述べてある平行移動 $f_{\boldsymbol{a}}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ である．

(XXVII) (i) アフィン空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ の定義2.1中の公理2.1で与えられている平行移動 $f_{\boldsymbol{a}}\ (\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}^n)$ は $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ のアフィン変換である．

(ii) アフィン変換 (f, φ) が平行移動であるための必要十分条件は，線型自己同型 $\varphi: \boldsymbol{V}^n \to \boldsymbol{V}^n$ が $\boldsymbol{V}^n$ の恒等写像であることである．

(iii) アフィン空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ の平行移動の全体 $\boldsymbol{T}^n$ は，アフィン変換群 $\boldsymbol{G}_A{}^n$ の部分群を作り，かつ

$$\boldsymbol{T}^n \cong \boldsymbol{V}^n \tag{2.56}$$

となる．$\boldsymbol{T}^n$ を**平行移動群**(translation group)という．

なおすでに§2.1で述べてあるように，$O_0 \in \boldsymbol{X}$ を任意に定めておくとき，O_0 を $\boldsymbol{X}$ 上の任意の1点 O_1 にうつすような平行移動は存在してただ一つに限る．

証明 (i) 公理2.1で述べられている平行移動

$$f_{\boldsymbol{a}}: \boldsymbol{X} \longrightarrow \boldsymbol{X} \qquad (\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}^n)$$

は，基礎集合 $\boldsymbol{X}$ 上の変換であって，それに伴う $\varphi: \boldsymbol{V}^n \to \boldsymbol{V}^n$ が与えられていな

い．そこで(XXIV)の後半に従って

(2.57) $$\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD} \Longrightarrow \overrightarrow{f_{\boldsymbol{a}}(A)f_{\boldsymbol{a}}(B)} = \lambda\overrightarrow{f_{\boldsymbol{a}}(C)f_{\boldsymbol{a}}(D)}$$

が成り立つことを確かめてみよう．さて定義によって

$$f_{\boldsymbol{a}}(A) = A+\boldsymbol{a} = C, \quad f_{\boldsymbol{a}}(B) = B+\boldsymbol{a} = D,$$
$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b}, \quad \overrightarrow{f_{\boldsymbol{a}}(A)f_{\boldsymbol{a}}(B)} = \boldsymbol{b}'$$

とおくと

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$$

である．したがって

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},$$
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}'$$

より $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}'$ となる．すなわち

(2.58) $$\overrightarrow{f_{\boldsymbol{a}}(A)f_{\boldsymbol{a}}(B)} = \overrightarrow{AB}$$

となる．同様に $\overrightarrow{f_{\boldsymbol{a}}(C)f_{\boldsymbol{a}}(D)}=\overrightarrow{CD}$ であるので，(2.57)が成り立つ．

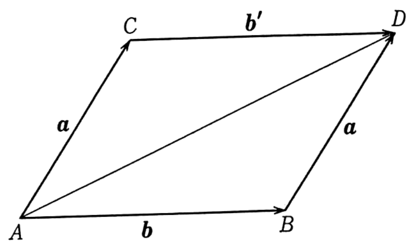


図2・16

さて $\varphi: \boldsymbol{V}^n\to\boldsymbol{V}^n$ を

(2.59) $$\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f_{\boldsymbol{a}}(A)f_{\boldsymbol{a}}(B)},$$

すなわち，(2.58)によって φ を恒等変換とおけば，平行移動はアフィン変換 $(f_{\boldsymbol{a}}, 1_{\boldsymbol{V}^n})$ となる．

(ii) 必要なことはすでに上で示した．

十分なこと：アフィン変換 $(f, 1_{\boldsymbol{V}^n})$ を考える．任意の $O_0\in\boldsymbol{X}$ に対して

(2.60) $$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{O_0f(O_0)}$$

とおくと，$(f, 1_{\boldsymbol{V}^n})$ は平行移動 $f_{\boldsymbol{a}}$:

(2.61) $$f_{\boldsymbol{a}}(P) = P+\boldsymbol{a} \qquad (P\in\boldsymbol{X})$$

と一致することを見よう．まず(2.60)のベクトル $\boldsymbol{a}$ が，O_0 の取り方によらない

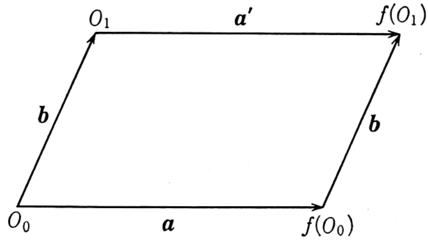


図 2・17

ことは

(2.62) $$\overrightarrow{O_0f(O_0)} = \overrightarrow{O_1f(O_1)}$$

を示せばよい．これは，$\varphi=1_{V^n}$ より

$$O_1 = O_0+\overrightarrow{O_0O_1},$$
$$f(O_1) = f(O_0)+\varphi(\overrightarrow{O_0O_1}) = f(O_0)+\overrightarrow{O_0O_1},$$

すなわち，$\overrightarrow{O_0O_1}=\overrightarrow{f(O_0)f(O_1)}$ である．これから(2.62)が導かれることは(i)に示したとまったく同様である．

次に(2.61)は，$P=O_0+\overrightarrow{O_0P}$ に対して

$$f(P) = f(O_0)+\overrightarrow{O_0P} = (O_0+\overrightarrow{O_0f(O_0)})+\overrightarrow{O_0P}$$
$$= (O_0+\overrightarrow{O_0P})+\overrightarrow{O_0f(O_0)} = P+\boldsymbol{a}$$

である．

(iii) $\boldsymbol{V}^n \ni \boldsymbol{a}$ に対して $(f_{\boldsymbol{a}}, 1_{V^n}) \in \boldsymbol{T}^n$ を対応させるときこの対応が準同型であることは，アフィン空間の定義 2.1 の公理 2.3 ですでに

$$f_{\boldsymbol{b}}\circ f_{\boldsymbol{a}} = f_{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}$$

として与えてある．

この対応 $\boldsymbol{V}^n \ni \boldsymbol{a} \to (f_{\boldsymbol{a}}, 1_{V^n}) \in \boldsymbol{T}^n$ が全射であることは(ii)ですでに見た．また単射であること：

$$f_{\boldsymbol{a}} = f_{\boldsymbol{b}} \Longrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$$

は

$$f_{\boldsymbol{a}}(O_0) = O_0+\boldsymbol{a} = O_0+\boldsymbol{b} = f_{\boldsymbol{b}}(O_0)$$
$$\Longrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$$

よりわかる．よって $\boldsymbol{V}^n \cong \boldsymbol{T}^n$ となる．▌

d）アフィン変換群の構造

n 次元アフィン空間 (X, V^n) のアフィン変換群 $G_A{}^n$ の構造をしらべよう．

(XXVIII)　(i)　平行移動群 T^n はアフィン変換群 $G_A{}^n$ の正規部分群である．

(ii)　$G_A{}^n/T^n \cong GL(V^n)$,

ただし，$GL(V^n)$ はベクトル空間 V^n の線型自己同型群を表わす．ふつう $GL(V^n)$ を V^n 上の**一般線型群**(general linear group)という．

(iii)　(X, V^n) の任意の1点 O_0 の**固定群**(stabilizer)

$$S(O_0) = \{F=(f, \varphi) \in G_A{}^n \mid f(O_0)=O_0\}$$

は $GL(V^n)$ と同型である．

(iv)　アフィン変換群 $G_A{}^n$ は平行移動群 T^n と，X 上の任意の1点 P の固定群 $S(P)$ との半直積である．

証明　(i)　$F_1=(f_1, 1_{V^n}) \in T^n$，$F=(f, \varphi) \in G_A{}^n$ に対して

$$\begin{aligned} F^{-1}\circ F_1\circ F &= (f^{-1}\circ f_1\circ f, \varphi^{-1}\circ 1_{V^n}\circ\varphi) \\ &= (f^{-1}\circ f_1\circ f, 1_{V^n}) \in T^n. \end{aligned}$$

すなわち，T^n は $G_A{}^n$ の正規部分群である．

(ii)　$F=(f, \varphi) \in G_A{}^n$ に対して $\varphi \in GL(V^n)$ を対応させる写像を Φ とおく：

$$\Phi(F) = \varphi.$$

Φ は $G_A{}^n \to GL(V^n)$ の準同型である：$F_1=(f_1, \varphi_1)$, $F_2=(f_2, \varphi_2) \in G_A{}^n$ とすると

$$\Phi(F_2\circ F_1) = \Phi(f_2\circ f_1, \varphi_2\circ\varphi_1) = \varphi_2\circ\varphi_1 = \Phi(F_2)\circ\Phi(F_1).$$

Φ が全射であることは，(XVII)で証明ずみである．

Φ による 1_{V^n} の原像 $\mathrm{Ker}\,\Phi$ は

$$\mathrm{Ker}\,\Phi = \Phi^{-1}(1_{V^n}) = \{F=(f, \varphi) \mid \varphi=1_{V^n}\} = T^n$$

である．よって

$$G_A{}^n/T^n = G_A{}^n/\mathrm{Ker}\,\Phi \cong \mathrm{Im}\,\Phi = GL(V^n)$$

が成り立つ．

(iii)　$F=(f, \varphi) \in G_A{}^n$ は，X 上の任意の1点(これを O_0 にとる)に対して，

$$f(O_0) = O_1 \quad および \quad \varphi \in GL(V^n)$$

を対応させることによって確定した(XVII)．したがって $F \in S(O_0)$ に対しては

$$f(O_0) = O_0 \quad および \quad \varphi \in GL(V^n)$$

によって F が一意に定まる．すなわち

$$\boldsymbol{S}(O_0) \ni F=(f,\varphi) \longrightarrow \varphi \in \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^n)$$

は $\boldsymbol{S}(O_0)$ から $\boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^n)$ への全単射を与える．かつこの対応が準同型であることは，すでにたびたび見たとおりである．よって

$$\boldsymbol{S}(O_0) \cong \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^n)$$

となる．

(iv)　(ii), (iii) によってわかる．▌

e）アフィン変換群の行列による表現

以上を n 次元アフィン空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ の座標枠 $\Sigma_A=(O\,;\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$ を一つ固定して表わしてみよう．

アフィン変換 $F=(f,\varphi) \in \boldsymbol{G}_A{}^n$ に対して

$$\overrightarrow{Of(O)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{e}_i, \tag{2.63}$$

$$\varphi(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \boldsymbol{e}_i, \qquad j=1,\cdots,n \tag{2.64}$$

とおく．Σ_A に関する点 P の座標を $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，$f(P)$ の座標を $(\mu_1,\cdots,\mu_n)$ とすると

$$\mu_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\lambda_j, \qquad i=1,\cdots,n,$$

すなわち

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \cdots\cdots & \\ \alpha_n & \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \tag{2.65}$$

と表わされた．

さらに $F'=(f',\varphi') \in \boldsymbol{G}_A{}^n$ によって，点 $f(P)$ が $f'\circ f(P)$ にうつされ，その座標を $(\nu_1,\cdots,\nu_n)$ とすれば

$$\overrightarrow{Of'(O)} = \sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{e}_i,$$

$$\varphi'(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^n \beta_{ij} \boldsymbol{e}_i, \qquad j=1,\cdots,n$$

に対して

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \cdots\cdots & \\ \beta_n & \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

となる．そのとき合成 $F'\circ F$ に対しては

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \cdots\cdots & \\ \beta_n & \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \cdots\cdots & \\ \alpha_n & \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \tag{2.67}$$

と表わされる．いま行列記号を用いて

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^n \quad (n \text{ 次元列ベクトル全体}), \tag{2.68}$$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ & \cdots\cdots & \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ & \cdots\cdots & \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nn} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{R})$$

($\boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{R})$ は $\boldsymbol{n}$ **次一般線型群**：行列式 0 でない $n\times n$ 行列の全体)

とすれば，(2.65), (2.66), (2.67) は

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{a} & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{b} & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{b} & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{a} & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{b}+B\boldsymbol{a} & BA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

故に

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}+B\boldsymbol{a}, \quad C = BA$$

とおくと

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{c} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \tag{2.69}$$

と表わされる．以上をまとめて

(XXIX) (i) $\boldsymbol{n}$ 次元ベクトル空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}^n)$ の座標枠 $\Sigma_A = (O\,;\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ を一つ固定する．アフィン変換群 $\boldsymbol{G}_A{}^n$ は,

$$F = (f, \varphi) \in \boldsymbol{G}_A{}^n$$

に対して(2.63), (2.64)によって $(n+1)\times(n+1)$ 行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{a} & A \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n, \ A \in \boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{R}) \tag{2.70}$$

を対応させることによって，行列の作る群と同型になる：

$$\boldsymbol{G}_A{}^n \cong \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{a} & A \end{bmatrix} \middle| \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n, \ A \in \boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{R}) \right\} \tag{2.71}$$

となる．

(ii) $\boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{R})$ の単位元(単位行列)を E とおくと，上の同型で

$$\boldsymbol{T}^n \cong \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{a} & E \end{bmatrix} \middle| \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n \right\}$$

と対応する．

$\boldsymbol{T}^n \cong \boldsymbol{V}^n$ は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{a} & E \end{bmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}^n$$

によって与えられる．

(iii) $$\boldsymbol{G}_A{}^n/\boldsymbol{T}^n \cong \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^n) \cong \boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{R})$$

は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{a} & A \end{bmatrix} \longrightarrow A \in \boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{R})$$

によって与えられる．

問 題

1 アフィン空間 (X, V^n) で，ベクトル空間 V^n が有限体 F_q $(q=p^r)$ 上のベクトル空間とする．そのとき，X の点の個数，X 上の直線の個数，X 上の超平面の個数を求めよ．

2 ベクトル演算を用いて，Menelaus の定理，Ceva の定理，および Desargues の定理，Pappus の定理を証明せよ．(Desargues と Pappus の定理は第4章をみよ．)

3 アフィン空間 A^n において，写像 $\sigma: A^n \to A^n$ が，任意の異なる2点 P, Q に対して

$$\overrightarrow{\sigma(P)\sigma(Q)} /\!/ \overrightarrow{PQ}$$

であるとき $(n \geqq 2)$，σ を dilatation (膨脹写像) という．そのとき，(i) σ は A^n 全体をただ1点にうつすか，または A^n から A^n への全単射である，(ii) σ は A^n のアフィン変換である，ことを示せ．(iii) また A^n のアフィン座標枠 Σ_A を一つ定めるとき，座標を用いると dilatation はどのように表わされるか．

4 アフィン空間 (X, V^n) の n 次元ベクトル空間 V^n の代りに n 次元トーラス群 $\mathcal{T}^n = (\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}) \oplus \cdots \oplus (\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}) \cong \boldsymbol{R}^n/\boldsymbol{Z}^n$ を用いて，n 次元トーラス空間 $(Y, \mathcal{T}^n)$ が同様に定義される．そのとき，アフィン空間 (X, V^n) の性質とトーラス空間 $(Y, \mathcal{T}^n)$ の性質との間に (i) 似ている性質は何か，(ii) また異なる性質は何か．(ここで $\boldsymbol{R}$=実数の全体，$\boldsymbol{Z}$=整数の全体である．)

5 係数体 K を実数体 $\boldsymbol{R}$ とする．アフィン空間 A^n $(n \geqq 2)$ の変換 $\sigma: A^n \to A^n$ がアフィン変換であるためには，例2.8の第1条件:

(i) σ は A^n 上の直線を直線にうつす

ことが必要かつ十分である．

[ヒント] (イ) $n=2$ の場合に証明すればよい．(ロ) 平行線は σ によって平行線にうつる．したがってベクトルはベクトルにうつる．(ハ) 例2.8の(ii)を導く．(第4章(XVI)を参照．)

第3章　Euclid 幾何

§3.1　内積ベクトル空間

a) 内積ベクトル空間

Euclid 幾何を第2章で考えたアフィン幾何と同じように取り扱うとすれば，そこで考えたベクトル空間 $\boldsymbol{V}^n$ の代りに内積ベクトル空間を考える必要が生じる．まずそれを考えよう．

定義 3.1　実数体 $\boldsymbol{R}$ 上の n 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{V}_E{}^n$ が**内積ベクトル空間**(inner product vector space)であるとは，$\boldsymbol{V}_E{}^n$ に属する任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して，それらの**内積** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{R}$ が定まり，次の諸性質をもつことをいう：

(i)　$(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b})$,

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1)+(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_2)$,

$(\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$，ただし $\lambda \in \boldsymbol{R}$,

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$.

(ii)　任意の $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}_E{}^n$ に対して

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geqq 0$$

かつ

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = 0$$

である．

n 次元内積ベクトル空間 $\boldsymbol{V}_E{}^n$ の基底$(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$をとる：

$$\boldsymbol{V}_E{}^n = \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_1+\cdots+\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_n.$$

$\boldsymbol{V}_E{}^n$ の元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は $\lambda_i, \mu_j \in \boldsymbol{R}$ によって

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n, \qquad \boldsymbol{y} = \mu_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+\mu_n\boldsymbol{e}_n$$

と一意に表わされる．このとき

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \alpha_{ij}, \qquad i, j = 1, \cdots, n \tag{3.1}$$

とおくと

(3.2)
$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\mu_j(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\lambda_i\mu_j$$

と表わされる．定義の条件(ii)は，$n\times n$ 行列

$$A = (\alpha_{ij})$$

が**正値**(positive definite)，すなわち任意の $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (0, \cdots, 0)$ に対して

(3.3)
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\lambda_i\lambda_j > 0$$

ということと同値である．

いま $\boldsymbol{V}_E{}^n$ の別の基底 $(\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n)$ をとると

(3.4)
$$\boldsymbol{f}_i = \sum_{j=1}^{n}\tau_{ji}\boldsymbol{e}_j, \qquad i = 1, \cdots, n,$$
$$T = (\tau_{ij}),$$
$$(\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_j) = \beta_{ij}, \qquad i, j = 1, \cdots, n$$

とおくと

(3.5)
$$\beta_{ij} = (\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_j) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\tau_{ki}\tau_{lj}(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\tau_{ki}\alpha_{kl}\tau_{lj}$$

と変換される．一般に行列 T の転置行列を ${}^tT$ で表わすと，行列

$$B = (\beta_{ij})$$

は，(3.5)によって

(3.6)
$$B = {}^tTAT$$

と表わされる．

A は正値行列であるから，よく知られているように行列 T を適当にとるとき

$$B = E \qquad (E \text{ は単位行列}),$$

すなわち

$$(\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \cdots, n$$

とすることができる．

定義 3.2　内積ベクトル空間 $\boldsymbol{V}_E{}^n$ の基底 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ が

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \cdots, n,$$

すなわち

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) = 1, \qquad i = 1, \cdots, n,$$
$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = 0, \qquad i \neq j$$

のとき，この基底$(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$を**正規直交基底**(orthonormal basis)という．

(I) 内積ベクトル空間は，正規直交基底をもつ．

(I)は上記のような行列の性質を用いないでも，**Schmidt の直交化の方法**を用いても証明できる．いま，任意に$\boldsymbol{V}_E{}^n$の基底$(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$をとり，新たに

$$\boldsymbol{f}_1 = c_{11}\boldsymbol{a}_1,$$
$$\boldsymbol{f}_2 = c_{12}\boldsymbol{a}_1 + c_{22}\boldsymbol{a}_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\boldsymbol{f}_n = c_{1n}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{nn}\boldsymbol{a}_n,$$

とおいて

$$(\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_j) = \delta_{ij} \tag{3.7}$$

としよう．まず$(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1) = 1$より

$$c_{11} = 1/\sqrt{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)}$$

と定める．一般に帰納法によって(3.7)が$i, j = 1, \cdots, r$まで成立したとする．そのとき$\boldsymbol{f}_{r+1}$を

$$(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_{r+1}) = 0, \qquad \cdots, \qquad (\boldsymbol{f}_r, \boldsymbol{f}_{r+1}) = 0, \qquad (\boldsymbol{f}_{r+1}, \boldsymbol{f}_{r+1}) = 1$$

に定めよう．これは

$$\boldsymbol{f}_{r+1} = \boldsymbol{f}_{r+1}{}^* / \sqrt{(\boldsymbol{f}_{r+1}{}^*, \boldsymbol{f}_{r+1}{}^*)},$$
$$\boldsymbol{f}_{r+1}{}^* = \boldsymbol{a}_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} (\boldsymbol{a}_{r+1}, \boldsymbol{f}_i)\boldsymbol{f}_i$$

とおけばよい．

内積ベクトル空間$\boldsymbol{V}_E{}^n$において，正規直交基底$(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$のとり方は沢山ある．

(II) $\boldsymbol{V}_E{}^n$の正規直交基底$(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$を一つ定めるとき，新たな基底$(\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n)$が正規直交基底であるためには

$$(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n)T$$
$$T = (\tau_{ij}) \qquad (\tau_{ij} \in \boldsymbol{R})$$

とするとき，T が直交行列であること，すなわち

$$
{}^tTT = E \tag{3.8}
$$

が必要十分である.

証明 (3.6)において $A=E$ に対して $B=E$ となるためには，${}^tTT=E$ が必要十分である. ▌

さて，内積ベクトル空間 $\boldsymbol{V_E}^n$ において，ベクトルの内積に基づいて定義される量を考えよう.

定義 3.3 内積ベクトル空間 $\boldsymbol{V_E}^n$ において，ベクトル $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V_E}^n$ の**長さ** $\|\boldsymbol{x}\|$ を

$$
\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} \geqq 0 \tag{3.9}
$$

によって定義する. 特に $\|\boldsymbol{x}\|=0$ となるのは $\boldsymbol{x}=0$ に限る.

また，二つのベクトルの内積は，ベクトルの長さを用いて表わすことができる:

$$
(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{y}\|^2). \tag{3.10}
$$

(III) ベクトルの長さについては，三角不等式

$$
\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\| \tag{3.11}
$$

が成り立つ. また

$$
|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|. \tag{3.12}
$$

証明 よく知られている通りである. ▌

定義 3.4 二つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ のなす**角の大きさ** θ（ただし $0 \leqq \theta \leqq \pi$）を

$$
\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|} \tag{3.13}
$$

によって定義する.

特に $\theta=\pi/2$ であるのは $\cos\theta=0$，すなわち

$$
(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \tag{3.14}
$$

のときである. よって(3.14)が，二つのベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ とが直交するための必要十分条件である.

注意 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ が $\boldsymbol{V_E}^n$ の正規直交基底とは

(i) $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の長さはすべて1,

(ii) $i \neq j$ のとき，$\boldsymbol{e}_i$ と $\boldsymbol{e}_j$ とは直交している

ことを表わしている.

(IV) r 個($2 \leqq r \leqq n$)の1次独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ の作る平行 $2r$ 面体の (r

次元)**体積** $V^r(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r)$ を

$$(3.15)\qquad V^r(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r)^2 = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_r) \\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_r) \\ & \cdots\cdots & & \\ (\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_r) \end{vmatrix}$$

と定義する.

この定義は，$r=1$ の場合はベクトルの長さの定義と一致する.

次に一般の $r \geqq 2$ に対して

$$(3.16)\qquad \boldsymbol{b}_r = \boldsymbol{a}_r - \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i \boldsymbol{a}_i$$

をとるとき

$$(\boldsymbol{b}_r, \boldsymbol{a}_j) = (\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_j) - \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = 0, \qquad j = 1, \cdots, r-1$$

になるように $\lambda_1, \cdots, \lambda_{r-1} \in \boldsymbol{R}$ を定めることができる．このとき $\boldsymbol{c}_r = \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i \boldsymbol{a}_i$ は，ベクトル $\boldsymbol{a}_r$ の $(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r-1})$ の張る $r-1$ 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{W}^{r-1}$ への正射影に等しく，$\boldsymbol{b}_r = \boldsymbol{a}_r - \boldsymbol{c}_r$ は $\boldsymbol{a}_r$ の $\boldsymbol{W}^{r-1}$ の垂直方向への成分に等しい.

このように $\boldsymbol{b}_r$ を定めるとき

$$(3.17)\qquad V^r(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r) = V^{r-1}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r-1}) \times \|\boldsymbol{b}_r\|$$

が成り立つことを示そう.

それには(3.15)の右辺の行列式で，第1列に λ_1 を，…，第 $r-1$ 列に λ_{r-1} をかけて，第 r 列より引けば

$$(3.18)\qquad (3.15)\text{の右辺} = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_{r-1}) & 0 \\ & \cdots\cdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_{r-1}, \boldsymbol{a}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}_{r-1}, \boldsymbol{a}_{r-1}) & 0 \\ (\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_{r-1}) & (\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_r) \end{vmatrix}$$
$$= V^{r-1}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r-1})^2 (\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_r)$$

となる．一方 $(\boldsymbol{b}_r, \boldsymbol{a}_j) = 0$ $(j=1, \cdots, r-1)$ を用いれば，

$$(\boldsymbol{b}_r, \boldsymbol{b}_r) = (\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_r) - \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_r) = (\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_r)$$

となる．よって(3.18)より

$$(3.15)\text{の右辺} = V^{r-1}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r-1})^2 \cdot (\boldsymbol{b}_r, \boldsymbol{b}_r) = V^r(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r)^2$$

が成り立ち，したがって(3.17)が成り立つことが示された.

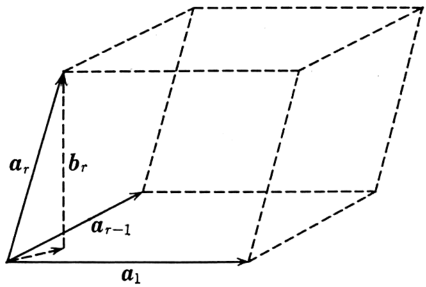


図3.1

b）直交変換

定義3.5 n 次元内積ベクトル空間 $V_E{}^n$ から $V_E{}^n$ への線型変換 φ が，任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_E{}^n$ に対して

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\varphi(\boldsymbol{a}), \varphi(\boldsymbol{b}))$$

となるとき，φ を $V_E{}^n$ の**直交変換**という．

$V_E{}^n$ の直交変換の全体は，変換の結合によって群を作る．これを **n 次元直交変換群**(orthogonal transformation group)といい，ふつう

$$\boldsymbol{O}(n)$$

で表わす．

$V_E{}^n$ の正規直交基底 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ を一つ定めておいて

$$\varphi(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} \boldsymbol{e}_j, \qquad i = 1, \cdots, n, \tag{3.19}$$

すなわち

$$\varphi(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) A,$$
$$A = (\alpha_{ij})$$

と表わす．

$$\begin{aligned}\delta_{ij} &= (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = (\varphi(\boldsymbol{e}_i), \varphi(\boldsymbol{e}_j)) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \boldsymbol{e}_k, \sum_{l=1}^{n} \alpha_{lj} \boldsymbol{e}_l \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \alpha_{ki} \alpha_{lj} \delta_{kl} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \alpha_{kj}\end{aligned}$$

より

$$(3.20) \qquad {}^tAA = E \qquad (E \text{ は単位行列})$$

が成り立つ．逆に A が直交行列，すなわち，${}^tAA=E$ であれば $(\varphi(\boldsymbol{e}_i), \varphi(\boldsymbol{e}_j))=\delta_{ij}$ となり，(3.19)で定義された φ は直交変換となる．よって，$\boldsymbol{V_E}^n$ の直交変換 φ と n 次直交行列 A とは($\boldsymbol{V}^n$ の1組の正規直交基底$(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$を固定するとき) 1対1に対応する．すなわち

(V) $\boldsymbol{V_E}^n$ の直交変換群 $\boldsymbol{O}(n)$ は，n 次直交行列全体の群(**直交群**)と同型である．

§3.2 Euclid 空間

a) Euclid 空間の定義

第2章でアフィン空間を，基礎集合 $\boldsymbol{X}$ とベクトル空間 $\boldsymbol{V}^n$ との組によって定義したのにならって，Euclid 空間を基礎集合 $\boldsymbol{X}$ と内積ベクトル空間 $\boldsymbol{V_E}^n$ の組として定義しよう．

定義 3.6 アフィン空間$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V_E}^n)$において，$n$ 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{V_E}^n$ が特に内積ベクトル空間であるとき，$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V_E}^n)$を **$n$ 次元 Euclid 空間**といい，

$$\boldsymbol{E}^n = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V_E}^n)$$

と表わす．$\boldsymbol{E}^1$ を **Euclid 直線**，$\boldsymbol{E}^2$ を **Euclid 平面**という．

Euclid 空間はアフィン空間の一種であるから，アフィン空間における諸概念，例えば§2.1，§2.3で扱ったような部分空間，平行性，部分空間の次元，等についてのことはそのまま Euclid 空間についてあてはまる．そこで Euclid 空間においてはじめて定義される概念を考えよう．

(VI) Euclid 空間$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V_E}^n)$において，2点 $P, Q \in \boldsymbol{X}$ の間の**距離** $\rho(P, Q)$ を $\overrightarrow{PQ} \in \boldsymbol{V_E}^n$ を用いて

$$(3.21) \qquad \rho(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$$

によって定義する．このとき

(i) $\rho(P, Q) \geqq 0$,

かつ $\rho(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$,

(ii) $\rho(P, Q) = \rho(Q, P)$,

(iii) (**三角不等式**)

$$\rho(P, R) \leqq \rho(P, Q) + \rho(Q, R),$$

すなわち，$\rho(P,Q)$ は基礎集合 $\boldsymbol{X}$ の距離を定め，$\boldsymbol{X}$ は距離空間となる．

証明　(III)，(3.11)を用いよ．▌

定義 3.7　Euclid 空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}_E{}^n)$ において，二つのベクトル $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$ のなす**角の大きさ** θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ を

$$\cos\theta = \frac{(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})}{\|\overrightarrow{PQ}\|\cdot\|\overrightarrow{PR}\|} \tag{3.22}$$

によって定義する．

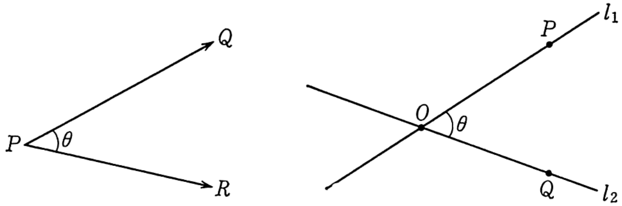


図 3·2

同じく，1点 O で交わる2直線 l_1, l_2 のなす角の大きさ θ を，l_1, l_2 上に(O と異なる)任意の2点 P, Q をとり

$$\cos\theta = \frac{(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})}{\|\overrightarrow{OP}\|\cdot\|\overrightarrow{OQ}\|} \tag{3.23}$$

によって定義する．P, Q のとり方によって $\cos\theta$ は $-\cos\theta$ に変わり θ は $\pi-\theta$ の値をとる．

定義 3.8　n 次元 Euclid 空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}_E{}^n)$ において，平行 $2r$ 面体が r 次元部分空間上にはあるが $r-1$ 次元部分空間に属さないとする $(2\leqq r\leqq n)$．そのとき，この平行 $2r$ 面体の **r 次元体積** V^r を，その上の1頂点 P_0 からでる r 個の稜ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ を用いて(IV)，(3.15)によって定義する．

b) Euclid 座標枠

定義 3.9　n 次元 Euclid 空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}_E{}^n)$ において，$\boldsymbol{X}$ の1点 O と，内積ベクトル空間 $\boldsymbol{V}_E{}^n$ の正規直交基底 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ の組：

$$\Sigma_E = (O\,; \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \tag{3.24}$$

を **Euclid 座標枠**(Euclidean frame)または**直交枠**(orthogonal frame)という．

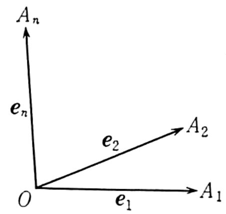


図 3・3

$$\boldsymbol{e}_i = \overrightarrow{OA_i}, \quad i = 1, \cdots, n$$

に $A_1, \cdots, A_n$ をとるとき Σ_E を

$$\Sigma_E = (O ; A_1, \cdots, A_n) \tag{3.25}$$

と書くこともある．このとき O を**原点**，$A_1, \cdots, A_n$ を**単位点**ともいう．

$P \in \boldsymbol{X}$ に対して Σ_E に関する座標

$$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

を，点 P の**直交座標**という．

点 P, Q の直交座標をそれぞれ $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, $(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ とすれば，P, Q 間の距離は

$$\rho(P, Q) = \sqrt{(\mu_1 - \lambda_1)^2 + \cdots + (\mu_n - \lambda_n)^2} \tag{3.26}$$

と表わされる．

また R の直交座標を $(\nu_1, \cdots, \nu_n)$ とすれば二つの線分 PQ, PR のなす角 θ は (3.22) に対して

$$\cos\theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \lambda_i)(\nu_i - \lambda_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \lambda_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\nu_i - \lambda_i)^2}} \tag{3.27}$$

と表わされる．

また $P_0 = (\lambda_1^{(0)}, \cdots, \lambda_n^{(0)})$ からでる n 個の稜 P_0P_i $(i=1, \cdots, n)$, $P_i = (\lambda_1^{(i)}, \cdots, \lambda_n^{(i)})$, の張る平行 $2n$ 面体の n 次元体積 $V^n(P_0, \cdots, P_n)$ は，

$$V^n(P_0, \cdots, P_n) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1^{(0)} & \cdots & \lambda_n^{(0)} \\ 1 & \lambda_1^{(1)} & \cdots & \lambda_n^{(1)} \\ & & \cdots\cdots & \\ 1 & \lambda_1^{(n)} & \cdots & \lambda_n^{(n)} \end{vmatrix} \text{の絶対値} \tag{3.28}$$

で与えられる．

何故ならば，右辺を変形すれば

$$\begin{vmatrix} \lambda_1{}^{(1)}-\lambda_1{}^{(0)} & \cdots & \lambda_n{}^{(1)}-\lambda_n{}^{(0)} \\ & \cdots\cdots & \\ \lambda_1{}^{(n)}-\lambda_1{}^{(0)} & \cdots & \lambda_n{}^{(n)}-\lambda_n{}^{(0)} \end{vmatrix}$$

となる．この行列式と，行と列とを入れかえた行列式との積を作れば，

$$\begin{vmatrix} \sum_i(\lambda_i{}^{(1)}-\lambda_i{}^{(0)})^2 & \sum_i(\lambda_i{}^{(1)}-\lambda_i{}^{(0)})(\lambda_i{}^{(2)}-\lambda_i{}^{(0)}) & \cdots & \sum_i(\lambda_i{}^{(1)}-\lambda_i{}^{(0)})\times(\lambda_i{}^{(n)}-\lambda_i{}^{(0)}) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ \sum_i(\lambda_i{}^{(n)}-\lambda_i{}^{(0)})\times(\lambda_i{}^{(1)}-\lambda_i{}^{(0)}) & \sum_i(\lambda_i{}^{(n)}-\lambda_i{}^{(0)})(\lambda_i{}^{(2)}-\lambda_i{}^{(0)}) & \cdots & \sum_i(\lambda_i{}^{(n)}-\lambda_i{}^{(0)})^2 \end{vmatrix}$$

となる．これは§3.1の(IV)で与えた $V^n(\overrightarrow{P_0P_1}, \cdots, \overrightarrow{P_0P_n})^2$ の公式と一致する．

§3.3　合同変換

a）合同変換の定義

アフィン幾何においてアフィン変換のもつ役割を，Euclid 幾何においては，合同変換がうけもつことになる．

定義 3.10　n 次元 Euclid 空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}_E{}^n)$ において，

$$\text{全単射}\quad f\colon \boldsymbol{X} \longrightarrow \boldsymbol{X},$$
$$\text{線型変換}\quad \varphi\colon \boldsymbol{V}_E{}^n \longrightarrow \boldsymbol{V}_E{}^n$$

で，アフィン変換と同様に $P \in \boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}_E{}^n$ に対して

(3.29)　$$f(P+\boldsymbol{a}) = f(P)+\varphi(\boldsymbol{a})$$

を満たし，かつ任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{V}_E{}^n$ に対して

(3.30)　$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\varphi(\boldsymbol{a}), \varphi(\boldsymbol{b}))$$

が成り立つとき，(f, φ) を**合同変換**(congruence transformation) または**等長変換**という．

(VII)　Euclid 空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}_E{}^n)$ の合同変換 (f, φ) に対しては，2点 P, Q 間の距離は不変に保たれる，すなわち

(3.31)　$$\rho(P, Q) = \rho(f(P), f(Q))$$

である．逆に (f, φ) がアフィン変換であって，かつ(3.31)が成り立てば (f, φ) は合同変換である．

証明 $P, Q\in \boldsymbol{X}$ に対して $\rho(P,Q)=\|\overrightarrow{PQ}\|$, および $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$ より, 合同変換 (f,φ) に対して

$$\rho(P,Q)=\|\overrightarrow{PQ}\|=\|\varphi(\overrightarrow{PQ})\|=\|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\|=\rho(f(P),f(Q))$$

である. 逆に

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2-\|\boldsymbol{a}\|^2-\|\boldsymbol{b}\|^2)$$

より, (3.31)であれば $\|\boldsymbol{a}\|=\|\varphi(\boldsymbol{a})\|$ であるから, (3.30)の成り立つことがわかる. ▌

(VIII) 合同変換 (f,φ) に対して

(3.32) $$\cos(\angle AOB)=\cos(\angle f(A)f(O)f(B)),$$

すなわち, 合同変換によって角の大きさは不変である.

(IX) 合同変換 (f,φ) に対して, 平行 $2r$ 面体の r 次元体積は不変である.

証明 これらの量は $\boldsymbol{V}_E{}^n$ に属するベクトルの内積を用いて表わされるので, 合同変換に対して不変に保たれる. ▌

b) 合同変換群

この場合にも, 変換群と座標枠の対応は, アフィン幾何の場合と同様である.

(X) Euclid 空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}_E{}^n)$ の合同変換 (f,φ) によって, Euclid 座標枠 $\Sigma_E=(O\,;\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$ は, また Euclid 座標枠 $\Sigma_E{}^*=(f(O)\,;\varphi(\boldsymbol{e}_1),\cdots,\varphi(\boldsymbol{e}_n))$ にうつる.

逆に, 任意に Euclid 座標枠 $\Sigma_E{}'=(O'\,;\boldsymbol{e}_1{}',\cdots,\boldsymbol{e}_n{}')$ をとるとき, Σ_E を $\Sigma_E{}'$ にうつす変換, すなわち

$$f(O)=O',$$
$$\varphi(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{e}_i{}',\qquad i=1,\cdots,n$$

となる合同変換 (f,φ) はつねに存在して, かつただ一つに定まる.

証明 まず合同変換 (f,φ) に対して $\Sigma_E{}^*$ も Euclid 座標枠であることは

$$(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=\delta_{ij},\qquad i,j=1,\cdots,n$$

より, φ が内積を保つことから

$$(\varphi(\boldsymbol{e}_i),\varphi(\boldsymbol{e}_j))=\delta_{ij}$$

となることからわかる.

逆に, 任意に Σ_E と $\Sigma_E{}'$ とを与えるとき

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{e}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{e}_i{}'\qquad(\lambda_i\in\boldsymbol{R}),$$

$$f(O+\boldsymbol{a})=O'+\varphi(\boldsymbol{a}) \qquad (\boldsymbol{a}\in \boldsymbol{V}_E{}^n)$$

によって (f,φ) を定義すれば，たしかに $(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{V}_E{}^n)$ の合同変換となっている．しかも Σ_E を Σ_E' にうつす合同変換はこの (f,φ) に限ることは明らかである．▌

これによって，Euclid 空間 $(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{V}_E{}^n)$ の合同変換は，ちょうど Euclid 座標枠 Σ_E' のとり方だけ沢山あることがわかった．

(XI)　(i)　Euclid 空間 $(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{V}_E{}^n)$ の合同変換 (f,φ) の全体は

$$(f_1,\varphi_1)\circ(f_2,\varphi_2)=(f_1\circ f_2,\ \varphi_1\circ\varphi_2),$$
$$(f,\varphi)^{-1}=(f^{-1},\ \varphi^{-1})$$

によって，合同変換群 $\boldsymbol{G}_E{}^n$ を作る．

(ii)　特に $(f,1_{\boldsymbol{V}_E{}^n})$ の形の合同変換を**平行移動**という．平行移動の全体 $\boldsymbol{T}^n$ はベクトル空間 $\boldsymbol{V}_E{}^n$ と線型同型であり，かつ合同変換群 $\boldsymbol{G}_E{}^n$ の正規部分群を作る．

(iii)　$\boldsymbol{G}_E{}^n/\boldsymbol{T}^n\cong \boldsymbol{O}(n)$,

ここに $\boldsymbol{O}(n)$ は n 次元内積ベクトル空間 $\boldsymbol{V}_E{}^n$ の直交変換群を表わす．

(iv)　合同変換群 $\boldsymbol{G}_E{}^n$ は，Euclid 空間 $(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{V}_E{}^n)$ に可移に作用する．すなわち，任意の $P,Q\in\boldsymbol{X}$ に対して，点 P を点 Q にうつす合同変換が必ず存在する．$\boldsymbol{X}$ の任意の1点 P の固定群，すなわち点 P を固定する合同変換の全体は $\boldsymbol{O}(n)$ と同型である．

証明　アフィン変換群の場合(§2.5)と全く同様である．ただし，アフィン変換群の場合の $\boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^n)$ を $\boldsymbol{O}(n)$ でおきかえねばならない．▌

アフィン空間の場合と同様に Euclid 空間 $(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{V}_E{}^n)$ の直交座標枠 $\Sigma_E=(O\,;\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$ を一つ固定する．点 $P\in\boldsymbol{X}$ および合同変換 (f,φ) による P の像 $f(P)$ の Σ_E に関する座標をそれぞれ $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, $(\mu_1,\cdots,\mu_n)$ とすれば

$$\begin{bmatrix}1\\ \mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ \alpha_1 & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \vdots & & \cdots\cdots & \\ \alpha_n & \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{bmatrix}, \tag{3.33}$$

ここに $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ は n 次元数ベクトル，

$$\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n}\\ & \cdots\cdots & \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn}\end{bmatrix}=A$$

は n 次直交行列となる．逆に $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ を任意の n 次元数ベクトル，A を任意の n 次直交行列とすれば，(3.33)は，合同変換を定める．

§3.4 相似変換と等積変換

a) 相似変換

ここで Klein の立場にもどってみよう．すなわち，幾何とは，ある基礎集合 $\boldsymbol{X}$ と，$\boldsymbol{X}$ の或る変換群 $\boldsymbol{G}$ とによって特徴づけられた．

上において，$\boldsymbol{X}$ として n 次元 Euclid 空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}_E{}^n)$ の基礎集合をとるとき，$\boldsymbol{G}$ としてアフィン変換群 $\boldsymbol{G}_A{}^n$，合同変換群 $\boldsymbol{G}_E{}^n$ をとると，それぞれアフィン幾何および Euclid 幾何が得られた：

$$\boldsymbol{G}_A{}^n \supseteqq \boldsymbol{G}_E{}^n \supseteqq \boldsymbol{T}^n$$

$(\boldsymbol{T}^n \cong \boldsymbol{V}^n$：平行移動群)，かつ $\boldsymbol{T}^n$ は $\boldsymbol{G}_A{}^n$ の正規部分群で

$$\boldsymbol{G}_A{}^n/\boldsymbol{T}^n \cong \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^n), \qquad \boldsymbol{G}_E{}^n/\boldsymbol{T}^n \cong \boldsymbol{O}(n)$$

であった．

ここで $\boldsymbol{X}$ は同じ空間をとり，変換群 $\boldsymbol{G}$ として別のものを考えてみよう．

定義 3.11 Euclid 空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}_E{}^n)$ のアフィン変換 (f, φ) が**相似変換**であるとは，この変換に対して或る $\lambda \in \boldsymbol{R}$ が定まり，任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{V}_E{}^n$ に対して

$$(\varphi(\boldsymbol{a}), \varphi(\boldsymbol{b})) = \lambda^2 (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \tag{3.34}$$

が成り立つことをいう．

(3.34)の条件は，(II), (3.10)によって

$$\|\varphi(\boldsymbol{a})\|^2 = \lambda^2 \|\boldsymbol{a}\|^2 \tag{3.35}$$

と同値である．λ^2 をこの相似変換の**拡大率**と呼ぶ．

合同変換は(3.34)または(3.35)において $\lambda^2=1$ の場合であるから，相似変換の一種である．

また，任意の $\lambda>0$ に対して

$$\varphi_\lambda(\boldsymbol{a}) = \lambda \boldsymbol{a} \qquad (\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}_E{}^n) \tag{3.36}$$

とおくとき，φ_λ は $\boldsymbol{V}_E{}^n$ の線型自己同型すなわち φ_λ: $\boldsymbol{V}_E{}^n \cong \boldsymbol{V}_E{}^n$ で，かつ(3.34)を満足する．ゆえに，任意の $O, O' \in \boldsymbol{X}$ に対して

$$f(O) = O', \qquad f(P) = O' + \varphi_\lambda(\overrightarrow{OP}) \qquad (P \in \boldsymbol{X}) \tag{3.37}$$

とおくと，(f, φ_λ) は拡大率 λ^2 の相似変換である．

(XII)　(i)　Euclid 空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}_E{}^n)$ の相似変換の全体 $\boldsymbol{G}_S{}^n$ は変換群を作る．$\boldsymbol{G}_S{}^n$ を**相似変換群**という．

相似変換群 $\boldsymbol{G}_S{}^n$ は合同変換群 $\boldsymbol{G}_E{}^n$ を含む．

(ii)　$\boldsymbol{G}_S{}^n$ も平行移動群 $\boldsymbol{T}^n$ を正規部分群として含む．また任意の $O \in \boldsymbol{X}$ に対して，O の固定群を $\boldsymbol{S}^n(O)$ とすれば

$$\boldsymbol{G}_S{}^n = \boldsymbol{T}^n \cdot \boldsymbol{S}^n(O) \qquad (\text{半直積}) \tag{3.38}$$

となる．したがって $\boldsymbol{G}_S{}^n/\boldsymbol{T}^n \cong \boldsymbol{S}^n(O)$ となる．

(iii)
$$\boldsymbol{S}^n(O) \cong \boldsymbol{O}(n) \times \boldsymbol{R}^+ \subseteq \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}_E{}^n), \tag{3.39}$$

ただし $\boldsymbol{R}^+$ は正の実数全体の作る乗法群で，$\boldsymbol{R}^+$ と同型な $\boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}_E{}^n)$ の部分群として(3.36)の $\{\varphi_\lambda \mid \lambda \in \boldsymbol{R}^+\}$ より成る．

すなわち，相似変換 (f, φ) に現われる $\boldsymbol{V}_E{}^n$ の線型自己同型 φ は，或る直交変換 $\varphi' \in \boldsymbol{O}(n)$ と，或る φ_λ との積として，一意に表わされる．

証明　(i), (ii)は合同変換群の場合とまったく同様である．

(iii)　相似変換 (f, φ) の拡大率を λ^2 とするとき，$\varphi' = \varphi \cdot \varphi_\lambda{}^{-1}$ とおけば，φ' は拡大率1の相似変換に対応し，したがって直交変換となる．一方 φ_λ は $\boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}_E{}^n)$ の中心に属するので，(3.39)において $\boldsymbol{O}(n) \times \boldsymbol{R}^+$ は直積となる．▌

(XIII)　Euclid 空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}_E{}^n)$ の任意の相似変換 (f, φ) に対して，角の大きさは不変に保たれる．すなわち，任意の3点 P, Q, R の作る角 $\angle QPR$ の大きさ θ と，$\angle f(Q)f(P)f(R)$ の大きさ θ' とは等しい．

逆に $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}_E{}^n)$ のアフィン変換 (f, φ) によって，任意の角の大きさが不変に保たれるならば，(f, φ) は相似変換である．

証明　$\angle QPR$ と $\angle f(Q)f(P)f(R)$ とに対して

$$\cos\theta = \frac{(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})}{\|\overrightarrow{PQ}\| \cdot \|\overrightarrow{PR}\|}, \qquad \cos\theta' = \frac{(\varphi(\overrightarrow{PQ}), \varphi(\overrightarrow{PR}))}{\|\varphi(\overrightarrow{PQ})\| \cdot \|\varphi(\overrightarrow{PR})\|} = \frac{\lambda^2(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})}{\lambda\|\overrightarrow{PQ}\| \cdot \lambda\|\overrightarrow{PR}\|}$$

であるから，$\theta = \theta'$ となる．

逆に $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}_E{}^n)$ のアフィン変換 (f, φ) に対して，角の大きさが不変に保たれるならば，$\boldsymbol{X}$ 上の任意の三角形 $\triangle PQR$ に対して

$$\frac{\|\overrightarrow{QR}\|}{\sin\alpha} = \frac{\|\overrightarrow{PR}\|}{\sin\beta} = \frac{\|\overrightarrow{PQ}\|}{\sin\gamma}$$

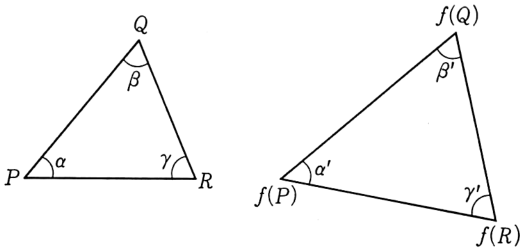


図 3・4

であるので，ある $\lambda>0$ に対して

$$\|\varphi(\overrightarrow{PQ})\| = \lambda\|\overrightarrow{PQ}\|, \quad \|\varphi(\overrightarrow{PR})\| = \lambda\|\overrightarrow{PR}\|, \quad \|\varphi(\overrightarrow{QR})\| = \lambda\|\overrightarrow{QR}\|$$

となる．いま $\overrightarrow{PQ}$ を基準にとり，$R \in \boldsymbol{X}$ を自由に動かせば，任意の $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{PR} \in \boldsymbol{V}_E{}^n$ に対して

$$\|\varphi(\boldsymbol{a})\| = \lambda\|\boldsymbol{a}\|$$

となる．よって，(f, φ) は相似変換となる．∎

さて，基礎集合 $\boldsymbol{X}$ と，相似変換群 $\boldsymbol{G}_S{}^n$ とによって

$$\textbf{相似幾何} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{G}_S{}^n)$$

が定義される．おのおのの相似変換に対して角の大きさは不変に保たれ，逆に角の大きさを不変に保つアフィン変換は相似変換となることから，相似幾何的性質が特徴づけられる．われわれの学んだ Euclid 幾何の中には，合同幾何と相似幾何との両者が含まれている．

b）等積変換

相似変換群 $\boldsymbol{G}_S{}^n$ は，アフィン変換群 $\boldsymbol{G}_A{}^n$ に含まれ，合同変換群 $\boldsymbol{G}_E{}^n$ を含むものである．同様に，次に述べる等積変換群 $\boldsymbol{G}_{SP}{}^n$ も，$\boldsymbol{G}_A{}^n$ と $\boldsymbol{G}_E{}^n$ との間に位置するものである．

定義 3.12　Euclid 空間 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}_E{}^n)$ のアフィン変換 (f, φ) において，任意の平行 $2n$ 面体の体積 $V^n(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ の絶対値が不変に保たれるとき，(f, φ) を**等積変換**という．等積変換の全体 $\boldsymbol{G}_{SP}{}^n$ は変換群を作る．これを等積変換群という．

$\boldsymbol{V}_E{}^n$ の線型自己同型 φ で，$V^n(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ の絶対値を不変に保つもの全体 $\boldsymbol{SL}(\boldsymbol{V}_E{}^n)$ は $\boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}_E{}^n)$ の正規部分群を作る．$\boldsymbol{SL}(\boldsymbol{V}_E{}^n)$ を $\boldsymbol{V}_E{}^n$ 上の**特殊線型群** (special linear group) という．そのとき，等積変換群 $\boldsymbol{G}_{SP}{}^n$ は平行移動群 $\boldsymbol{T}^n$ を

正規部分群として含み，

$$\boldsymbol{G_{SP}}^n/\boldsymbol{T}^n \cong \boldsymbol{SL}(\boldsymbol{V_E}^n)$$

となる．

$\boldsymbol{X}$ の中で，アフィン座標枠 $\Sigma_A=(O\,;\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$ を一つとる．

$$\boldsymbol{a}_1=\overrightarrow{P_0P_1},\qquad\cdots,\qquad \boldsymbol{a}_n=\overrightarrow{P_0P_n}$$

で作られる平行 $2n$ 面体の体積 $V^n(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ は，アフィン変換 (f,φ)：

$$\varphi(\boldsymbol{e}_j)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\boldsymbol{e}_i,\qquad j=1,\cdots,n$$

によって

$$V^n(\varphi(\boldsymbol{a}_1),\cdots,\varphi(\boldsymbol{a}_n))=|A|\cdot V^n(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$$

(ただし $A=(\alpha_{ij})$ とする)となる．よって (f,φ) が等積変換であるための必要十分条件は，アフィン座標枠 Σ_A を一つ定めるとき，φ に対応する $n\times n$ 行列 A の行列式の絶対値が1であることが必要かつ十分である．すなわち，Σ_A を固定するとき，同型

$$\boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V_E}^n)\cong \boldsymbol{GL}(n,\boldsymbol{R})$$

において

$$\boldsymbol{SL}(\boldsymbol{V_E}^n)\cong \boldsymbol{SL}(n,\boldsymbol{R})=\{A\in \boldsymbol{GL}(n,\boldsymbol{R})\mid |A|=\pm1\}$$

と表わされる．$\boldsymbol{SL}(n,\boldsymbol{R})$ を $\boldsymbol{n}$ **次特殊線型群**という．(ふつうは $\boldsymbol{SL}(n,\boldsymbol{R})=\{A\mid |A|=1\}$ と定義する．)

さて，基礎集合 $\boldsymbol{X}$ と，等積変換群 $\boldsymbol{G_{SP}}^n$ とから

$$\textbf{等積幾何}=(\boldsymbol{X},\boldsymbol{G_{SP}}^n)$$

が定義される．この幾何においては，平行 $2n$ 面体の体積 V^n が各等積変換に対して不変に保たれ，逆に，平行 $2n$ 面体の体積を不変に保つアフィン変換の全体として $\boldsymbol{G_{SP}}^n$ が特徴づけられた．

以上の各種変換群の包含関係をしらべると

(3.40)
$$\boldsymbol{G_A}^n \begin{array}{c} \diagup\ \boldsymbol{G_S}^n\ \diagdown \\ \diagdown\ \boldsymbol{G_{SP}}^n\ \diagup \end{array} \boldsymbol{G_E}^n — \boldsymbol{T}^n$$

であって，$\boldsymbol{T}^n$ は $\boldsymbol{G_A}^n$ の正規部分群であるので，$\boldsymbol{T}^n$ による剰余群を作れば，

(3.41)
$$\boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V_E}^n) \begin{array}{c} \diagup\ \boldsymbol{O}(n)\times\boldsymbol{R}^+\ \diagdown \\ \diagdown\ \boldsymbol{SL}(\boldsymbol{V_E}^n)\ \diagup \end{array} \boldsymbol{O}(n)$$

$\neq B'$ より $\lambda\neq 0$, $\mu\neq 0$, $\nu\neq 0$ でなければならない．よってその解の1組が求める f を定める．

(ii)　解 f の一意性：(i)の場合と同様に，任意の異なる3点を固定する $f\in \boldsymbol{G}_P{}^1$ は恒等変換であることをいえばよい．また，同様に，特定の異なる3点を固定する f は恒等変換に限ることをいえばよい．特定の3点として，(i)の A_0, B_0, C_0 をとろう．(4.22), (4.23)は

$$\begin{bmatrix}\alpha_{00}\\ \alpha_{10}\end{bmatrix}=\nu\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}\alpha_{01}\\ \alpha_{11}\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},$$

$$\mu\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\nu\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

である．よって $\lambda=\mu=\nu$，したがって

$$\begin{bmatrix}\alpha_{00} & \alpha_{01}\\ \alpha_{10} & \alpha_{11}\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

がただ一つの解 $f\in \boldsymbol{G}_P{}^1$ となる．▌

ここで $\boldsymbol{P}^1$ の斉次座標について図形を用いて説明しよう．

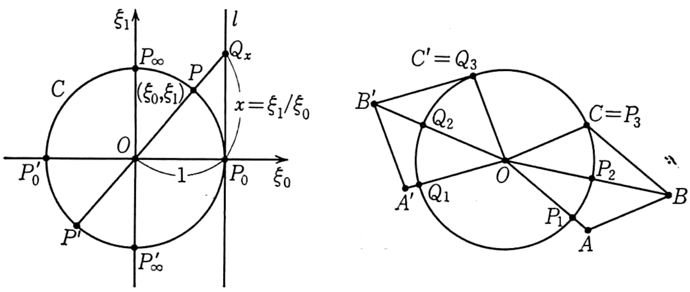


図 4・2

図4.2のように平面上に半径1の円周 C を画き，点 P_0 で接線 l を引く．$\boldsymbol{P}^1 \ni P(\xi_0, \xi_1)$ に対して原点 O(円の中心)を通り，(ξ_0, ξ_1) 方向の直線 $l(\xi_0, \xi_1)$: $\xi_1 x-\xi_0 y=0$ をひく．この直線は円周と2点 P, P' で交わる．そのうち，円周 C の右半分と交わる方を P とし，

$$\boldsymbol{P}^1\ni P(\xi_0, \xi_1)\longrightarrow P$$

を対応させる．ただし $l(0, \xi_1)$ は l と平行になり，これには同一視される二つの

点 P_∞, P_∞' を対応させる．このようにして，$\boldsymbol{P}^1$ と半円周とが対応づけられる．半円周上の点 P に対して，OP と l との交点を Q_x とすると，

$$\overline{P_0Q_x} = x = \frac{\xi_1}{\xi_0}$$

である．すなわち，半円周から P_∞(および P_∞')を除外した開いた半円周と，直線 l とは1対1に対応がつけられた．このようにして，全単射：

$$\boldsymbol{P}^1 = \boldsymbol{A}^1 \cup \{P_\infty\} \longrightarrow l \cup \{\infty\}$$

が得られる．

$\boldsymbol{P}^1$ に(開半円周)$\cup \{P_\infty\}$ を1対1に対応させるよりは，$\boldsymbol{P}^1$ と全円周との対応を考え，$P(\xi_0, \xi_1) \to l(\xi_0, \xi_1) \to l(\xi_0, \xi_1) \cap C = \{P, P'\}$ という1対2の対応を考える方が自然であろう．この意味で，円周 C は $\boldsymbol{P}^1$ の2重の被覆となっている．

さて(4.21)に見たように，$\boldsymbol{P}^1$ の射影変換は，アフィン平面 (ξ_0, ξ_1) で，原点を固定したアフィン変換として表わされる．これによって $\boldsymbol{P}^1$ 上の任意の3点 P_1, P_2, P_3 を任意の3点 Q_1, Q_2, Q_3 にうつすことができるということは，図4.2に見るように O を一つの頂点とする平行四辺形 $OABC$ を，或るアフィン写像によって平行四辺形 $OA'B'C'$ にうつして，OA, OB, OC と円周との交わりを P_1, P_2, P_3, OA', OB', OC' との交わりを Q_1, Q_2, Q_3 とすることができるということと同値である．ただし，円周 C 上の点と $\boldsymbol{P}^1$ との対応は，上のような2対1の対応を考えている．

c) 射影座標枠

ここで，$\boldsymbol{P}^1$ の座標枠について考えよう．アフィン幾何や合同幾何で見たように，一般に幾何 $(\Omega, \boldsymbol{G})$ において，**座標枠**とは次の性質をもつものであった．

(i) 或る座標枠 Σ に変換 $f \in \boldsymbol{G}$ を作用させると，$f(\Sigma)$ も一つの座標枠となる．

(ii) 任意に二つの座標枠 Σ, Σ' を与えると，$f(\Sigma) = \Sigma'$ となる変換 $f \in \boldsymbol{G}$ は必ず存在して，ただ一つに定まる．

そこで，(III)によって，射影直線の場合には，次のように射影座標枠を定めることができる．

定義 4.1 射影直線 $\boldsymbol{P}^1$ において，その上の異なる3点 $(P_0, P_\infty; P_1)$ を**射影座標枠** Σ_P という：

(4.24)　　$$\Sigma_P = (P_0, P_\infty; P_1).$$

ここに，P_0 を**原点**，P_∞ を**無限遠点**，P_1 を**単位点**という．

このように定義すれば，上記(i)，(ii)の性質が成り立つことは(III)よりわかる．

射影座標枠 Σ_P に関して点 P の斉次座標が (ξ_0, ξ_1) であり，Σ_P' に関して点 P の座標が (η_0, η_1) であれば，両者の間の関係はどうなっているであろうか．

実はわれわれは $\boldsymbol{P}^1 = \boldsymbol{A}^1 \cup \{P_\infty{}^0\}$ と定め $\Sigma_P = (P_0, P_\infty; P_1)$ とするとき，この P_∞ が最初に定めた無限遠点 $P_\infty{}^0$ の場合にしか点 P の斉次座標を定義していない．

(A)　$$\Sigma_P = (P_0, P_\infty; P_1), \qquad \Sigma_P' = (Q_0, P_\infty; Q_1)$$

の場合に，点 P の両者に関する斉次座標をそれぞれ (ξ_0, ξ_1)，(η_0, η_1) とする．$\boldsymbol{P}^1 = \boldsymbol{A}^1 \cup \{P_\infty\}$ に対して $\boldsymbol{A}^1$ のアフィン座標枠はそれぞれ

$$\Sigma_A = (P_0 ; \overrightarrow{P_0P_1}), \qquad \Sigma_A' = (Q_0 ; \overrightarrow{Q_0Q_1})$$

となる．よって Σ_A に関して

$$Q_0 = P_0 + \overrightarrow{P_0Q_0}, \qquad \overrightarrow{P_0Q_0} = \alpha\overrightarrow{P_0P_1},$$
$$\overrightarrow{Q_0Q_1} = \beta\overrightarrow{P_0P_1}, \qquad \beta \neq 0$$

とすれば，§2.2によって

$$\frac{\xi_1}{\xi_0} = \alpha + \beta\frac{\eta_1}{\eta_0}$$

あるいは

$$\lambda\begin{bmatrix}\xi_0\\ \xi_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ \alpha & \beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_0\\ \eta_1\end{bmatrix} \tag{4.25}$$

と表わされる．

しかし，Σ_P と Σ_P' とにおいて無限遠点が動く場合には，斉次座標の間の関係はまだ定められていない．

(B)　$$\Sigma_P = (P_0, P_\infty; P_1), \qquad \Sigma_P{}^0 = (P_\infty, P_0; P_1),$$

すなわち，P_0 と P_∞ とを入れかえ，P_1 をもとのままにした場合の点 P の Σ_P, $\Sigma_P{}^0$ に関する斉次座標をそれぞれ (ξ_0, ξ_1)，(η_0, η_1) とするとき，0座標と1座標を入れかえて

$$\lambda\xi_0 = \eta_1, \qquad \lambda\xi_1 = \eta_0$$

であると定める．あるいは

$$\lambda\begin{bmatrix}\xi_0\\ \xi_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_0\\ \eta_1\end{bmatrix}. \tag{4.26}$$

(IV)　射影直線 $\boldsymbol{P}^1$ の二つの射影座標枠 $\Sigma_P=(P_0, P_\infty; P_1)$, $\Sigma_P'=(Q_0, Q_\infty; Q_1)$ に関する点 P の斉次座標をそれぞれ (ξ_0, ξ_1), (η_0, η_1) とすると，或る行列式が 0 でない 2×2 行列 (α_{ij}) があって

$$\lambda\begin{bmatrix}\xi_0\\ \xi_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{00} & \alpha_{01}\\ \alpha_{10} & \alpha_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_0\\ \eta_1\end{bmatrix} \tag{4.27}$$

と表わされる．

証明　上に述べた(A), (B)の場合に，(4.25), (4.26)は共に(4.27)の形になっている．よって一般の場合は(A), (B)の座標変換をいくつか結合して得られることを示せば十分である．さて $\Sigma_P=(A, B; C)$, $\Sigma_P'=(A', B'; C')$ とする．Σ_P から Σ_P' への移行は($B=B'$ の場合は(A)であるので，$B\neq B'$ として)点 D を B, B' と異なる点を任意に選んで

$$(A, B; C)\xrightarrow{\text{(A)}}(B', B; D)\xrightarrow{\text{(B)}}(B, B'; D)\xrightarrow{\text{(A)}}(A', B'; C')$$

と(A), (B)型の変換を組み合せて得られる．よって(4.27)は証明された．▌

さて(4.27)の行列 (α_{ij}) を実際に求めるには，Q_0, Q_1, Q_∞ の Σ_P に関する斉次座標をそれぞれ (α_0, α_1), (β_0, β_1), (γ_0, γ_1) とするとき

$$\lambda\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{00} & \alpha_{01}\\ \alpha_{10} & \alpha_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\qquad \mu\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{00} & \alpha_{01}\\ \alpha_{10} & \alpha_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},$$
$$\nu\begin{bmatrix}\gamma_0\\ \gamma_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{00} & \alpha_{01}\\ \alpha_{10} & \alpha_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \tag{4.28}$$

であるように (α_{ij}) を定めればよい．これは

$$\lambda\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{bmatrix}+\nu\begin{bmatrix}\gamma_0\\ \gamma_1\end{bmatrix}=\mu\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{bmatrix} \tag{4.29}$$

であるように λ, μ, ν を定め

$$\begin{bmatrix}\alpha_{00} & \alpha_{01}\\ \alpha_{10} & \alpha_{11}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\alpha_0 & \nu\gamma_0\\ \lambda\alpha_1 & \nu\gamma_1\end{bmatrix}$$

とすればよい．

§4.3　複　比

a) 定　義

次に射影不変量についてしらべてみよう．合同変換で不変な量としては線分の長さがあり，アフィン変換で不変な量として，一直線上にある二つの線分の長さ

の比があった：

f_0：合同変換 $\Longrightarrow \|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{f_0(P)f_0(Q)}\|$,

f_1：アフィン変換 $\Longrightarrow [\overrightarrow{PQ} = \lambda\overrightarrow{PR} \Longrightarrow \overrightarrow{f_1(P)f_1(Q)} = \lambda\overrightarrow{f_1(P)f_1(R)}]$,

ただし，P, Q, R は一直線上の 3 点とする．今後しばらく $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PR}$ のとき $\lambda=\overrightarrow{PQ}/\overrightarrow{PR}$ と表わすこととしよう．

これと類似な性質が射影変換に対して成り立つであろうか．いま $\boldsymbol{P}^1$ 上に

$$A = P(\xi_0, \xi_1), \quad B = P(\eta_0, \eta_1), \quad C = P(\zeta_0, \zeta_1), \quad D = P(\theta_0, \theta_1)$$

をとる．いまこれらの点はすべて P_∞ とは異なる点とする．射影変換 f によって $f(A)=A'$, $f(B)=B'$, $f(C)=C'$, $f(D)=D'$ とし

$$A' = P(\xi_0', \xi_1'), \quad B' = P(\eta_0', \eta_1'), \quad C' = P(\zeta_0', \zeta_1'), \quad D' = P(\theta_0', \theta_1')$$

とする．すなわち，或る $\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{10}, \alpha_{11}$ によって

$$(4.30) \quad \begin{bmatrix} \xi_0' \\ \xi_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \eta_0' \\ \eta_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \end{bmatrix}, \qquad \cdots$$

とする．これらの点もすべて P_∞ と異なるものとして，$\boldsymbol{A}^1$ 上で

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AD}} = \frac{(\zeta_1/\zeta_0)-(\xi_1/\xi_0)}{(\theta_1/\theta_0)-(\xi_1/\xi_0)} = \frac{\theta_0}{\zeta_0} \cdot \frac{(\xi_0\zeta_1-\xi_1\zeta_0)}{(\xi_0\theta_1-\xi_1\theta_0)}$$

に対して

$$\frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{A'D'}} = \frac{\theta_0'}{\zeta_0'} \cdot \frac{(\xi_0'\zeta_1'-\xi_1'\zeta_0')}{(\xi_0'\theta_1'-\xi_1'\theta_0')}$$

となる．(4.30) を用いれば

$$\xi_0'\zeta_1'-\xi_1'\zeta_0' = (\alpha_{00}\alpha_{11}-\alpha_{01}\alpha_{10})(\xi_0\zeta_1-\xi_1\zeta_0),$$
$$\xi_0'\theta_1'-\xi_1'\theta_0' = (\alpha_{00}\alpha_{11}-\alpha_{01}\alpha_{10})(\xi_0\theta_1-\xi_1\theta_0).$$

したがって

$$\frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{A'D'}} = \frac{\theta_0'}{\zeta_0'} \cdot \frac{(\xi_0\zeta_1-\xi_1\zeta_0)}{(\xi_0\theta_1-\xi_1\theta_0)}$$

となって，この値は必ずしも $\overrightarrow{AC}/\overrightarrow{AD}$ とは一致しない．すなわち

$$\frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{A'D'}} = \frac{\theta_0'\zeta_0}{\theta_0\zeta_0'} \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AD}}$$

となる．そこで (A, C, D) の代りに (B, C, D) を用いると

$$\frac{\overrightarrow{B'C'}}{\overrightarrow{B'D'}} = \frac{\theta_0'\zeta_0}{\theta_0\zeta_0'}\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BD}}$$

という関係が成り立つ．この係数 $\theta_0'\zeta_0/\theta_0\zeta_0'$ は両者に共通であるので，さらに比をとれば

$$\frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{A'D'}}\cdot\frac{\overrightarrow{B'D'}}{\overrightarrow{B'C'}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AD}}\cdot\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC}}$$

が成り立つ．

定義 4.2　$\boldsymbol{P}^1$ 上の4点 A, B, C, D に対して，それらの**複比**(cross ratio)(または**非調和比**(anharmonic ratio))$(A, B; C, D)$ を $A=P(\xi_0, \xi_1)$, $B=P(\eta_0, \eta_1)$, $C=P(\zeta_0, \zeta_1)$, $D=P(\theta_0, \theta_1)$ に対して

$$(A, B; C, D) = \frac{(\xi_0\zeta_1-\xi_1\zeta_0)}{(\xi_0\theta_1-\xi_1\theta_0)}\cdot\frac{(\eta_0\theta_1-\eta_1\theta_0)}{(\eta_0\zeta_1-\eta_1\zeta_0)} \tag{4.31}$$

とおく．もしも A, B, C, D がすべて P_∞ と異なるときは

$$(A, B; C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AD}}\cdot\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC}} \tag{4.32}$$

となる．ここで A, B, C, D がすべて異なれば，$(A, B; C, D)\neq 0, \neq\infty$ である．また A, B, C, D の中に等しい点があったとしても，それらのうち3点は異なっていれば，$(A, B; C, D)$ の値は，$0, \infty$ も含めて確定値をとる．

注意 1　斉次座標 (ξ_0, ξ_1), (η_0, η_1), $\cdots$ の代りに $(\lambda\xi_0, \lambda\xi_1)$, $(\mu\eta_0, \mu\eta_1)$, $\cdots$ $(\lambda\neq 0, \mu\neq 0, \cdots)$ を用いても(4.31)の値は同一である．

注意 2　複比 $(A, B; C, D)$ を定義するのに A, B, C, D の一つの射影座標枠 Σ_P に関する斉次座標を用いて定義した．したがって別の射影座標枠 Σ_P' に関する斉次座標を用いても $(A, B; C, D)$ の値が同一であることを確かめなければならない．これは A, B, C, D の Σ_P' に関する座標を $'$ をつけて表わすとき，(IV)によって

$$\begin{vmatrix}\xi_0 & \zeta_0\\ \xi_1 & \zeta_1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\alpha_{00} & \alpha_{01}\\ \alpha_{10} & \alpha_{11}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\xi_0' & \zeta_0'\\ \xi_1' & \zeta_1'\end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix}\xi_0 & \theta_0\\ \xi_1 & \theta_1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\alpha_{00} & \alpha_{01}\\ \alpha_{10} & \alpha_{11}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\xi_0' & \theta_0'\\ \xi_1' & \theta_1'\end{vmatrix}, \qquad \cdots$$

となるので，(4.31)の右辺の値は，$\xi_0, \xi_1, \cdots$ の代りに $\xi_0', \xi_1', \cdots$ を用いても同一であることがわかる．

例 4.1

$$(P_\infty, P; Q, R) = \frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{PQ}}, \tag{4.33$_1$}$$

特に

$$(P_\infty, P_0\,;Q, R)=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\eta_0\\ \eta_1\end{pmatrix}, \tag{4.33$_2$}$$

ただし $Q=P(\eta_0, \eta_1)$, $R=P(\xi_0, \xi_1)$ とする．さらに

$$(P_\infty, P_0\,;P_1, R)=\frac{\xi_1}{\xi_0} \tag{4.33$_3$}$$

となる．

［解］ $P_\infty=P(0,1)$, $P=P(\zeta_0, \zeta_1)$, $Q=P(\eta_0, \eta_1)$, $R=P(\xi_0, \xi_1)$ に対して，(4.31)によって

$$(P_\infty, P\,;Q, R)=\frac{-\eta_0}{-\xi_0}\cdot\frac{(\zeta_0\xi_1-\zeta_1\xi_0)}{(\zeta_0\eta_1-\zeta_1\eta_0)}=\left(\frac{\xi_1}{\xi_0}-\frac{\zeta_1}{\zeta_0}\right)\Big/\left(\frac{\eta_1}{\eta_0}-\frac{\zeta_1}{\zeta_0}\right)=\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{PQ}}$$

である．ここで $P=P_0=P(1,0)$ を代入すれば (4.33)$_2$ となり，さらに $Q=P_1=P(1,1)$ を代入すれば，(4.33)$_3$ となる．▌

例 4.2 $(A, B\,;P, Q)\cdot(A, B\,;Q, R)=(A, B\,;P, R)$.

［解］ $\boldsymbol{P}^1$ の射影座標枠を $A=P_\infty$, $B=P_0$ とし，(4.33)$_2$ を用いれば，直ちに確かめられる．▌

b）複比の射影不変性

(V) 射影直線 $\boldsymbol{P}^1$ 上の 4 点 A, B, C, D の複比 $(A, B\,;C, D)$ の値は，$\boldsymbol{P}^1$ の任意の射影変換 f によって不変に保たれる：

$$(A, B\,;C, D)=(f(A), f(B)\,;f(C), f(D)).$$

すなわち，4 点の複比は，射影変換群に関する不変量である．逆に射影変換は，複比を不変に保つことによって特徴づけられる．

証明 前半はすでに証明してある．よって逆の部分を証明しよう．$f:\boldsymbol{P}^1\to\boldsymbol{P}^1$ が複比を保つとする．射影座標枠 $\Sigma_P=(P_0, P_\infty\,;P_1)$ を一つ定め，$f(P_0)=Q_0$, $f(P_1)=Q_1$, $f(P_\infty)=Q_\infty$ とおく．(IV)によって射影変換 g で，$g(P_0)=Q_0$, $g(P_1)=Q_1$, $g(P_\infty)=Q_\infty$ となるものが（ただ一つ）存在する．そのとき $h=g^{-1}\circ f:\boldsymbol{P}^1\to\boldsymbol{P}^1$ を考えると，$h(P_0)=P_0$, $h(P_1)=P_1$, $h(P_\infty)=P_\infty$ である．しかも，f, g^{-1} 共に複比をかえないから，任意の $P\in\boldsymbol{P}^1$ に対して

$$(P_\infty, P_0\,;P_1, P)=(P_\infty, P_0\,;P_1, h(P)) \tag{4.34}$$

が成り立つ．P および $h(P)$ の Σ_P に関する斉次座標をそれぞれ (ξ_0, ξ_1), (η_0, η_1) とすれば例 4.1, (4.33) によって (4.34) の両辺はそれぞれ ξ_1/ξ_0, η_1/η_0 に等しい．

よって

$$\frac{\xi_1}{\xi_0}=\frac{\eta_1}{\eta_0}$$

が成り立つ．よって $P=h(P)$ となる．P は任意の点であるから h は $\boldsymbol{P}^1$ の恒等写像となる．$1=g^{-1}\circ f$ より $f=g$(射影変換)となった．▌

定義 4.3　二つの射影直線 $\boldsymbol{P}_0{}^1, \boldsymbol{P}_1{}^1$ において，全単射 $f:\boldsymbol{P}_0{}^1\to\boldsymbol{P}_1{}^1$ が**射影写像**であるとは，$\boldsymbol{P}_0{}^1$ 上の任意の 4 点 A, B, C, D に対して $(A, B; C, D)=(f(A), f(B); f(C), f(D))$ が成り立つことをいう．

(**VI**)　4 点 A_1, A_2, A_3, A_4 の複比を $\lambda=(A_1, A_2; A_3, A_4)$ とする．これら 4 点の置換 σ の全体(4 文字の対称群 $\boldsymbol{S}_4$)は全体で 24 個あるが，それらによって，複比

$$\lambda(\sigma)=(A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}; A_{\sigma(3)}, A_{\sigma(4)})$$

は，6 個の値

$$\left\{\lambda,\ \frac{1}{\lambda},\ 1-\lambda,\ \frac{1}{1-\lambda},\ \frac{\lambda-1}{\lambda},\ \frac{\lambda}{\lambda-1}\right\} \tag{4.35}$$

をとる．特に λ を不変にする置換 σ $(\lambda(\sigma)=\lambda)$ の全体は

$$\boldsymbol{K}=\{1, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$$

で，$\boldsymbol{S}_4/\boldsymbol{K}$ の各剰余類に対して，(4.35)の 6 個の値の一つが対応する．

証明　(i)　複比の定義(4.31)より直ちにわかるように

$$\lambda((1, 2))=(A_2, A_1; A_3, A_4)=\frac{1}{\lambda},\qquad \lambda((3, 4))=(A_1, A_2; A_4, A_3)=\frac{1}{\lambda}$$

である．また射影座標枠を $A_1=P_\infty=P(0, 1)$ にとれば，例 4.1 により

$$(A_1, A_2; A_3, A_4)+(A_1, A_3; A_2, A_4)=\frac{\overrightarrow{A_2A_4}}{\overrightarrow{A_2A_3}}+\frac{\overrightarrow{A_3A_4}}{\overrightarrow{A_3A_2}}=\frac{\overrightarrow{A_2A_4}}{\overrightarrow{A_2A_3}}+\frac{\overrightarrow{A_4A_3}}{\overrightarrow{A_2A_3}}=\frac{\overrightarrow{A_2A_3}}{\overrightarrow{A_2A_3}}=1,$$

すなわち

$$\lambda((2, 3))=(A_1, A_3; A_2, A_4)=1-\lambda$$

となる．さて $\boldsymbol{S}_4$ は $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$ で生成されるので，$\lambda(\sigma)=(A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}; A_{\sigma(3)}, A_{\sigma(4)})$ は，上記の組み合せとしてすべて得られる．それらは，λ, $1/\lambda$, $1-\lambda$, $1/(1-\lambda)$, $1-1/\lambda=(\lambda-1)/\lambda$, $((\lambda-1)/\lambda)^{-1}=\lambda/(\lambda-1)$ の 6 個の値となる．

(ii)　$\sigma\in\boldsymbol{S}_4$ に対して

$$\lambda\longrightarrow\lambda(\sigma)$$

という1次分数変換は，6個の 2×2 行列

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-1&1\\0&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0\\1&-1\end{bmatrix}$$

による $\boldsymbol{S}_4$ の表現となっている．その核は $24/6=4$ 個の元よりなるので，実際に計算すれば，ちょうど $\boldsymbol{K}$ となることがわかる．▌

例 4.3　λ の実数値に対して，(4.35)の6個の値のうちに等しいものが生じるのは，($\lambda=0, 1, \infty$ を除くと) $\lambda=-1$, $\lambda=1/2$ に限る．

$$(P_1, P_2\,; P_3, P_4) = -1$$

のとき，4点 P_1, P_2, P_3, P_4 は**調和列点**(harmonic points)をなすという．(P_1, P_2, P_3, P_4) が調和列点であれば，(P_2, P_1, P_4, P_3)，(P_3, P_4, P_1, P_2)，(P_4, P_3, P_2, P_1) も調和列点である．

§4.4　射影平面の構成

a）射影平面の性質

射影直線 $\boldsymbol{P}^1$ がアフィン直線 $\boldsymbol{A}^1$ にただ一つの無限遠点 P_∞ を添加して得られたように，射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ もアフィン平面 $\boldsymbol{A}^2$ に無限遠要素を添加することによって得られる．すなわち

$$\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{A}^2 \cup \boldsymbol{l}_\infty \tag{4.36}$$

とおく．ただし，$\boldsymbol{l}_\infty$ は無限遠点よりなる集合とする．

ここで次の要請をする：

(A)　$\boldsymbol{A}^2$ 上の任意の直線 l は，ただ一つの無限遠点 $P_\infty(l)\in\boldsymbol{l}_\infty$ を添加することによって，射影直線 $\bar{l}=l\cup\{P_\infty(l)\}$ を作る．逆に，$\boldsymbol{P}^2$ 上の任意の射影直線は，全く $\boldsymbol{l}_\infty$ 上にあるか，または或る直線 $l\subseteq\boldsymbol{A}^2$ より $\bar{l}=l\cup\{P_\infty(l)\}$ として得られる．

さて，無限遠点全体の集合 $\boldsymbol{l}_\infty$ はどのような集合と考えるのが適当であろうか．われわれは次の性質を満たすように工夫しよう．

(B)　$\boldsymbol{P}^2$ 上の任意の異なる2点 P, Q を通る射影直線 $\bar{l}$ はつねに存在し，かつただ一つ定まる．(これを $\bar{l}(P, Q)$ と書くことにしよう．)

いま，(B)が成り立つものと仮定しよう．$\boldsymbol{A}^2$ 上に1点(原点) O を定める．$\boldsymbol{l}_\infty$ 上の任意の1点 P_∞ に対して，(B)により O と P_∞ とを通る射影直線がただ一つ定まる．(A)によって，これは $\bar{l}=l\cup\{P_\infty(l)\}$ と表わされる．すなわち，任意の

$P_\infty \in \boldsymbol{l}_\infty$ に対して

(4.37)
$$P_\infty = P_\infty(l)$$

となるような原点 O を通るアフィン直線 $l \subseteqq \boldsymbol{A}^2$ がただ一つ定まる．このことと(A)とを合せると，$\boldsymbol{l}_\infty$ と，点 O を通るアフィン直線 l 全体の集合とは1対1に対応する．

次に原点 O の代りに，$\boldsymbol{A}^2$ 上の任意の点 A をとると，任意の $P_\infty = P_\infty(l)$ に対して，A と $P_\infty(l)$ とを通る射影直線 $\bar{l}_A = l_A \cup \{P_\infty(l)\}$ がただ一つ定まる．ただし，l_A は点 A を通るアフィン直線である．もしも O と $P_\infty(l)$ とを通る射影直線 $\bar{l}$ と，A と $P_\infty(l)$ とを通る射影直線 $\bar{l}_A$ とがアフィン平面 $\boldsymbol{A}^2$ 内で点 B で交われば，$\bar{l} \cap \bar{l}_A$ は2点 $P_\infty(l)$ と B とを共有するので，(B)によって $\bar{l} = \bar{l}_A$，すなわち，$l = l_A$ となる．故に $l \neq l_A$ であれば，$\boldsymbol{A}^2$ において $l /\!/ l_A$ でなければならない．このようにしてアフィン平面 $\boldsymbol{A}^2$ 内に直線 l を動かすとき，l に対して $\bar{l} = l \cup \{P_\infty(l)\}$ となる無限遠点 $P_\infty(l) \in \boldsymbol{l}_\infty$ を対応させると

$$l_1 /\!/ l_2 \iff P_\infty(l_1) = P_\infty(l_2)$$

となることがわかる．そこで次の要請をする：

(B)*　無限遠要素 $\boldsymbol{l}_\infty$ は $P_\infty(l)$ の形の点の全体で，

(4.38)
$$P_\infty(l_1) = P_\infty(l_2) \iff l_1 /\!/ l_2$$

である．

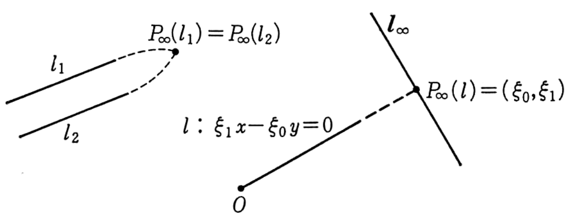


図4·3

いまアフィン平面 $\boldsymbol{A}^2$ にアフィン座標枠 $\Sigma_A = (O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ を定め，点 $P \in \boldsymbol{A}^2$ の Σ_A に関する座標を (x, y) とする．原点 O を通る直線

$$l:\ \xi_1 x - \xi_0 y = 0$$

に対して，$P_\infty(l)$ の座標を

(4.39)
$$P_\infty(l) = (\xi_0, \xi_1)$$

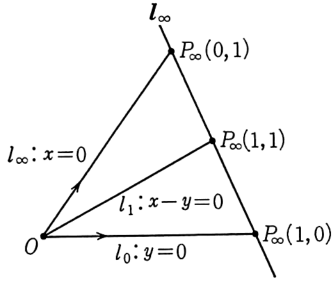


図 4・4

と定めよう．この際直線 l は，任意の $\lambda \neq 0$ に対して

$$l:\ \lambda\xi_1 x - \lambda\xi_0 y = 0$$

とも表わされるので

$$P_\infty(l) = (\xi_0, \xi_1) = (\lambda\xi_0, \lambda\xi_1)$$

である．また逆にどんな λ に対しても $\xi_0' \neq \lambda\xi_0$, $\xi_1' \neq \lambda\xi_1$ であれば，$l:\ \xi_1 x - \xi_0 y = 0$ と $l':\ \xi_1' x - \xi_0' y = 0$ とは原点を通る異なる直線であるので，$P_\infty(l) \neq P_\infty(l')$，すなわち $(\xi_0, \xi_1) \neq (\xi_0', \xi_1')$ となる．

故に，点 $P_\infty \in \boldsymbol{l}_\infty$ に対して，その斉次座標 (ξ_0, ξ_1) が一意に対応することになる．よって $\boldsymbol{A}^2$ のアフィン座標枠 Σ_A に対応して，原点を通る 3 直線

$$l_0:\ y = 0, \quad l_\infty:\ x = 0, \quad l_1:\ x - y = 0$$

をとり，

$$P_\infty(l_0) = (1, 0), \quad P_\infty(l_\infty) = (0, 1), \quad P_\infty(l_1) = (1, 1)$$

とおく．ここで，さらに次の要請をおく：

(C)　$\boldsymbol{l}_\infty$ は射影直線で，$(P_\infty(l_0), P_\infty(l_\infty); P_\infty(l_1))$ をその射影座標枠とするとき，$P_\infty(l) \in \boldsymbol{l}_\infty$ の斉次座標は (ξ_0, ξ_1) と表わされる．ただし，$\boldsymbol{A}^2$ において直線 l は

$$\xi_1 x - \xi_0 y = 0$$

と表わされるものとする．

以上の要請によって，射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ はアフィン平面 $\boldsymbol{A}^2$ に無限遠射影直線 $\boldsymbol{l}_\infty$ を添加して得られることになった．また(A), (B)*, (C)によって $\boldsymbol{l}_\infty$ を $P_\infty(l)$ の集合として定めれば，(B)が成り立っていることを，直ちに確かめることができる．

またこのように定めた射影平面がアフィン平面と異なる著しい性質として，

(VII)　$\boldsymbol{P}^2$ 内の任意の異なる二つの射影直線 $\bar{l}_1$ と $\bar{l}_2$ とは必ずただ 1 点で交わ

る．

証明　(i)　アフィン平面内の任意の異なる2直線 l_1, l_2 に対して，射影直線 $\bar{l}_1=l_1\cup\{P_\infty(l_1)\}$，$\bar{l}_2=l_2\cup\{P_\infty(l_2)\}$ とする．$\boldsymbol{A}^2$ 内で $l_1\cap l_2=\{P\}$ であれば，$l_1 \not\parallel l_2$ より $P_\infty(l_1)\neq P_\infty(l_2)$ となり，$\bar{l}_1\cap\bar{l}_2=l_1\cap l_2=\{P\}$ となる．また $\boldsymbol{A}^2$ 内で $l_1\parallel l_2$ であれば，$P_\infty(l_1)=P_\infty(l_2)$ となり，$\bar{l}_1\cap\bar{l}_2=\{P_\infty(l_1)\}$ となる．

(ii)　$\bar{l}_1=l_1\cup\{P_\infty(l_1)\}$ と無限遠射影直線 $\boldsymbol{l}_\infty$ とに対しては，$\bar{l}_1\cap\boldsymbol{l}_\infty=\{P_\infty(l_1)\}$ となる．以上二つの場合に対して定理は成り立っている．▌

b）射影平面の構成

(VIII)　要請(A), (B), (B)*, (C)が成り立つような射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ は存在する．

証明　以上のようないろいろの要請が成り立つ射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ が実際に矛盾なく存在することは，次のように $\boldsymbol{P}^2$ 上の斉次座標を考えることによって確かめられる．

三つの実数の組 (ξ_0, ξ_1, ξ_2) の全体を考える．ただし

$$(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \neq (0, 0, 0)$$

とする．ここで，(ξ_0, ξ_1, ξ_2) を斉次座標とする点 $P(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ の全体の集合を考える．すなわち

$$P(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = P(\lambda\xi_0, \lambda\xi_1, \lambda\xi_2), \qquad \lambda \neq 0,$$

かつどんな $\lambda\neq 0$ に対しても $(\xi_0', \xi_1', \xi_2')\neq(\lambda\xi_0, \lambda\xi_1, \lambda\xi_2)$ であれば

$$P(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \neq P(\xi_0', \xi_1', \xi_2')$$

とする．このような点 $P(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ の全体を $\boldsymbol{P}^2$ とおく．

集合に基づく表現をとれば，

$${}^*V^3 = \{(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \mid (\xi_0, \xi_1, \xi_2) \neq (0, 0, 0)\}$$

とし，${}^*V^3$ において同値関係

$$(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \sim (\xi_0', \xi_1', \xi_2') \Leftrightarrow \text{或る } \lambda\neq 0 \text{ に対して}$$
$$\xi_0' = \lambda\xi_0,\ \ \xi_1' = \lambda\xi_1,\ \ \xi_2' = \lambda\xi_2$$

を定義すれば，$\boldsymbol{P}^2$ は ${}^*V^3$ の同値関係 $\sim$ に関する同値類全体の集合である：

(4.40)
$$\boldsymbol{P}^2 = {}^*V^3/\sim.$$

$\boldsymbol{P}^2$ において

$$\boldsymbol{A}^2 = \{P(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \mid \xi_0\neq 0\},$$
$$\boldsymbol{l}_\infty = \{P(0, \xi_1, \xi_2) \mid (\xi_1, \xi_2) \neq (0, 0)\}$$

とおくと，

$$\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{A}^2 \cup \boldsymbol{l}_\infty$$

である．そこで

(i)　$P(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \in \boldsymbol{A}^2$，すなわち $\xi_0 \neq 0$ に対して

$$x = \frac{\xi_1}{\xi_0}, \qquad y = \frac{\xi_2}{\xi_0}$$

をアフィン座標とする点 (x, y) を対応させることにより，$\boldsymbol{A}^2$ はアフィン平面である．

(ii)　$P(0, \xi_1, \xi_2) \in \boldsymbol{l}_\infty$ に対して (ξ_1, ξ_2) を斉次座標とする射影直線上の点を対応させることにより，$\boldsymbol{l}_\infty$ は一つの射影直線である．

故に(4.36)は，射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ をアフィン平面 $\boldsymbol{A}^2$ と無限遠射影直線との和集合で表わしたことになる．次に

定義 4.4　或る $(a_0, a_1, a_2) \neq (0, 0, 0)$ に対して

(4.41)
$$a_0\xi_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_2 = 0$$

を満足する点 $P(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ の全体 $\bar{l}$ を $\boldsymbol{P}^2$ 上の'射影直線'と呼ぼう．

(i)　$(a_0, a_1, a_2) = (a_0, 0, 0)$ $(a_0 \neq 0)$ の場合に

$$\bar{l} = \{P(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \mid a_0\xi_0 = 0\} = \{P(0, \xi_1, \xi_2)\}$$

は $\boldsymbol{l}_\infty$ と一致する．

(ii)　$(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ のとき．(4.41)を満足し，かつ $\xi_0 \neq 0$ となる点 $P(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ 全体の集合 l は，$\boldsymbol{A}^2$ 上で $x = \xi_1/\xi_0$, $y = \xi_2/\xi_0$ とおくとき

(4.42)
$$a_0 + a_1x + a_2y = 0$$

を満足する点 $(x, y) \in \boldsymbol{A}^2$ の全体 l であって，l は $\boldsymbol{A}^2$ 上でアフィン直線となる．また(4.41)を満足し，かつ $\xi_0 = 0$ となる点 $P(0, \xi_1, \xi_2)$ は $a_1\xi_1 + a_2\xi_2 = 0$ すなわち，$P(0, \xi_1, \xi_2) = P(0, -a_2, a_1)$ である．この点 $P(0, \xi_1, \xi_2)$ は，(C)において l に平行で原点を通る直線

$$l^*:\ a_1x + a_2y = 0$$

に対応する点 $P_\infty(l^*)$ と一致する．よって

(4.43)
$$\bar{l} = l \cup \{P_\infty(l^*)\}, \qquad l \parallel l^*$$

と表わされ，(A), (C)で考えた射影直線と一致する．

逆に，(A), (C)によって考えられる射影直線 $\bar{l}$ は，$\bar{l} = \boldsymbol{l}_\infty$ でなければ，アフィ

ン平面 $\boldsymbol{A}^2$ 上のアフィン直線

$$l:\ a_0+a_1x+a_2y=0, \qquad (a_1, a_2)\neq(0,0)$$

より，$\bar{l}=l\cup\{P_\infty(l^*)\}$ として得られるので，上の定義にいう‘射影直線’に他ならない．

よって，上に定義した‘射影直線’と，(A), (C) で考えられた $\boldsymbol{P}^2$ 上の射影直線とはまったく同じものであることがわかった．

(iii)　$\bar{l}:\ a_0\xi_0+a_1\xi_1+a_2\xi_2=0$ と $\bar{l}':\ a_0'\xi_0+a_1'\xi_1+a_2'\xi_2=0$ とが一致するための必要十分条件は，或る $\lambda\neq0$ に対して

$$a_0'=\lambda a_0, \qquad a_1'=\lambda a_1, \qquad a_2'=\lambda a_2$$

となることである．

(iv)　‘射影直線’$\bar{l}:\ a_0\xi_0+a_1\xi_1+a_2\xi_2=0$, $(a_1, a_2)\neq(0,0)$ に対して $l=\bar{l}\cap\boldsymbol{A}^2$ とし，$P_\infty(l)=P(0, -a_2, a_1)$ とおく．このとき，

$$l\parallel l' \iff P_\infty(l)=P_\infty(l').$$

(v)　$\boldsymbol{P}^2$ 上の任意の異なる2点 P, P' を通る‘射影直線’$\bar{l}$ は存在して唯一に定まる．

何となれば $P=P(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$, $P'=P(\xi_0', \xi_1', \xi_2')$, $(\xi_0', \xi_1', \xi_2')\neq(\lambda\xi_0, \lambda\xi_1, \lambda\xi_2)$ に対して

$$\begin{cases} a_0\xi_0+a_1\xi_1+a_2\xi_2=0, \\ a_0\xi_0'+a_1\xi_1'+a_2\xi_2'=0 \end{cases}$$

の解 (a_0, a_1, a_2) は存在し，かつ一般解は $(\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2)$ である．よって P, P' を通る‘射影直線’は存在して，しかもただ一つである．

以上の考察によって，斉次座標を用いて，$\boldsymbol{P}^2$ を(4.40)で定義し，$\boldsymbol{P}^2$ 上の射影直線を(4.41)で定義すれば，(A), (B), (B)*, (C)の要請はすべて成り立つことが解析的に確かめられた．▌

例 4.4　射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ 上の射影直線 $\bar{l}$ $(\neq\boldsymbol{l}_\infty)$ に対して，$P\in\bar{l}$ の斉次座標を (ξ_0, ξ_1, ξ_2) とし，また射影直線としての $\bar{l}$ 上の任意の斉次座標を (η_0, η_1) とすれば

$$(4.44)\qquad \begin{bmatrix}\xi_0\\ \xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{00} & \alpha_{01}\\ \alpha_{10} & \alpha_{11}\\ \alpha_{20} & \alpha_{21}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_0\\ \eta_1\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}\eta_0\\ \eta_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_{00} & \beta_{01} & \beta_{02}\\ \beta_{10} & \beta_{11} & \beta_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_0\\ \xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}$$

と表わされる．

[解] (IV), (4.27)によって，$\bar{l}$ の或る一つの斉次座標 (η_0, η_1) について(4.44)を証明すればよい．$\bar{l}$ の方程式を

$$a_0\xi_0+a_1\xi_1+a_2\xi_2 = 0, \qquad (a_1, a_2) \neq (0, 0)$$

とする．いま $a_2 \neq 0$ とすると，$\bar{l}$ の斉次座標として (ξ_0, ξ_1) をとることができる．(アフィン平面でいえば，直線 l: $a_0+a_1x+a_2y=0$ 上で x を l のパラメータにとる．) したがって，$\bar{l}$ 上の点 $P(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ に対して

$$\begin{bmatrix}\xi_0\\ \xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -\dfrac{a_0}{a_2} & -\dfrac{a_1}{a_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_0\\ \xi_1\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}\xi_0\\ \xi_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_0\\ \xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}$$

が成り立つ．▌

§4.5 射影平面の射影変換群

a) 射影変換の定義

次に射影直線 $\boldsymbol{P}^1$ の場合にその射影変換群 $\boldsymbol{G_P}^1$ を考察したのと同様に，射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ の射影変換群 $\boldsymbol{G_P}^2$ を定義しよう．

定義 4.5 射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ から $\boldsymbol{P}^2$ への全単射 f で，次の性質(i), (ii)を満足するものを $\boldsymbol{P}^2$ の**射影変換**という：

(i) $\boldsymbol{P}^2$ 上の任意の射影直線 $\bar{l}$ の像 $f(\bar{l})$ も射影直線である，

(ii) 射影直線 $\bar{l}$ から射影直線 $f(\bar{l})$ にうつされるとき，$\bar{l}$ 上の任意の4点 A_1, A_2, A_3, A_4 に対して，複比は不変に保たれる：$f(A_i)=A_i'$ $(i=1, 2, 3, 4)$ とおくとき

$$(A_1, A_2\,; A_3, A_4) = (A_1', A_2'\,; A_3', A_4').$$

あるいは，$\bar{l}$ から $f(\bar{l})$ への全単射 f は，$\bar{l}$ 上の射影写像であるといっても同じである．

容易にわかるように，二つの射影変換 f_1, f_2 に対してその結合 $f_2\circ f_1$ および f_1^{-1} も射影変換である．よって $\boldsymbol{P}^2$ の射影変換の全体 $\boldsymbol{G_P}^2$ は変換群を作る．$\boldsymbol{G_P}^2$ を射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ の**射影変換群**という．

(IX) $\boldsymbol{P}^2=\boldsymbol{A}^2\cup \boldsymbol{l}_\infty$ と表わすとき，$\boldsymbol{P}^2$ の射影変換 f で，無限遠直線 $\boldsymbol{l}_\infty$ を全体として固定するものは，アフィン平面 $\boldsymbol{A}^2$ のアフィン変換をひきおこす．逆に

$\boldsymbol{A}^2$ 上の任意のアフィン変換は，$\boldsymbol{P}^2$ 上の射影変換に一意に延長される．

証明　$f \in \boldsymbol{G}_P{}^2$ で，$f(\boldsymbol{l}_\infty)=\boldsymbol{l}_\infty$，したがって $f(\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{A}^2$ とする．$\boldsymbol{A}^2$ 上の任意の直線 l に対して，$f(\bar{l})=f(l)\cup\{f(P_\infty(l))\}$ は射影直線であり，かつ $f(P_\infty(l))\in\boldsymbol{l}_\infty$ であるので，$f(l)\subseteqq\boldsymbol{A}^2$ かつ $f(l)$ は $\boldsymbol{A}^2$ 上の直線となることがわかる．また例 4.1 で見たように $A_1, A_2, A_3\in l$，$\overrightarrow{A_1A_3}=\lambda\overrightarrow{A_1A_2}$ であれば複比 $(P_\infty(l), A_1\,;A_2, A_3)=\lambda$ であった．したがって，f は複比を変えないので，$f(A_i)=A_i'$ $(i=1,2,3)$ に対して $(P_\infty(f(l)), A_1'\,;A_2', A_3')=\lambda$ となり，これから $\overrightarrow{A_1'A_3'}=\lambda\overrightarrow{A_1'A_2'}$ の成り立つことがわかる．故に§2.4 によって，$f:\boldsymbol{A}^2\to\boldsymbol{A}^2$ はアフィン変換となる．

逆に $f:\boldsymbol{A}^2\to\boldsymbol{A}^2$ がアフィン変換であるとする．f によって $\boldsymbol{A}^2$ 上の直線 l は，直線 $f(l)$ にうつされる．そのとき $P_\infty(l)\in\boldsymbol{l}_\infty$ に対して $\bar{f}(P_\infty(l))=P_\infty(f(l))$ と定義する．$\boldsymbol{A}^2$ 上で $l_1/\!/l_2$ であれば $P_\infty(l_1)=P_\infty(l_2)$ であるが，このとき $f(l_1)/\!/f(l_2)$ となり $P_\infty(f(l_1))=P_\infty(f(l_2))$ となる．したがって上の定義によって $\bar{f}:\boldsymbol{l}_\infty\to\boldsymbol{l}_\infty$ が確定する．このようにして $f:\boldsymbol{A}^2\to\boldsymbol{A}^2$ は $\bar{f}:\boldsymbol{P}^2\to\boldsymbol{P}^2$ にまで拡大され，かつ $\boldsymbol{P}^2$ 上の射影直線 $\bar{l}=l\cup\{P_\infty(l)\}$ は射影直線 $\bar{f}(\bar{l})=f(l)\cup\{P_\infty(f(l))\}$ にうつされる．

次に $\bar{l}$ 上の4点 A_1, A_2, A_3, A_4 に対して，複比 $(A_1, A_2\,;A_3, A_4)$ が不変に保たれることを見よう．

（イ）$\bar{l}\neq\boldsymbol{l}_\infty$ の場合．$A_i\in l\subseteqq\boldsymbol{A}^2$ $(i=1,2,3,4)$ であれば，

$$(A_1, A_2\,;A_3, A_4)=\left(\frac{\overrightarrow{A_1A_3}}{\overrightarrow{A_1A_4}}\right)\cdot\left(\frac{\overrightarrow{A_2A_4}}{\overrightarrow{A_2A_3}}\right)$$

である．ここで $\overrightarrow{A_1A_3}=\lambda\overrightarrow{A_1A_4}$，$\overrightarrow{A_2A_3}=\mu\overrightarrow{A_2A_4}$ とすれば，アフィン変換 f に対して $f(A_i)=A_i'$ $(i=1,2,3,4)$ とおくとき，$\overrightarrow{A_1'A_3'}=\lambda\overrightarrow{A_1'A_4'}$，$\overrightarrow{A_2'A_3'}=\mu\overrightarrow{A_2'A_4'}$ となる．したがって

$$(A_1', A_2'\,;A_3', A_4')=\frac{\lambda}{\mu}$$

となり，f によって複比はかわらない．

また $A_i\in l\subseteqq\boldsymbol{A}^2$ $(i=2,3,4)$，$A_1=P_\infty(l)$ であれば，複比

$$(P_\infty, A_1\,;A_2, A_3)=\frac{\overrightarrow{A_1A_3}}{\overrightarrow{A_1A_2}}$$

は，やはりアフィン変換 f によって不変である．

(ロ)　$\bar{l}=\boldsymbol{l}_\infty$, $A_i=P_\infty(l_i)$ $(i=1,2,3,4)$ の場合．直線 $l_i \subseteqq \boldsymbol{A}^2$ が，方程式

$$l_i:\ \xi_{i1}x-\xi_{i0}y=0, \qquad i=1,2,3,4$$

によって定義されていれば，点 A_i の $\boldsymbol{l}_\infty$ 上の斉次座標 (ξ_{i0}, ξ_{i1}) によって複比 $(A_1, A_2\,;A_3, A_4)$ が定義される．一方 $\boldsymbol{A}^2$ のアフィン変換 $f(x, y)=(x', y')$ が

$$\begin{aligned} x &= a_0+a_1x'+a_2y' \\ y &= b_0+b_1x'+b_2y', \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

によって定義されるとすれば，$f(l_i)=l_i'$ に平行で原点をとおる直線 l_i'' の方程式は

$$l_i'':\ \eta_{i1}x-\eta_{i0}y=0$$

となり，その係数 η_{i0}, η_{i1} は

(4.45)
$$\eta_{i0}=b_2\xi_{i0}-a_2\xi_{i1}, \qquad \eta_{i1}=-b_1\xi_{i0}+a_1\xi_{i1}$$

で与えられる．すなわち，$\bar{f}(A_i)=A_i'$ $(i=1,2,3,4)$ の斉次座標 (η_{i0}, η_{i1}) は，(ξ_{i0}, ξ_{i1}) より (4.45) の変換で得られることがわかった．(4.45) は $\boldsymbol{l}_\infty$ から $\boldsymbol{l}_\infty$ への射影変換であって，したがって複比をかえない：$(A_1, A_2\,;A_3, A_4)=(A_1', A_2'\,;A_3', A_4')$．以上によって $\bar{f}$ は $\boldsymbol{P}^2\to\boldsymbol{P}^2$ の射影変換であることがわかった．▌

b）射影変換の解析的表現

§4.2, (II) の $\boldsymbol{P}^1$ の射影変換の解析的表現に対応して

(X)　(i)　射影平面 $\boldsymbol{P}^2=\boldsymbol{A}^2\cup\boldsymbol{l}_\infty$ において，$\boldsymbol{A}^2$ のアフィン座標枠 Σ_A を定め，これに基づいて $\boldsymbol{P}^2$ の点の斉次座標 $P(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ を定義する．このとき，条件

(4.46)
$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

のもとに，変換 $f:\boldsymbol{P}^2\to\boldsymbol{P}^2$ を

$$f:\ P(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \longrightarrow P(\eta_0, \eta_1, \eta_2),$$

(4.47)
$$\begin{cases} \lambda\eta_0=a_0\xi_0+a_1\xi_1+a_2\xi_2 \\ \lambda\eta_1=b_0\xi_0+b_1\xi_1+b_2\xi_2 \qquad \lambda\neq 0 \\ \lambda\eta_2=c_0\xi_0+c_1\xi_1+c_2\xi_2, \end{cases}$$

で定義すれば，f は $\boldsymbol{P}^2$ の射影変換である．逆に $\boldsymbol{P}^2$ の任意の射影変換は，すべてこのようにして得られる．

(ii)　(4.47) で定義される射影変換 f と，

$$\lambda'\begin{bmatrix}\eta_0\\ \eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_0' & a_1' & a_2'\\ b_0' & b_1' & b_2'\\ c_0' & c_1' & c_2'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_0\\ \xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix} \tag{4.48}$$

で定義される射影変換 f' とが等しいためには，或る $\rho \neq 0$ によって

$$\begin{bmatrix}a_0 & a_1 & a_2\\ b_0 & b_1 & b_2\\ c_0 & c_1 & c_2\end{bmatrix}=\rho\begin{bmatrix}a_0' & a_1' & a_2'\\ b_0' & b_1' & b_2'\\ c_0' & c_1' & c_2'\end{bmatrix}$$

となることが必要十分である．したがって

$$\boldsymbol{G_P}^2 \cong \boldsymbol{GL}(3, \boldsymbol{R})/\boldsymbol{Z}^3 = \boldsymbol{PGL}(3, \boldsymbol{R}) \tag{4.49}$$

となる．ただし，$\boldsymbol{Z}^3$ は行列

$$\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}, \qquad a \neq 0$$

の全体である．

注意 $P(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \in \boldsymbol{A}^2$，および $P(\eta_0, \eta_1, \eta_2) \in \boldsymbol{A}^2$，すなわち $\xi_0 \neq 0$，$\eta_0 \neq 0$ に対しては，$x=\xi_1/\xi_0$，$y=\xi_2/\xi_0$，$x'=\eta_1/\eta_0$，$y'=\eta_2/\eta_0$ とおくと，(4.47) は

$$f(x, y) = (x', y'),$$

$$x' = \frac{b_0+b_1x+b_2y}{a_0+a_1x+a_2y}, \qquad y' = \frac{c_0+c_1x+c_2y}{a_0+a_1x+a_2y} \tag{4.50}$$

と表わされる．この f がアフィン変換 $\boldsymbol{A}^2 \to \boldsymbol{A}^2$ であるためには，$a_1=a_2=0$ が必要かつ十分である．

(X)の証明 (i) (4.47)の変換 $f: \boldsymbol{P}^2 \to \boldsymbol{P}^2$ が定義4.5で与えられた射影変換であることをみよう．

(イ) $\boldsymbol{P}^2$ 上の射影直線 $\bar{l}$ は，或る $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0, 0)$ によって

$$\alpha_0\xi_0+\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2 = 0 \tag{4.51}$$

となる点 $P(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ の全体である．したがって(4.47)を逆にといて

$$\begin{cases}\mu\xi_0 = a_0'\eta_0+a_1'\eta_1+a_2'\eta_2\\ \mu\xi_1 = b_0'\eta_0+b_1'\eta_1+b_2'\eta_2 \qquad \mu \neq 0\\ \mu\xi_2 = c_0'\eta_0+c_1'\eta_1+c_2'\eta_2,\end{cases}$$

とするとき，$f(\bar{l})$ はこれを(4.51)に代入して

$$\alpha_0\left(\sum_{j=0}^{2} a_j'\eta_j\right)+\alpha_1\left(\sum_{j=0}^{2} b_j'\eta_j\right)+\alpha_2\left(\sum_{j=0}^{2} c_j'\eta_j\right) = 0,$$

すなわち，$\alpha_i'=\alpha_0 a_i'+\alpha_1 b_i'+\alpha_2 c_i'$ $(i=0,1,2)$ に対して

$$\alpha_0'\eta_0+\alpha_1'\eta_1+\alpha_2'\eta_2=0$$

を満足する点 $P(\eta_0,\eta_1,\eta_2)$ の全体となる．よって $f(\bar{l})$ も一つの射影直線である．

（ロ） $\bar{l}$ 上に射影座標枠をとって，その上の点を $P^*(\lambda_0,\lambda_1)$ と表わせば，例4.4によって，(λ_0,λ_1) と (ξ_0,ξ_1,ξ_2) との間に

$$(4.52)\qquad \rho\begin{bmatrix}\xi_0\\ \xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_{00} & \beta_{01}\\ \beta_{10} & \beta_{11}\\ \beta_{20} & \beta_{21}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\end{bmatrix},\qquad \rho\neq 0$$

の形の関係がある．同様に $f(\bar{l})$ の射影座標枠をとってその上の点を $P^{**}(\mu_0,\mu_1)$ と表わせば，

$$(4.53)\qquad \rho'\begin{bmatrix}\mu_0\\ \mu_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma_{00} & \gamma_{01} & \gamma_{02}\\ \gamma_{10} & \gamma_{11} & \gamma_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_0\\ \eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix},\qquad \rho'\neq 0$$

と表わされる．したがって

$$f(P^*(\lambda_0,\lambda_1))=P^{**}(\mu_0,\mu_1)$$

に対して，(4.47), (4.52), (4.53) より

$$\rho''\begin{bmatrix}\mu_0\\ \mu_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma_{00} & \gamma_{01} & \gamma_{02}\\ \gamma_{10} & \gamma_{11} & \gamma_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0 & a_1 & a_2\\ b_0 & b_1 & b_2\\ c_0 & c_1 & c_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{00} & \beta_{01}\\ \beta_{10} & \beta_{11}\\ \beta_{20} & \beta_{21}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}h_{00} & h_{01}\\ h_{10} & h_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\end{bmatrix}$$

の形となる．よって $f:\bar{l}\to f(\bar{l})$ に対して，複比は不変である．すなわち $A_i\in\bar{l}$, $f(A_i)=A_i'\in f(\bar{l})$ $(i=1,2,3,4)$ に対して $(A_1,A_2;A_3,A_4)=(A_1',A_2';A_3',A_4')$.

以上より (4.47) で与えられた $f:\boldsymbol{P}^2\to\boldsymbol{P}^2$ は射影変換となることがわかった．

c) 射影変換群の自由度

(i) の逆の部分を証明するために，次の結果を用いる．

(XI) $\boldsymbol{P}^2$ 上の任意の異なる4点 A_1,A_2,A_3,A_4 を，任意の異なる4点 B_1,B_2,B_3,B_4 にうつす射影変換 $f\in\boldsymbol{G}_P{}^2$ が必ず存在し，しかもただ一つに限る．ただし A_1,A_2,A_3,A_4 および B_1,B_2,B_3,B_4 のどの3点も同一射影直線上にないものとする．

証明 （イ） $f(A_i)=B_i$ $(i=1,2,3,4)$ となる射影変換の存在を，(X) で解析的

に定義した射影変換 f_a について証明し，

（ロ） $f(A_i)=B_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$ となる射影変換の一意性を幾何学的に定義した射影変換 f_g について証明しよう．

（イ），（ロ）が証明されたならば，われわれは(X)において，f_a は f_g の一種であることを見たが，その逆の部分の証明がいえる．すなわち，任意の f_g をとる．$f_g(A_i)=B_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$ とし，これに対して（イ）によって $f_a(A_i)=B_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$ となる f_a が存在する．$f=f_a^{-1}\circ f_g$ は $f(A_i)=A_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$ であるから，（ロ）によって f は恒等変換となる．よって $f_g=f_a$ がわかった．これで(X)，(i)の後半が証明されたことになる．

（イ） $f_a(A_i)=B_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$ の存在を一般に証明するためには，A_1, A_2, A_3, A_4 が特別の点 $A_1^0, A_2^0, A_3^0, A_4^0$ の場合にいえば十分である．すなわち

$$f_a(A_i^0) = A_i \quad (i=1, 2, 3, 4), \qquad g_a(A_i^0) = B_i \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

であれば $g_a\circ f_a^{-1}(A_i)=B_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$ がわかる．そこで

$$A_1 = P(1, 0, 0), \quad A_2 = P(0, 1, 0), \quad A_3 = P(0, 0, 1), \quad A_4 = P(1, 1, 1)$$

とし，

$$B_1 = P(\xi_{10}, \xi_{11}, \xi_{12}), \quad B_2 = P(\xi_{20}, \xi_{21}, \xi_{22}),$$
$$B_3 = P(\xi_{30}, \xi_{31}, \xi_{32}), \quad B_4 = P(\xi_{40}, \xi_{41}, \xi_{42})$$

とする．$f_a(A_i)=B_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$ となる f_a を(4.47)の形で求めよう．A_1, A_2, A_3, A_4 を代入すれば

$$\text{(4.54)} \qquad \lambda\begin{bmatrix}\xi_{10}\\ \xi_{11}\\ \xi_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_0\\ b_0\\ c_0\end{bmatrix}, \quad \mu\begin{bmatrix}\xi_{20}\\ \xi_{21}\\ \xi_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_1\\ b_1\\ c_1\end{bmatrix}, \quad \nu\begin{bmatrix}\xi_{30}\\ \xi_{31}\\ \xi_{32}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_2\\ b_2\\ c_2\end{bmatrix}$$

かつ

$$\rho\begin{bmatrix}\xi_{40}\\ \xi_{41}\\ \xi_{42}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_0+a_1+a_2\\ b_0+b_1+b_2\\ c_0+c_1+c_2\end{bmatrix}$$

（ただし，$\lambda\neq0$, $\mu\neq0$, $\nu\neq0$, $\rho\neq0$）に a_i, b_i, c_i $(i=0, 1, 2)$ を求めればよい．それには，

$$\text{(4.55)} \qquad \rho\begin{bmatrix}\xi_{40}\\ \xi_{41}\\ \xi_{42}\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}\xi_{10}\\ \xi_{11}\\ \xi_{12}\end{bmatrix} + \mu\begin{bmatrix}\xi_{20}\\ \xi_{21}\\ \xi_{22}\end{bmatrix} + \nu\begin{bmatrix}\xi_{30}\\ \xi_{31}\\ \xi_{32}\end{bmatrix}$$

であるように λ, μ, ν, ρ を求め，a_i, b_i, c_i $(i=0,1,2)$ を(4.54)によって定めればよい．実際に(4.55)において，B_1, B_2, B_3, B_4 のどの3点も同一射影直線上にないということは，3次元ベクトル空間内で，四つのベクトル $(\xi_{i0}, \xi_{i1}, \xi_{i2})$ $(i=1,2,3,4)$ のどの三つも1次独立であることと同値である．したがって(4.55)は必ず解けて，λ, μ, ν, ρ はどれも0とならない．

［記号］ 2点 A, B を通る射影直線 $\bar{l}(A,B)$ を今後 $A \vee B$ と表わすことにする．

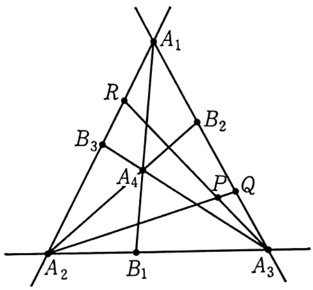


図 4・5

（ロ） $f_g(A_i)=A_i$ $(i=1,2,3,4)$，かつ A_i $(i=1,2,3,4)$ のどの3点も同一射影直線上にないものとする．図4.5のように，f_g は $\boldsymbol{P}^2$ 上の射影直線を射影直線にうつすので，$A_1, \cdots, A_4$ を固定すれば，$A_1 \vee A_2$, $A_2 \vee A_3$, $A_3 \vee A_1$ を全体として固定し，また $B_1=(A_2 \vee A_3) \cap (A_1 \vee A_4)$，$B_2, B_3$ を固定する．したがって f_g は $A_2 \vee A_3$ 上の3点 B_1, A_2, A_3 を固定するので，$A_2 \vee A_3$ 上では恒等写像となる(§4.2 (III))．同様に，f_g は $A_3 \vee A_1$, $A_1 \vee A_2$ 上でも恒等変換となる．

次に $\boldsymbol{P}^2$ 上の任意の点 P に対して，図4.5のように Q, R をとる．$f_g(A_i)=A_i$, $f_g(Q)=Q$, $f_g(R)=R$ より f_g は $A_2 \vee Q$, $A_3 \vee R$ を自分自身にうつす．したがって，それらの交点 P は f_g によって不変である：$f_g(P)=P$．したがって f_g は $\boldsymbol{P}^2$ の恒等変換である．▌

§4.6 射影平面の射影座標枠

a） 射影座標枠

定義 4.6 射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ 上で，どの3点も同一射影直線上にない4点系 $\Sigma_P=(P_{100}, P_{010}, P_{001}; P_{111})$ を $\boldsymbol{P}^2$ の**射影座標枠**という．このうち始めの3点を**頂点**，4番目の点を**単位点**という．

(XI)をいいかえると

(XI)* $\boldsymbol{P}^2$ 上の任意の射影座標枠 Σ_P, Σ_P' に対して，Σ_P を Σ_P' にうつす射影変換 $f \in \boldsymbol{G}_P{}^2$ がつねに存在し，かつただ一つに限る．

したがって，一つの射影座標枠 $\Sigma_P{}^0$ を固定するとき，射影変換 f の全体 $\boldsymbol{G}_P{}^2$ と，射影座標枠 Σ_P の全体とは

$$f:\ \Sigma_P{}^0 \longrightarrow \Sigma_P$$

によって1対1に対応する．

例 4.5 $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{A}^2 \cup \boldsymbol{l}_\infty$ とし，$\boldsymbol{A}^2$ のアフィン座標枠を

(4.56) $$\Sigma_A = (O\,;E_1, E_2)$$

とする．すなわち O は $\boldsymbol{A}^2$ の原点，E_1, E_2 は x 軸 l_x，y 軸 l_y 上の単位点とする．そのとき Σ_A に関して(1, 1)を座標とする点を E とおく．

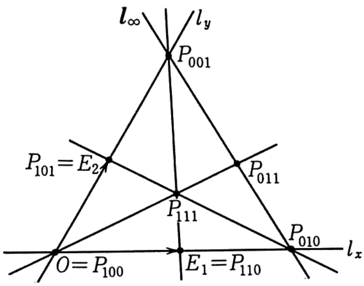


図 4.6

$$P_{100} = O, \qquad P_{010} = P_\infty(l_x), \qquad P_{001} = P_\infty(l_y), \qquad P_{111} = E$$

とおくとき，

(4.57) $$\Sigma_P = (P_{100}, P_{010}, P_{001}\,; P_{111})$$

が Σ_A より定められる．Σ_A より定められる斉次座標 (ξ_0, ξ_1, ξ_2) に関して，

$$\boldsymbol{l}_\infty:\ \xi_0 = 0,$$
$$l_x:\ \xi_2 = 0, \qquad l_y:\ \xi_1 = 0,$$

かつ $P_{100}=P(1, 0, 0)$, $P_{010}=P(0, 1, 0)$, $P_{001}=P(0, 0, 1)$, $P_{111}=P(1, 1, 1)$ である．

逆に $\boldsymbol{P}^2$ 上任意に射影座標枠 Σ_P を定めるとき，

$$\boldsymbol{l}_\infty = P_{001} \vee P_{010} \qquad (P_{001} \text{ と } P_{010} \text{ を通る射影直線})$$

とし，$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{P}^2 - \boldsymbol{l}_\infty$ ($\boldsymbol{l}_\infty$ の補集合)とする．図 4.6 のように

$$P_{110} = (P_{100} \vee P_{010}) \cap (P_{001} \vee P_{111}),$$

および同様に P_{011}, P_{101} をとる．そして $\boldsymbol{A}^2$ 上のアフィン座標枠 Σ_A を

$$\Sigma_A = (P_{100}\,;\,P_{110},\,P_{101}) \tag{4.58}$$

とおくと，この Σ_A は，ちょうど与えられた射影座標枠 Σ_P を生じるようなアフィン座標枠である．

この方法によって，$\boldsymbol{l}_\infty = P_{001} \vee P_{010}$ と対応させることにより，$\boldsymbol{P}^2$ の射影座標枠と，$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{P}^2 - \boldsymbol{l}_\infty$ のアフィン座標枠とは1対1に対応することがわかる．

例 4.6　$\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{A}^2 \cup \boldsymbol{l}_\infty$ とし，$\boldsymbol{A}^2$ のアフィン座標枠 Σ_A より，$P \in \boldsymbol{P}^2$ の斉次座標 (ξ_0, ξ_1, ξ_2) が定められた．これを Σ_A に対応する射影座標枠 Σ_P より直接に求めてみよう．

図4.6のように Σ_P をとり，点 $P \in \boldsymbol{A}^2$ に対し

$$P_x = (P_{001} \vee P) \cap \bar{l}_x, \qquad P_y = (P_{010} \vee P) \cap \bar{l}_y$$

とおく．$\bar{l}_x$ 上で複比

$$x = (P_{010}, P_{100}\,;\,P_{110}, P_x)$$

を，$\bar{l}_y$ 上で複比

$$y = (P_{001}, P_{100}\,;\,P_{101}, P_y)$$

を定める．そのとき点 $P \in \boldsymbol{A}^2$ のアフィン座標はちょうど (x, y) で与えられる：

$$x = \frac{\xi_1}{\xi_0}, \qquad y = \frac{\xi_2}{\xi_0}.$$

また $P \in \boldsymbol{l}_\infty$ に対しては

$$z = (P_{010}, P_{001}\,;\,P_{011}, P)$$

とすれば，$z = \xi_2/\xi_1$，かつ $\xi_0 = 0$ である．

b）配景写像

定義 4.7　$\boldsymbol{P}^2$ 上の二つの射影直線 $\bar{l}_1$ と $\bar{l}_2$ とにおいて，それらの上にない任意

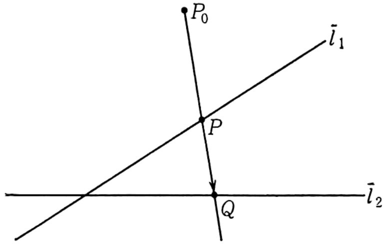


図 4・7

の1点 P_0 をとり，P_0 を中心として，$P\in\bar{l}_1$ を $Q\in\bar{l}_2$ の上に射影する：

$$Q=(P_0\vee P)\cap\bar{l}_2.$$

このとき $f:P\to Q$ は $\bar{l}_1$ から $\bar{l}_2$ への写像を定義する．この f を P_0 を中心(または軸)とする**配景写像**(perspective mapping)という．

(XII) 配景写像 $f:\bar{l}_1\to\bar{l}_2$ は射影写像である．

証明 $\boldsymbol{P}^2$ の射影座標枠 $\Sigma_P=(P_{100},P_{010},P_{001};P_{111})$ を

$$\bar{l}_1=P_{100}\vee P_{010},\qquad \bar{l}_2=P_{100}\vee P_{001}$$

および $P_0=P_{011}=(P_{100}\vee P_{111})\cap(P_{010}\vee P_{001})$ にとることができる．斉次座標を用いれば，$\bar{l}_1$: $\xi_2=0$, $\bar{l}_2$: $\xi_1=0$, $P_0=P(0,1,1)$ である．

$P\in\bar{l}_1$ の斉次座標を $P=P(\alpha_0,\alpha_1,0)$，$\lambda=\alpha_1/\alpha_0$ とし，$Q\in\bar{l}_2$ の斉次座標を $Q=P(\beta_0,0,\beta_2)$，$\mu=\beta_2/\beta_0$ とおく．直線 $P_0\vee P$ は

$$\alpha_1\xi_0-\alpha_0\xi_1+\alpha_0\xi_2=0$$

で定められる．($(\alpha_0,\alpha_1,0)$ および $(0,1,1)$ はこの方程式を満足する．) この直線と $\bar{l}_2$ との交点 $Q=P(\beta_0,0,\beta_2)$ は

$$\beta_0=\rho\alpha_0,\qquad \beta_2=-\rho\alpha_1,\qquad \rho\neq 0$$

で与えられる．すなわち，配景変換 f^* は

$$f^*:\ P(\alpha_0,\alpha_1,0)\longrightarrow P(\alpha_0,0,-\alpha_1)$$

で表わされる．一方 $\boldsymbol{P}^2$ の射影変換 f:

$$\rho\begin{bmatrix}\eta_0\\ \eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\ 0&0&1\\ 0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_0\\ \xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix},\qquad \rho\neq 0$$

を考えると，$f:\bar{l}_1\to\bar{l}_2$ で，かつ $\bar{l}_1$ 上 $f=f^*$ となる．よって配景写像 f^* は射影写像である．▌

(XIII) $\boldsymbol{P}^2$ 上の二つの射影直線 $\bar{l}_1,\bar{l}_2$ に対して，任意の射影写像 $f:\bar{l}_1\to\bar{l}_2$ は，二つの配景写像 f_1,f_2 の結合 $f=f_2\circ f_1$ として得られる．

証明 $f:\bar{l}_1\to\bar{l}_2$ は，$\bar{l}_1$ 上の異なる3点 A_1,A_2,A_3 を $f(A_i)=B_i\in\bar{l}_2$ $(i=1,2,3)$ にうつすことによって特徴づけられる．よって $f(A_i)=B_i$ $(i=1,2,3)$ となる f を $f_2\circ f_1$ の形に求めよう．

直線 $A_1\vee B_1$ 上に1点 P_0 をとり，B_1 を通る直線 $\bar{l}_3\,(\neq\bar{l}_2)$ の上に P_0 を中心として $\bar{l}_1$ を射影する．その配景写像を f_1 とし，$f_1(A_i)=C_i$ $(i=1,2,3)$ とする．し

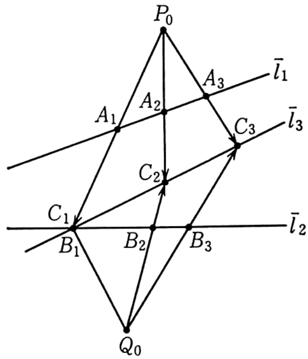


図 4・8

たがって $B_1=C_1$ である．次に $(B_2\vee C_2)\cap(B_3\vee C_3)=Q_0$ を中心として，$\bar{l}_3$ を $\bar{l}_2$ の上へ射影する配景写像を f_2 とすれば $f_2\circ f_1$ は A_i を B_i にうつす $(i=1,2,3)$．すなわち $f=f_2\circ f_1$ が成り立つ．∎

(XIV)　(Desargues の定理)　$\boldsymbol{P}^2$ 上に 1 点 P で交わる 3 直線 $\bar{l}_i$ $(i=1,2,3)$ があり，$\bar{l}_i$ 上に点 A_i, B_i $(i=1,2,3)$ を任意にとるとき

$$Q_1=(A_2\vee A_3)\cap(B_2\vee B_3),\qquad Q_2=(A_3\vee A_1)\cap(B_3\vee B_1),$$
$$Q_3=(A_1\vee A_2)\cap(B_1\vee B_2)$$

は同一射影直線上にある．

逆に 3 直線 $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$ 上の A_i, B_i $(i=1,2,3)$ に対して，3 点 Q_1, Q_2, Q_3 が同一射影直線上にあれば，3 直線 $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$ は 1 点で交わる．

証明　$f_1:\bar{l}_2\to\bar{l}_3$, $f_2:\bar{l}_3\to\bar{l}_1$, $f_3:\bar{l}_1\to\bar{l}_2$ という三つの配景写像をそれぞれ $Q_1, Q_2,$

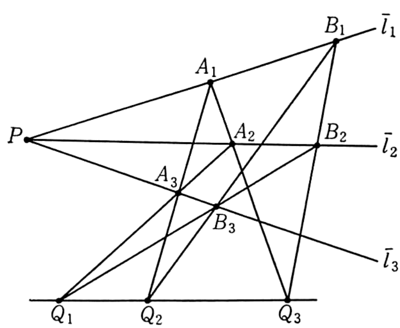


図 4・9

Q_3 を中心として行なう．そのとき

$$f_1:\begin{cases} P \longrightarrow P \\ A_2 \longrightarrow A_3, \\ B_2 \longrightarrow B_3 \end{cases} \quad f_2:\begin{cases} P \longrightarrow P \\ A_3 \longrightarrow A_1, \\ B_3 \longrightarrow B_1 \end{cases} \quad f_3:\begin{cases} P \longrightarrow P \\ A_1 \longrightarrow A_2 \\ B_1 \longrightarrow B_2 \end{cases}$$

にうつされる．したがって $f=f_3\circ f_2\circ f_1$ は $\bar{l}_2\to\bar{l}_2$ の射影写像で，3点 P, A_2, B_2 を固定する．したがって §4.2 の(III)によって f は恒等写像である．

いま $Q_1\vee Q_2$ と $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$ との交点をそれぞれ C_1, C_2, C_3 とする．上の配景写像 f_1, f_2 によって

$$f_1:\ C_2\longrightarrow C_3, \qquad f_2:\ C_3\longrightarrow C_1$$

となる．$f=f_3\circ f_2\circ f_1$ は恒等写像であるから，$f_3: C_1\to C_2$ でなければならない．これは Q_3, C_1, C_2 が同一射影直線上にあることを示している．$C_1\vee C_2=Q_1\vee Q_2$ によって，Q_1, Q_2, Q_3 は同一射影直線上にあることがわかる．逆の証明は読者諸氏に譲る．▌

(XV)　(Pappus の定理)　$\boldsymbol{P}^2$ 上の二つの射影直線 $\bar{l}_1, \bar{l}_2$ 上にそれぞれ A_1, A_3, A_5 および A_2, A_4, A_6 をとり，

$$P_1=(A_1\vee A_2)\cap(A_4\vee A_5), \qquad P_2=(A_2\vee A_3)\cap(A_5\vee A_6),$$
$$P_3=(A_3\vee A_4)\cap(A_6\vee A_1)$$

とおく．そのとき P_1, P_2, P_3 は同一射影直線上にある．

証明　$\bar{l}_3=A_4\vee A_5$, $\bar{l}_4=A_5\vee A_6$ とおき，$f_1:\bar{l}_3\to\bar{l}_2$, $f_2:\bar{l}_2\to\bar{l}_4$, $f_3:\bar{l}_4\to\bar{l}_3$ という三つの配景写像をそれぞれ A_1, A_3 および P_3 を中心として行なう．そのとき

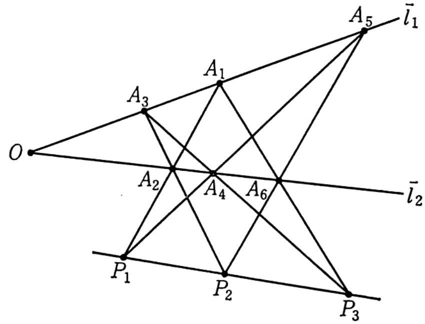


図 4.10

$$f_1:\begin{cases} A_4 \longrightarrow A_4 \\ A_5 \longrightarrow O, \\ Q \longrightarrow A_6 \end{cases} \quad f_2:\begin{cases} A_4 \longrightarrow R \\ O \longrightarrow A_5, \\ A_6 \longrightarrow A_6 \end{cases} \quad f_3:\begin{cases} R \longrightarrow A_4 \\ A_5 \longrightarrow A_5, \\ A_6 \longrightarrow Q \end{cases}$$

ただし $O=\bar{l}_1\cap\bar{l}_2$, $Q=\bar{l}_3\cap(A_1\vee A_6)$, $R=\dot{l}_4\cap(A_3\vee A_4)$ とする．したがって $f=f_3\circ f_2\circ f_1$ は $\bar{l}_3\to\dot{l}_3$ の射影写像で，3点 A_4, A_5, Q を固定するから，f は恒等写像である．

このとき $f:P_1\to P_1$, すなわち $f_1:P_1\to A_2$, $f_2:A_2\to P_2$, $f_3:P_2\to P_1$ とならなくてはならない．すなわち P_1, P_2, P_3 は同一射影直線上になくてはならない．▮

例 4.7 射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ 上に射影座標枠 $\Sigma_P=(P_{100}, P_{010}, P_{001}; P_{111})$ を定める．その上の射影直線 $\bar{l}=P_{100}\vee P_{010}$ 上に射影座標枠 $(P_{100}, P_{010}; P_{110})$ を定める（P_{100} が原点，P_{010} が無限遠点，P_{110} が単位点）．そのとき $\dot{l}$ 上の点 Q_i $(i=1,2,\cdots)$ に対して，座標 x_i を複比を用いて

$$x_i=(P_{010}, P_{100}; P_{110}, Q_i)$$

と定める．斉次座標を用いれば，$Q_i=P(1, x_i, 0)$ である．そのとき

$$x_3=x_1+x_2, \qquad x_4=x_1x_2$$

であるような点 Q_3, Q_4 は，Q_1, Q_2 から図 4.11 および図 4.12 のように作図される：

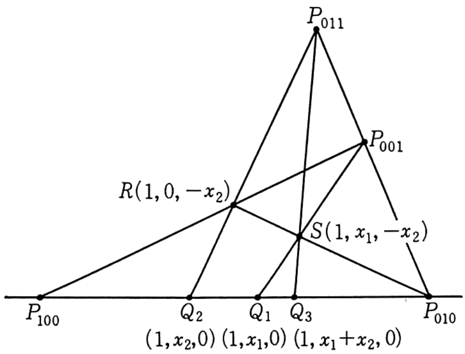


図 4.11

$$R=(P_{100}\vee P_{001})\cap(P_{011}\vee Q_2), \qquad S=(P_{001}\vee Q_1)\cap(P_{010}\vee R)$$

より

$$Q_3=(P_{100}\vee P_{010})\cap(P_{011}\vee S)$$

を作図する．このとき

$$P_{100}\vee P_{001}\colon\ \xi_1=0,\qquad P_{011}\vee Q_2\colon\ -x_2\xi_0+\xi_1-\xi_2=0$$

より $R=P(1,0,-x_2)$ となり,

$$P_{001}\vee Q_1\colon\ x_1\xi_0-\xi_1=0,\qquad P_{010}\vee R\colon\ x_2\xi_0+\xi_2=0$$

より $S=P(1,x_1,-x_2)$ となり,

$$P_{100}\vee P_{010}\colon\ \xi_2=0,\qquad P_{011}\vee S\colon\ (x_1+x_2)\xi_0-\xi_1+\xi_2=0$$

より $Q_3=P(1,x_1+x_2,0)$ となる．すなわち，Q_3 が x_1+x_2 を座標とする $\bar{l}$ 上の点である．

同様に $\bar{l}$ 上の点 Q_1, Q_2 より，図4.12のように

$$R=(P_{100}\vee P_{001})\cap(P_{011}\vee Q_2),$$
$$S=(P_{100}\vee P_{001})\cap(P_{110}\vee P_{011}),$$
$$T=(P_{010}\vee P_{001})\cap(S\vee Q_1)$$

より，

$$Q_4=(P_{100}\vee P_{010})\cap(R\vee T)$$

を作図する．

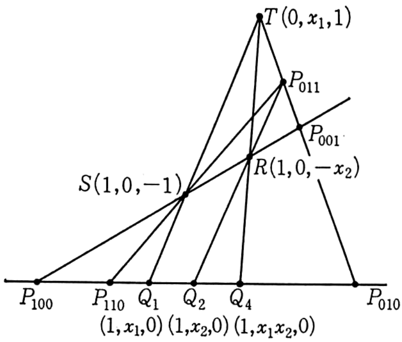


図4.12

上と同様に $R=P(1,0,-x_2)$, $S=P(1,0,-1)$, $T=P(0,x_1,1)$, $Q_4=P(1,x_1x_2,0)$，すなわち Q_4 が x_1x_2 を座標とする $\bar{l}$ 上の点である．▌

c）射影変換の特徴づけ

例4.7で見るように，$\bar{l}$ 上に座標枠 $(P_{100}, P_{010}; P_{110})$ を定め，P_{100} が原点 $(x=0)$，P_{010} が無限遠点 $(x=\infty)$，P_{110} が単位点 $(x=1)$ と定めれば，$\bar{l}$ 上で座標 x_1, x_2 をもつ点 Q_1, Q_2 より座標 x_1+x_2, x_1x_2 をもつ点 Q_3, Q_4 が，2点を結ぶ射影直

線を作ること，二つの射影直線の交わる点を定めることという操作で作図される．このことを用いると，$\boldsymbol{P}^2$ 上の射影変換の定義4.5において，第2の条件(ii)を省くことができる．すなわち，

(XVI) 射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ から $\boldsymbol{P}^2$ への全単射 f が射影変換であるための必要十分条件は，任意の射影直線 $\bar{l}$ の像 $f(\bar{l})$ がつねに射影直線となることである．

この証明には，次の定理を用いる．

(XVII) 実数体 $\boldsymbol{R}$ から $\boldsymbol{R}$ への全単射 φ が自己同型，すなわち

$$\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b), \qquad \varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$$

を満足すれば，φ は恒等写像である．

証明 まず $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$ となることがわかる．次に正の整数 n に対して $\varphi(n)=\varphi(1+\cdots+1)=\varphi(1)+\cdots+\varphi(1)=n$, 負の整数 $-n$ に対して $0=\varphi(0)=\varphi(n+(-n))=\varphi(n)+\varphi(-n)$ より $\varphi(-n)=-n$ である．

次に，有理数 $q=n/m$ に対して $n=\varphi(n)=\varphi(mq)=\varphi(m)\varphi(q)=m\varphi(q)$ より，$\varphi(q)=n/m=q$ となる．

また $\alpha>0$ であれば $\alpha=(\sqrt{\alpha})^2$ より $\varphi(\alpha)=\varphi(\sqrt{\alpha})^2>0$ が成り立つ．したがって $\alpha>\beta$ なら $\alpha-\beta>0$, $\varphi(\alpha-\beta)>0$ より $\varphi(\alpha)>\varphi(\beta)$ となる．

最後に任意の実数 α に対して，$n/m<\alpha<r/s$ (n/m, r/s は有理数) とすれば，$n/m=\varphi(n/m)<\varphi(\alpha)<\varphi(r/s)=r/s$ となり，有理数は実数全体の中で稠密であるので，$\varphi(\alpha)=\alpha$ でなければならない．▌

(XVI)の証明 $f:\boldsymbol{P}^2\to\boldsymbol{P}^2$ が，$\boldsymbol{P}^2$ 中の任意の射影直線 $\bar{l}$ を射影直線 $f(\bar{l})$ にうつすとする．そのとき，全単射 $\bar{l}\to f(\bar{l})$ が射影直線上の射影写像となることをいえばよい．

(イ) $\bar{l}$ 上に任意の射影座標枠 $\Sigma_P=(P_0, P_\infty; P_1)$ を定め，$f(\bar{l})$ 上の射影座標枠を $f(\Sigma_P)=(f(P_0), f(P_\infty); f(P_1))$ にとる．$P\in\bar{l}$ の Σ_P に関する座標を $x=(P_\infty, P_0; P_1, P)$，$f(P)=Q\in f(\bar{l})$ の $f(\Sigma_P)$ に関する座標を $y=(f(P_\infty), f(P_0); f(P_1), f(P))$ とおく．そのとき $\varphi(x)=y$ とおくと，例4.7の作図によって

$$\varphi(x_1+x_2)=\varphi(x_1)+\varphi(x_2), \qquad \varphi(x_1x_2)=\varphi(x_1)\varphi(x_2)$$

が成り立つことがわかる．すなわち $\varphi:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ は自己同型である．

(ロ) (XVII) によって，φ は恒等写像である．すなわち $x=y$ となり，$(P_\infty, P_0; P_1, P)=(f(P_\infty), f(P_0); f(P_1), f(P))$ が成り立つ．

以上より $f:\bar{l}\to f(\bar{l})$ は射影直線の射影変換であることがわかった. ▌

注意　定理(XVII)は実数体 $\boldsymbol{R}$ に対して成り立つが，例えば複素数体 $\boldsymbol{C}$ や，有限体 $\boldsymbol{F}_q$, $q=p^r\,(r\geqq 2)$ に対しては成立しない. 故に定理(XVI)も，実数体上の射影平面に対しては成立するが，一般の可換体を係数とする場合には必ずしも成立しない.

d) 射影平面の空間内での図示

§4.2 で射影直線 $\boldsymbol{P}^1$ を平面上に図示したのと同様に，射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ を空間内に図示することを考えてみよう. アフィン空間 $\boldsymbol{A}^3$ をとり，その原点 O を通る直線全体の集合 $\boldsymbol{L}$ を考える. $\boldsymbol{A}^3$ のアフィン座標枠 Σ_A を一つ定めておく. $\boldsymbol{A}^3$ 内で $l\in\boldsymbol{L}$ に対して，その上に1点 $(\xi_0, \xi_1, \xi_2)\neq O$ をとると，直線 l の方程式は，パラメータ t を用いて

$$x=\xi_0 t,\qquad y=\xi_1 t,\qquad z=\xi_2 t$$

と表わされる. したがって，$l\in\boldsymbol{L}$ に対して (ξ_0, ξ_1, ξ_2) を対応させることができる. よって $l=l(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ と表わそう. このとき $l(\xi_0, \xi_1, \xi_2)=l(\xi_0', \xi_1', \xi_2')$ となるための必要十分条件は，或る $\lambda\neq 0$ によって

$$\xi_0'=\lambda\xi_0,\qquad \xi_1'=\lambda\xi_1,\qquad \xi_2'=\lambda\xi_2$$

と表わされることである.

したがって，$l(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ に，射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ 内で斉次座標 (ξ_0, ξ_1, ξ_2) をもつ点を対応させれば：

$$\boldsymbol{L}\ni l(\xi_0, \xi_1, \xi_2)\longleftrightarrow P(\xi_0, \xi_1, \xi_2)\in\boldsymbol{P}^2,$$

$\boldsymbol{L}$ と $\boldsymbol{P}^2$ とは1対1の対応をする.

次に，$\boldsymbol{A}^3$ に Euclid の距離を一つ定めて，原点 O を中心とし，半径1の単位球面 S^2 をとる. S^2 上の1点 P_0(例えば $P_0=P(1,0,0)$)を通り S^2 に接平面 $x=1$ をとる. この接平面を $\boldsymbol{A}^2$ で表わそう.

$l\in\boldsymbol{L}$ と S^2 とはつねに2点で交わり，それらは S^2 上 O に関して対称な点(対蹠点)である.

$$\begin{aligned}
S_+{}^2 &= \{(\xi_0, \xi_1, \xi_2)\in S^2\,|\,\xi_0>0\} &&(\text{北半球}),\\
S_-{}^2 &= \{(\xi_0, \xi_1, \xi_2)\in S^2\,|\,\xi_0<0\} &&(\text{南半球}),\\
S_0{}^1 &= \{(\xi_0, \xi_1, \xi_2)\in S^2\,|\,\xi_0=0\} &&(\text{赤道}),\\
S^2 &= S_+{}^2\cup S_-{}^2\cup S_0{}^1
\end{aligned}$$

とおく. $\boldsymbol{L}\ni l(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ で $\xi_0\neq 0$ であれば，この直線は $S_+{}^2$ および $\boldsymbol{A}^2$ とそれぞ

れただ1点 P, Q で交わる：

$$P=(\lambda\xi_0, \lambda\xi_1, \lambda\xi_2), \qquad (\lambda\xi_0)^2+(\lambda\xi_1)^2+(\lambda\xi_2)^2=1, \qquad \lambda\xi_0>0$$

$$Q=(1, \alpha, \beta), \qquad \alpha=\frac{\xi_1}{\xi_0}, \qquad \beta=\frac{\xi_2}{\xi_0}.$$

また $l(0, \xi_1, \xi_2)$ と $S_0{}^1$ とは2点で交わる．$P_1, P_2 \in S_0{}^1$ に対して

$$P_1 \sim P_2 \Leftrightarrow P_1 \text{ と } P_2 \text{ とは } O \text{ に関して対称}$$

と定めれば，$l(0, \xi_1, \xi_2)$ と $S_0{}^1/\sim=\boldsymbol{P}^1$ 上の点 $(0, \pm\xi_1, \pm\xi_2)$ $(\xi_1{}^2+\xi_2{}^2=1)$ とは1対1に対応する．すなわち

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_0\cup\boldsymbol{L}^*, \qquad \boldsymbol{L}_0\cap\boldsymbol{L}^*=\phi,$$

$$\boldsymbol{L}_0=\{l(\xi_0, \xi_1, \xi_2)\,|\,\xi_0\neq 0\}, \qquad \boldsymbol{L}^*=\{l(0, \xi_1, \xi_2)\}$$

と分解される．ここで

$$\boldsymbol{L}_0 \longleftrightarrow S_+{}^2 \longleftrightarrow \boldsymbol{A}^2$$

$$\boldsymbol{L}^* \longleftrightarrow S_0{}^1/\sim\; = \boldsymbol{P}^1 \quad \text{(無限遠直線)}$$

と1対1に対応する．この対応によって

$$\boldsymbol{L} \longleftrightarrow \boldsymbol{P}^2=\boldsymbol{A}^2\cup\boldsymbol{P}^1$$

となっている．

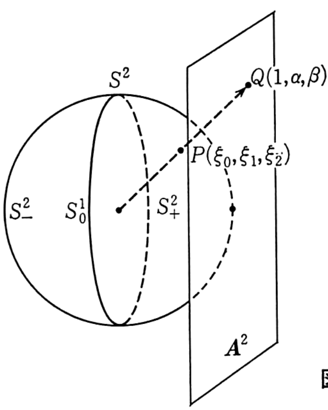


図 4.13

(i)　$S^2=S_+{}^2\cup S_-{}^2\cup S_0{}^1$ を上のように赤道によって半分にきらないで，$\boldsymbol{L}$ と S^2 との1対2の対応を考えれば

$$\boldsymbol{P}^2 \longleftrightarrow \boldsymbol{L} \longleftrightarrow S^2/\sim \qquad (\sim \text{ は } O \text{ に関する対称})$$

によって，S^2 は $\boldsymbol{P}^2$ の2重の被覆となっている.

(ii)　$\boldsymbol{P}^2$ 上の射影直線は，或る $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)\neq 0$ によって方程式

$$\alpha_0\xi_0+\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2=0$$

を満足する点 $P(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ 全体の集合として表わされる．これは，$\boldsymbol{A}^3$ 上で原点を通る平面

$$\alpha_0x+\alpha_1y+\alpha_2z=0$$

上にある $l(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ 全体の集合 $(\subseteqq \boldsymbol{L})$ とみることができる.

(iii)　1次元の場合と同様に $\boldsymbol{P}^2$ の射影変換 f は，$\boldsymbol{A}^3$ の原点 O を固定するアフィン変換と見なすことができる.

問　　題

1　図4.14において，4点 P_1, P_2, P_3, P_4 は調和列点を作ること，すなわち $(P_1, P_2\,;P_3, P_4)=-1$ を示せ.

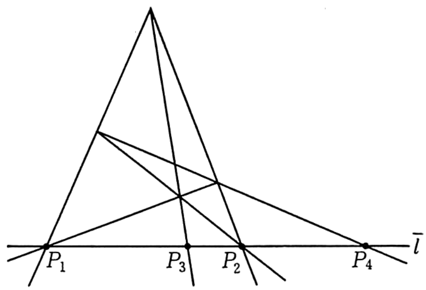


図4.14

2　射影平面上の4点 P, Q, R, S が，どの3点も同一射影直線上にないとき，これら4点(四つの頂点)およびこれらのうちの2点を結んで得られる6直線(6個の辺)からなる図形を**完全四角形**という.

任意の射影直線 $\bar{l}$ とこれら6個の辺との交点 $\{A, B, C, D, G, H\}$ を**四角形性6点**という.

(i)　$\boldsymbol{P}^2$ 上2組の完全四角形があり，頂点の間の対応を定めるとき，互いに対応する辺の交点について，それらのうち5個までが同一射影直線上にあれば，残りの一つも同じ直線上にある.

(ii)　射影直線 $\bar{l}$ 上の四角形性6点は，射影写像 $\varphi:\bar{l}\to\bar{m}$ によって，$\bar{m}$ 上の四角形性6点にうつる.

(iii)　射影直線上の点演算(図4.11，図4.12)と四角形性6点との関係を明らかにせよ.

(iv)　射影直線上の点演算の法則(結合律，分配律，交換律)を四角形性6点の性質を用

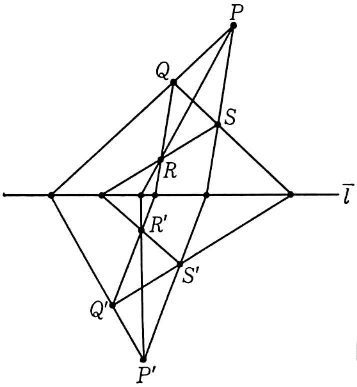


図 4・15

いて証明せよ．

3　射影直線 $\boldsymbol{P}^1$ の射影変換群 $\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{P}^1}$ を §4. 1, b) で特徴づけたのにならって，射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ の射影変換群 $\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{P}^2}$ について考察してみよ．

第5章　n 次元射影幾何

§5.1　n 次元射影空間

a) n 次元射影空間の定義

可換体 K を基礎の体として定めておく．ふつう $K=\boldsymbol{R}$(実数全体の体)をとる．しかし，K として複素数体 $\boldsymbol{C}$ や有限体 $\boldsymbol{F}_q$ をとっても，これからの理論は大部分そのまま成立する．しかし，今後特にことわらない限り $K=\boldsymbol{R}$ とする．

K 上の $n+1$ 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{V}^{n+1}$ をとり，

(5.1)
$$^*\boldsymbol{V}^{n+1}=\boldsymbol{V}^{n+1}-\{0\}$$

とする．$^*\boldsymbol{V}^{n+1}$ に属する二つのベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ の間の関係 ～ を

$$\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}\iff\exists\lambda\in K,\ \lambda\neq0:\ \lambda\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$$

と定義する．～ は明らかに同値関係である．この同値関係 ～ によって $^*\boldsymbol{V}^{n+1}$を類別して得られる同値類全体の集合を

(5.2)
$$\tilde{\boldsymbol{V}}^{n+1}={}^*\boldsymbol{V}^{n+1}/\sim$$

と表わす．また $\boldsymbol{x}\in{}^*\boldsymbol{V}^{n+1}$ を含む同値類を $\tilde{\boldsymbol{x}}$ で表わそう．

この $\tilde{\boldsymbol{V}}^{n+1}$ のことを **n 次元射影空間**(projective space)といい

(5.3)
$$\boldsymbol{P}^n$$

で表わす．ただし $n\geqq1$ とする．

b) 射影部分空間

定義 5.1　$\boldsymbol{V}^{n+1}$ の $r+1$ 次元部分ベクトル空間 $\boldsymbol{W}^{r+1}$ に対して，

$$\tilde{\boldsymbol{W}}^{r+1}={}^*\boldsymbol{W}^{r+1}/\sim$$

は $\boldsymbol{P}^n=\tilde{\boldsymbol{V}}^{n+1}$ の部分集合となる．$\tilde{\boldsymbol{W}}^{r+1}=\boldsymbol{E}^r$ とおいて，$\boldsymbol{P}^n$ の **r 次元部分空間**という．$r=\dim\boldsymbol{E}^r$ と書く．

$r=n$ であれば，$\boldsymbol{W}^{n+1}=\boldsymbol{V}^{n+1}$，したがって $\boldsymbol{E}^n=\boldsymbol{P}^n$ である．すなわち，$\boldsymbol{P}^n$ の n 次元部分空間は $\boldsymbol{P}^n$ 自身に限る．

$r=n-1$ のとき，$\boldsymbol{E}^{n-1}$ を $\boldsymbol{P}^n$ 上の**射影超平面**(hyperplane)という．

$r=2$, $r=1$ のとき，$\boldsymbol{E}^2$ および $\boldsymbol{E}^1$ をそれぞれ $\boldsymbol{P}^n$ 上の**射影平面**および**射影直**

線という.

$r=0$ のとき，すなわち V^{n+1} の1次元部分ベクトル空間 $\boldsymbol{W}^1=\{\lambda \boldsymbol{x} \mid \lambda \in K\}$ に対して

$$\boldsymbol{E}^0=\tilde{\boldsymbol{W}}^1={}^*\boldsymbol{W}^1/\sim=\{\tilde{x}\}$$

はただ一つの元よりなる．すなわち0次元部分空間は $\boldsymbol{P}^n$ の1点を表わす．$\boldsymbol{P}^n$ の点は $\boldsymbol{E}^0$ と表わすほか，ふつう $P, Q, A, B, \cdots$ 等で表わす．

(I) n 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^n$ の二つの部分空間 $\boldsymbol{E}_1{}^r$ と $\boldsymbol{E}_2{}^s$ とに対して，それらの共通部分 $\boldsymbol{E}_1{}^r \cap \boldsymbol{E}_2{}^s$ は空集合かまたは一つの t 次元部分空間 $\boldsymbol{E}_3{}^t$ $(t \geqq 0)$ を作る．また $\boldsymbol{E}_1{}^r$ と $\boldsymbol{E}_2{}^s$ とを含むもっとも次元の低い部分空間 $\boldsymbol{E}_4{}^u$ が定まる．これらを $\boldsymbol{E}_1{}^r, \boldsymbol{E}_2{}^s$ の**交わり**および**結び**といい

(5.4) $$\boldsymbol{E}_3{}^t=\boldsymbol{E}_1{}^r \cap \boldsymbol{E}_2{}^s, \qquad \boldsymbol{E}_4{}^u=\boldsymbol{E}_1{}^r \vee \boldsymbol{E}_2{}^s$$

と表わす．例えば，2点 A, B を通る射影直線は $A \vee B$ で表わされる．

証明 $\boldsymbol{P}^n={}^*\boldsymbol{V}^{n+1}/\sim$ に対して $\boldsymbol{E}_1{}^r={}^*\boldsymbol{W}_1{}^{r+1}/\sim$，$\boldsymbol{E}_2{}^s={}^*\boldsymbol{W}_2{}^{s+1}/\sim$ とする．そのとき $\boldsymbol{W}_3{}^{t+1}=\boldsymbol{W}_1{}^{r+1} \cap \boldsymbol{W}_2{}^{s+1}$ は $\boldsymbol{V}^{n+1}$ の部分ベクトル空間である．よって $\boldsymbol{E}_1{}^r \cap \boldsymbol{E}_2{}^s={}^*\boldsymbol{W}_3{}^{t+1}/\sim$ は空集合になる $(t=-1)$ か，または t 次元部分空間となる $(t \geqq 0)$．

また $\boldsymbol{V}^{n+1}$ の中で $\boldsymbol{W}_4{}^{u+1}=\boldsymbol{W}_1{}^{r+1}+\boldsymbol{W}_2{}^{s+1}$ とおけば，$\boldsymbol{E}_4{}^u={}^*\boldsymbol{W}^{u+1}/\sim$ は $\boldsymbol{E}_1{}^r$ と $\boldsymbol{E}_2{}^s$ とを含むもっとも低次元の部分空間である．▌

(II) $\boldsymbol{P}^n$ の二つの部分空間 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2$ に対して

(5.5) $$\dim \boldsymbol{E}_1+\dim \boldsymbol{E}_2=\dim(\boldsymbol{E}_1 \cap \boldsymbol{E}_2)+\dim(\boldsymbol{E}_1 \vee \boldsymbol{E}_2),$$

ただし，$\boldsymbol{E}_1 \cap \boldsymbol{E}_2=\phi$ のとき，$\dim \phi=-1$ とおく．

証明 (I)において

$$\dim \boldsymbol{W}_1{}^{r+1}+\dim \boldsymbol{W}_2{}^{s+1}=\dim(\boldsymbol{W}_1{}^{r+1} \cap \boldsymbol{W}_2{}^{s+1})+\dim(\boldsymbol{W}_1{}^{r+1}+\boldsymbol{W}_2{}^{s+1})$$

である．したがって両辺より2を引けば

$$\dim \boldsymbol{E}_1+\dim \boldsymbol{E}_2=\dim(\boldsymbol{E}_1 \cap \boldsymbol{E}_2)+\dim(\boldsymbol{E}_1 \vee \boldsymbol{E}_2)$$

が成り立つことがわかる．▌

例5.1 $\dim \boldsymbol{E}_1+\dim \boldsymbol{E}_2 \geqq n$ ならば $\boldsymbol{E}_1 \cap \boldsymbol{E}_2 \neq \phi$ である．

[解] $\boldsymbol{E}_1 \cap \boldsymbol{E}_2=\phi$ ならば $\dim(\boldsymbol{E}_1 \vee \boldsymbol{E}_2)>n$ となって矛盾を生じるからである．▌

例えば，$n=2$ とすれば $\boldsymbol{E}_1{}^1 \cap \boldsymbol{E}_2{}^1 \neq \phi$，$n=3$ とすれば $\boldsymbol{E}_1{}^1 \cap \boldsymbol{E}_2{}^2 \neq \phi$ である．

例 5.2

(5.6)
$$\dim(\boldsymbol{E}_1 \vee \boldsymbol{E}_2) \leqq \dim \boldsymbol{E}_1 + \dim \boldsymbol{E}_2 + 1.$$

[解]　(5.5)において $\dim(\boldsymbol{E}_1 \cap \boldsymbol{E}_2) \geqq -1$ を代入すればよい. ▌

例 5.3　$\boldsymbol{P}^n$ 内に $m+1$ 個の点 $\boldsymbol{E}_0{}^0, \cdots, \boldsymbol{E}_m{}^0$ をとれば，これらを含む最小の部分空間 $\boldsymbol{E}^r = \boldsymbol{E}_0{}^0 \vee \cdots \vee \boldsymbol{E}_m{}^0$ の次元 r は m をこえない.

[解]　m についての帰納法による. $\dim(\boldsymbol{E}_0{}^0 \vee \cdots \vee \boldsymbol{E}_k{}^0) \leqq k$ であれば $\dim((\boldsymbol{E}_0{}^0 \vee \cdots \vee \boldsymbol{E}_k{}^0) \vee \boldsymbol{E}_{k+1}{}^0) \leqq \dim(\boldsymbol{E}_0{}^0 \vee \cdots \vee \boldsymbol{E}_k{}^0) + 0 + 1 \leqq k+1$ が成り立つ. ▌

例 5.4　$\boldsymbol{P}^n$ 内に m 個の射影超平面 $\boldsymbol{E}_1{}^{n-1}, \cdots, \boldsymbol{E}_m{}^{n-1}$ をとれば
$$\dim(\boldsymbol{E}_1{}^{n-1} \cap \cdots \cap \boldsymbol{E}_m{}^{n-1}) \geqq n-m.$$

[解]　m についての帰納法を用いればよい. ▌

定義 5.2　例 5.3 において $\dim(\boldsymbol{E}_0{}^0 \vee \cdots \vee \boldsymbol{E}_m{}^0) = m$ のとき，これら $m+1$ 個の点 $\boldsymbol{E}_i{}^0$ $(i=0, 1, \cdots, m)$ は**一般の位置**にあるという.

例 5.5　$\boldsymbol{P}^n$ の三つの部分空間 $\boldsymbol{E}_1{}^r, \boldsymbol{E}_2{}^s, \boldsymbol{E}_3{}^t$ において，$\boldsymbol{E}_1{}^r \subseteqq \boldsymbol{E}_3{}^t$ であれば
$$(\boldsymbol{E}_1{}^r \vee \boldsymbol{E}_2{}^s) \cap \boldsymbol{E}_3{}^t = \boldsymbol{E}_1{}^r \vee (\boldsymbol{E}_2{}^s \cap \boldsymbol{E}_3{}^t) \qquad \text{(モジュラ性)}$$
が成り立つ.

[解]　$\boldsymbol{E}_i = {}^*\boldsymbol{W}_i/\sim$ とするとき，上の関係は
$$(\boldsymbol{W}_1 + \boldsymbol{W}_2) \cap \boldsymbol{W}_3 = \boldsymbol{W}_1 + (\boldsymbol{W}_2 \cap \boldsymbol{W}_3), \qquad \boldsymbol{W}_1 \subseteqq \boldsymbol{W}_3$$
と同値である. これはベクトル空間の部分空間について容易に確かめられる関係式である. ▌

例 5.6(Desargues の定理)　われわれは§4.6 で射影平面内で証明したが，これを一般の n 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^n$ $(n \geqq 3)$ で証明しよう.

$\boldsymbol{P}^n$ 内に点 $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ があり，三つの射影直線 $A_1 \vee B_1$, $A_2 \vee B_2$, $A_3 \vee B_3$ が 1 点 P で交われば，3 点
$$Q_1 = (A_2 \vee A_3) \cap (B_2 \vee B_3), \qquad Q_2 = (A_3 \vee A_1) \cap (B_3 \vee B_1),$$
$$Q_3 = (A_1 \vee A_2) \cap (B_1 \vee B_2)$$
は同一射影直線上にある.

ここで，3 直線 $A_i \vee B_i$ $(i=1, 2, 3)$ が同一射影平面上にない場合について証明しよう.

射影平面 $\boldsymbol{E}_1{}^2 = A_1 \vee A_2 \vee A_3$, $\boldsymbol{E}_2{}^2 = B_1 \vee B_2 \vee B_3$ は異なっているので $\boldsymbol{E}_1{}^2 \cap \boldsymbol{E}_2{}^2 = l$ は射影直線である. したがって図 5.1 で見るように $Q_1 = (A_2 \vee A_3) \cap (B_2 \vee$

$B_3) \in \boldsymbol{E}_1{}^2 \cap \boldsymbol{E}_2{}^2 = l$, 同様に $Q_2, Q_3 \in l$ となり, Q_1, Q_2, Q_3 は同一射影直線 l 上にあることがわかった.

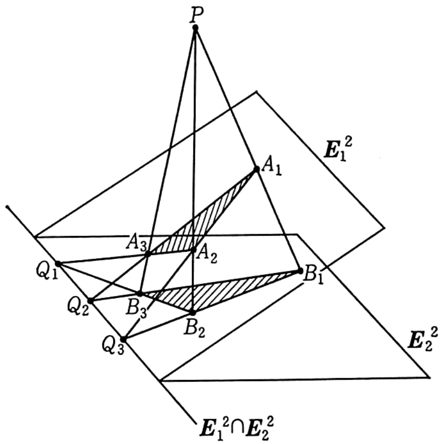


図 5・1

ここで A_i, B_i がすべて同一射影平面 $\boldsymbol{E}_1{}^2$ 上にあれば§4.6のように証明される. ただし, 全体が $\boldsymbol{P}^3$ に含まれていることを用いれば, $\boldsymbol{E}_1{}^2$ 上にない1点 O_1 をと

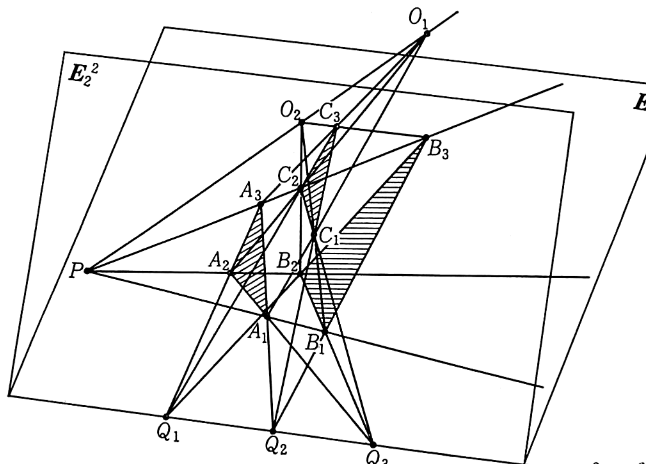


図 5・2

り $O_1 \vee P$ 上に別の 1 点 O_2 をとることができる．射影平面 $O_1 \vee P \vee A_i$ 上で $(O_1 \vee A_i) \cap (O_2 \vee B_i) = C_i$ $(i=1, 2, 3)$ が定まる．このとき $\boldsymbol{E}_1{}^2 = A_1 \vee A_2 \vee A_3 = B_1 \vee B_2 \vee B_3$ と $\boldsymbol{E}_2{}^2 = C_1 \vee C_2 \vee C_3$ は異なり，上の結果を用いることができる．すなわち図 5.2 で見られるように射影直線 $l = \boldsymbol{E}_1{}^2 \cap \boldsymbol{E}_2{}^2$ の上に $Q_1 = (A_2 \vee A_3) \cap (C_2 \vee C_3) = (B_2 \vee B_3) \cap (C_2 \vee C_3) = (C_2 \vee C_3) \cap l = (A_2 \vee A_3) \cap (B_2 \vee B_3)$ および Q_2, Q_3 がある．

c）射影座標枠と斉次座標

定義 5.3　n 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^n$ 内の $n+2$ 個の点 $\boldsymbol{E}_0{}^0, \cdots, \boldsymbol{E}_{n+1}{}^0$ が，その中のどの $n+1$ 個の点も一般の位置にあるとき，この点の列を**射影座標枠**という．これを

(5.7)
$$\Sigma_P = (\boldsymbol{E}_0{}^0, \cdots, \boldsymbol{E}_n{}^0 ; \boldsymbol{E}_{n+1}{}^0)$$

と表わす．

いま $\boldsymbol{P}^n = {}^*\boldsymbol{V}^{n+1}/\sim$ とするとき，Σ_P に対して

$$\boldsymbol{E}_i{}^0 = \tilde{\boldsymbol{e}}_i, \quad i = 0, \cdots, n+1$$

で，

(5.8)
$$\boldsymbol{V}^{n+1} = K\boldsymbol{e}_0 + \cdots + K\boldsymbol{e}_n,$$

(5.9)
$$\boldsymbol{e}_{n+1} = \boldsymbol{e}_0 + \cdots + \boldsymbol{e}_n$$

であるようにとることができる．

何となれば，$\tilde{\boldsymbol{e}}_0, \cdots, \tilde{\boldsymbol{e}}_n$ が一般の位置にあることから，$\tilde{\boldsymbol{e}}_i$ の代表 $\boldsymbol{e}_i$ を任意にとるとき (5.8) でなければならない．したがって，

(5.10)
$$\boldsymbol{e}_{n+1} = \lambda_0 \boldsymbol{e}_0 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n \qquad (\lambda_i \in K)$$

と表わされる．もしもある $\lambda_i = 0$ であれば $\boldsymbol{e}_0, \cdots, \boldsymbol{e}_{i-1}, \boldsymbol{e}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{n+1}$ は 1 次従属となって，Σ_P の仮定に反する．よって (5.10) において $\lambda_0 \neq 0, \cdots, \lambda_n \neq 0$ である．したがって $\boldsymbol{e}_i$ の代りに $\lambda_i \boldsymbol{e}_i$ を選べば，(5.9) が成り立つ．

一方 $\boldsymbol{E}_i{}^0$ $(i=0, \cdots, n+1)$ を与えたとき，(5.8), (5.9) であるような $\boldsymbol{e}_i$ の選び方はいろいろあるが，2 組の $(\boldsymbol{e}_0, \cdots, \boldsymbol{e}_{n+1})$ および $(\boldsymbol{e}_0', \cdots, \boldsymbol{e}_{n+1}')$ があれば，或る $\rho \neq 0$ があって

(5.11)
$$\boldsymbol{e}_i' = \rho \boldsymbol{e}_i, \quad i = 0, \cdots, n+1, \ \rho \neq 0$$

となる．

何故ならば，一般に $\boldsymbol{e}_i' = \rho_i \boldsymbol{e}_i$ $(i=0, \cdots, n+1, \ \rho_i \neq 0)$ となるのであるが，(5.9)

は $(\boldsymbol{e}_0, \cdots, \boldsymbol{e}_{n+1})$ および $(\boldsymbol{e}_0', \cdots, \boldsymbol{e}_{n+1}')$ について成り立つので

$$\rho_{n+1}\boldsymbol{e}_{n+1} = \rho_0\boldsymbol{e}_0 + \cdots + \rho_n\boldsymbol{e}_n$$

となる．これと $\rho_{n+1}\boldsymbol{e}_{n+1} = \rho_{n+1}(\boldsymbol{e}_0 + \cdots + \boldsymbol{e}_n)$ とを比べれば，$\rho_0 = \cdots = \rho_n = \rho_{n+1}$ でなければならない．

定義 5.4　n 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^n$ の射影座標枠 $\Sigma_P = (\boldsymbol{E}_0{}^0, \cdots, \boldsymbol{E}_n{}^0; \boldsymbol{E}_{n+1}{}^0)$ を定めるとき，$\boldsymbol{E}_i{}^0 = \tilde{\boldsymbol{e}}_i$ $(i=0, \cdots, n+1)$ の代表 $\boldsymbol{e}_i$ を

$$\boldsymbol{e}_{n+1} = \boldsymbol{e}_0 + \cdots + \boldsymbol{e}_n$$

であるように選ぶ．そのとき $\boldsymbol{P}^n$ の各点 $\boldsymbol{E}^0$ に対して

$$\boldsymbol{E}^0 = \tilde{\boldsymbol{e}}, \qquad \boldsymbol{e} = \xi_0\boldsymbol{e}_0 + \cdots + \xi_n\boldsymbol{e}_n \quad (\xi_i \in K)$$

と表わすとき $(\xi_0, \cdots, \xi_n)$ を点 $\boldsymbol{E}^0$ の Σ_P に関する**斉次座標**(または**同次座標**)といい

(5.12)　　$$\boldsymbol{E}^0 = P(\xi_0, \cdots, \xi_n)$$

と表わす．

上で見たように $(\boldsymbol{e}_0, \cdots, \boldsymbol{e}_{n+1})$ の表わし方は，K の元 $\rho \neq 0$ によるスカラー倍を除いて一意に定まるので，点 $\boldsymbol{E}^0$ の斉次座標の一般の形は $(\rho\xi_0, \rho\xi_1, \cdots, \rho\xi_n)$ $(\rho \neq 0)$ である．すなわち

(5.13)　$$P(\xi_0, \cdots, \xi_n) = P(\xi_0', \cdots, \xi_n') \iff \xi_i' = \rho\xi_i, \quad i = 0, \cdots, n, \quad \rho \neq 0$$

である(これが斉次座標と呼ばれる所以である)．

注意　$\boldsymbol{P}^n = {}^*\boldsymbol{V}^{n+1}/\sim$ とし，$\boldsymbol{V}^{n+1}$ の任意の基底 $(\boldsymbol{e}_0, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ をとるとき

$$\boldsymbol{E}_i{}^0 = \tilde{\boldsymbol{e}}_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n, \qquad \boldsymbol{E}_{n+1}{}^0 = (\boldsymbol{e}_0 + \cdots + \boldsymbol{e}_n)^{\sim}$$

とおけば，$\Sigma_P = (\boldsymbol{E}_0{}^0, \cdots, \boldsymbol{E}_n{}^0; \boldsymbol{E}_{n+1}{}^0)$ は $\boldsymbol{P}^n$ の射影座標枠となる．そのとき

$$\boldsymbol{V}^{n+1} \ni \boldsymbol{e} = \sum_{i=0}^{n} \xi_i \boldsymbol{e}_i$$

に対して $P(\xi_0, \cdots, \xi_n) = \tilde{\boldsymbol{e}}$ が成り立つ．

d）部分空間の射影座標枠

例 5.7　$\boldsymbol{P}^n$ 内に一般の位置にある $r+1$ 個の点 $\boldsymbol{E}_i{}^0$ $(i=0, \cdots, r)$ をとる．$\boldsymbol{E}^r = \boldsymbol{E}_0{}^0 \vee \cdots \vee \boldsymbol{E}_r{}^0$ は $\boldsymbol{P}^n$ の r 次元部分空間である．

$$\boldsymbol{E}_i{}^0 = \tilde{\boldsymbol{e}}_i, \qquad \boldsymbol{e}_i \in \boldsymbol{V}^{n+1}, \qquad i = 0, \cdots, r$$

を任意に定めるとき，$\boldsymbol{E}^r \ni \boldsymbol{E}^0 = \tilde{\boldsymbol{e}}$ は

$$\boldsymbol{e} = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \boldsymbol{e}_i \qquad (\lambda_i \in K)$$

と表わされる.

(5.14) $$\boldsymbol{E}^r \ni \boldsymbol{E}^0 \longleftrightarrow (\lambda_0, \cdots, \lambda_r)$$

は，r 次元射影空間としての $\boldsymbol{E}^r$ の一つの斉次座標である.

特に $r=1$，$\boldsymbol{E}^1$ が射影直線で $\boldsymbol{E}^1=\boldsymbol{E}_0{}^0 \vee \boldsymbol{E}_1{}^0$ と表わされるとき

$$\boldsymbol{E}^1 \ni \boldsymbol{E}^0 = \tilde{\boldsymbol{e}}, \qquad \boldsymbol{e} = \lambda_0\boldsymbol{e}_0+\lambda_1\boldsymbol{e}_1$$

によって $\boldsymbol{E}^0$ の斉次座標 (λ_0, λ_1) が定まる．例えば $\boldsymbol{E}^1$ 上の 4 点 $P(\lambda_{10}, \lambda_{11})$，$P(\lambda_{20}, \lambda_{21})$，$P(\lambda_{30}, \lambda_{31})$，$P(\lambda_{40}, \lambda_{41})$ の複比 λ は

(5.15) $$\lambda = \frac{\lambda_{10}\lambda_{31}-\lambda_{11}\lambda_{30}}{\lambda_{10}\lambda_{41}-\lambda_{11}\lambda_{40}} \cdot \frac{\lambda_{20}\lambda_{41}-\lambda_{21}\lambda_{40}}{\lambda_{20}\lambda_{31}-\lambda_{21}\lambda_{30}}$$

で与えられる.

特に $(\lambda_{10}, \lambda_{11})=(0, 1)$，$(\lambda_{20}, \lambda_{21})=(1, 0)$ の場合には

$$\lambda = \frac{\lambda_{30}}{\lambda_{31}} \cdot \frac{\lambda_{41}}{\lambda_{40}}$$

となる.

例 5.8 $\boldsymbol{P}^n$ の射影座標枠 Σ_P を一つ定める．任意の射影超平面 $\boldsymbol{E}^{n-1}$ は，或る $(a_0, \cdots, a_n) \neq (0, \cdots, 0)$ によって

(5.16) $$\boldsymbol{E}^{n-1} = \{P(\xi_0, \cdots, \xi_n) \mid a_0\xi_0+\cdots+a_n\xi_n=0\}$$

によって与えられる．しかも $(a_0, \cdots, a_n)$ はスカラー倍を除いて一意に定まる.

[解] $$\boldsymbol{E}^{n-1} = \boldsymbol{F}_0{}^0 \vee \cdots \vee \boldsymbol{F}_{n-1}{}^0,$$

$$\boldsymbol{F}_i{}^0 = P(\xi_{i0}, \cdots, \xi_{in}), \qquad i = 0, \cdots, n-1$$

とする．そのとき $n\times(n+1)$ 行列

$$(\xi_{ij})_{\substack{i=0, \cdots, n-1 \\ j=0, \cdots, n}}$$

の階数は n である．よって

$$\sum_{j=0}^{n} a_j\xi_{ij} = 0, \qquad i = 0, \cdots, n-1$$

の解 $(a_0, \cdots, a_n) \neq (0, \cdots, 0)$ が存在し，しかも，一般の解は $(\rho a_0, \cdots, \rho a_n)$ $(\rho\neq 0)$ となる．この $(a_0, \cdots, a_n)$ に対して(5.16)が成り立つことがわかる. ▌

例 5.9 $\boldsymbol{P}^n$ の射影座標枠 Σ_P を一つ定めるとき，任意の r 次元部分空間 $\boldsymbol{E}^r$ は，或る $(a_{ij})_{\substack{i=1, \cdots, n-r \\ j=0, \cdots, n}}$ によって

$$\boldsymbol{E}^r = \left\{P(\xi_0, \cdots, \xi_n) \middle| \sum_{j=0}^{n} a_{ij}\xi_j = 0,\ \ i=1, \cdots, n-r\right\}$$

と表わされる．ただし$(n-r)\times(n+1)$行列(a_{ij})の階数は$n-r$である．

［解］ $\boldsymbol{E}^r = \boldsymbol{E}_1^{n-1} \cap \cdots \cap \boldsymbol{E}_{n-r}^{n-1}$とし，各$\boldsymbol{E}_i^{n-1}$を

$$\boldsymbol{E}_i^{n-1} = \left\{P(\xi_0, \cdots, \xi_n) \middle| \sum_{j=0}^{n} a_{ij}\xi_j = 0\right\}, \qquad i = 1, \cdots, n-r$$

と表わせばよい．▌

e）斉次座標の変換

(III) (i) n次元射影空間$\boldsymbol{P}^n$に二つの射影座標枠$\Sigma_P = (\boldsymbol{E}_0^{\,0}, \cdots, \boldsymbol{E}_n^{\,0}; \boldsymbol{E}_{n+1}^{\,0})$, $\Sigma_P' = (\boldsymbol{E}_0^{\,0\prime}, \cdots, \boldsymbol{E}_n^{\,0\prime}; \boldsymbol{E}_{n+1}^{\,0\prime})$があって，$\boldsymbol{P}^n$の点$\boldsymbol{E}^0$が2組の斉次座標によって

(5.17) $$\boldsymbol{E}^0 = P_\Sigma(\xi_0, \cdots, \xi_n) = P_{\Sigma'}(\xi_0', \cdots, \xi_n')$$

と表わされるときに，或る$(n+1)\times(n+1)$行列(τ_{ij})（ただし$\det(\tau_{ij}) \neq 0$）によって

(5.18) $$\rho\begin{bmatrix}\xi_0' \\ \xi_1' \\ \vdots \\ \xi_n'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tau_{00} & \cdots & \tau_{0n} \\ \tau_{10} & \cdots & \tau_{1n} \\ & \cdots\cdots & \\ \tau_{n0} & \cdots & \tau_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n\end{bmatrix}, \qquad \rho \neq 0$$

と表わされる．

(ii) 行列(τ_{ij})はそれ自身は一意には定まらないが，定数倍を除いて一意に定まる．すなわち，別の(τ_{ij}')に対しても(5.18)が成り立てば，或る$\lambda\neq 0$によって

(5.19) $$\tau_{ij}' = \lambda\tau_{ij}, \qquad i, j = 0, \cdots, n.$$

(iii) 射影座標枠Σ_Pと，行列(τ_{ij}) $(\det(\tau_{ij}) \neq 0)$とが与えられたとき，或る射影座標枠Σ_P'が定まって，(5.18)が変換の式となるようにとれる．

証明 (i) $\boldsymbol{P}^n = {}^*\boldsymbol{V}^{n+1}/\sim$に対して，$\Sigma_P$に対応して$\boldsymbol{E}_i^{\,0} = \tilde{\boldsymbol{e}}_i$ $(i=0, \cdots, n)$, $\boldsymbol{E}_{n+1}^{\,0} = (\boldsymbol{e}_0 + \cdots + \boldsymbol{e}_n)^\sim$に$\boldsymbol{V}^{n+1}$の基底$(\boldsymbol{e}_0, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$をとり，同じく$\Sigma_P'$に対応して同様に$\boldsymbol{V}^{n+1}$の基底$(\boldsymbol{e}_0', \cdots, \boldsymbol{e}_n')$をとる．そのとき$\boldsymbol{V}^{n+1}$の基底の変換：

(5.20) $$(\boldsymbol{e}_0, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{e}_1', \cdots, \boldsymbol{e}_n')(\tau_{ij}), \qquad \det(\tau_{ij}) \neq 0$$

と表わされる．これから，アフィン幾何の場合と同様に

$$\boldsymbol{e} = \sum_{i=0}^{n}\xi_i\boldsymbol{e}_i = \sum_{i=0}^{n}\xi_i'\boldsymbol{e}_i'$$

の関係によって(5.18)が導かれる．斉次座標では一般に定数倍だけ不確定である

ので，(5.18)で $\rho \neq 0$ の項が残されるのである．

(ii)　(5.20)において，$(\boldsymbol{e}_0, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ および $(\boldsymbol{e}_0', \cdots, \boldsymbol{e}_n')$ の代りに $(\lambda\boldsymbol{e}_0, \cdots, \lambda\boldsymbol{e}_n)$，$(\mu\boldsymbol{e}_0', \cdots, \mu\boldsymbol{e}_n')$ $(\lambda \neq 0,\ \mu \neq 0)$ だけの自由度が残されているので，(5.20)の式において (τ_{ij}) の代りに $\tau_{ij}' = (\mu/\lambda)\tau_{ij}$ $(i, j = 0, \cdots, n)$ となるだけの自由度が残されている．

(iii)も容易にわかる．▌

§5.2　n 次元射影変換

a）n 次元射影変換の定義

射影幾何における中心的問題として，n 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^n$ の射影変換および射影変換群について考えよう．

定義 5.5　n 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^n = {}^*\boldsymbol{V}^{n+1}/\sim$ において，$\boldsymbol{V}^{n+1}$ の線型自己同型

$$f:\ \boldsymbol{V}^{n+1} \longrightarrow \boldsymbol{V}^{n+1}$$

(すなわち $\boldsymbol{V}^{n+1}$ から $\boldsymbol{V}^{n+1}$ への全単射となる線型写像)は 0 を 0 にうつし，かつ ${}^*\boldsymbol{V}^{n+1}$ の同値関係 $\sim$ を保つので，全単射

$$\tilde{f}:\ {}^*\boldsymbol{V}^{n+1}/\sim \longrightarrow {}^*\boldsymbol{V}^{n+1}/\sim$$

を生じる．この

$$\tilde{f}:\ \boldsymbol{P}^n \longrightarrow \boldsymbol{P}^n$$

を，$\boldsymbol{P}^n$ の**射影変換**という．

(IV)　(i)　$\boldsymbol{P}^n = {}^*\boldsymbol{V}^{n+1}/\sim$ において，$\boldsymbol{V}^{n+1}$ の二つの線型自己同型 f_1, f_2 に対して，これらが $\boldsymbol{P}^n$ の同一の射影変換を生じるための必要十分条件は

$$\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2 \iff \exists\lambda \neq 0,\ f_1 = \lambda f_2,\ \lambda \in K.$$

(ii)　$\boldsymbol{P}^n$ の射影変換の全体は変換群 $\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{P}^n}$ を作る．$\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{P}^n}$ を **n 次元射影変換群**という．

$$\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{P}^n} \cong \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^{n+1})/\boldsymbol{Z}^{n+1}\ (= \boldsymbol{PGL}(\boldsymbol{V}^{n+1})) \tag{5.21}$$

である．ただし $\boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^{n+1})$ は $\boldsymbol{V}^{n+1}$ の線型自己同型全体の作る群($\boldsymbol{V}^{n+1}$ 上の一般線型群)，$\boldsymbol{Z}^{n+1}$ は

$$\boldsymbol{Z}^{n+1} = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix} \middle|\ \lambda \neq 0,\ \lambda \in K \right\} \tag{5.22}$$

とする．((5.21)の右辺 $\boldsymbol{PGL}(\boldsymbol{V}^{n+1})$ はふつう $\boldsymbol{V}^{n+1}$ 上の**一般射影変換群**と呼ばれる．)

証明　(i)　$\tilde{f}_1=\tilde{f}_2$ は，任意の $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{V}^{n+1}$ に対して

$$f_1(\boldsymbol{x})=\lambda(\boldsymbol{x})f_2(\boldsymbol{x}),\qquad \lambda(\boldsymbol{x})\in K-\{0\}$$

と同値である．f_1, f_2 共に線型であることから $\lambda(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}\in{}^*\boldsymbol{V}^{n+1}$ によらない一定の値であることがわかる．故に $f_1=\lambda f_2$ とならねばならない．

(ii)は(i)から直ちに導かれる．▌

定義 5.6　二つの n 次元射影空間 $\boldsymbol{P}_i^n={}^*\boldsymbol{V}_i^{n+1}/\sim$ $(i=1, 2)$ において，$f: \boldsymbol{V}_1^{n+1}\to\boldsymbol{V}_2^{n+1}$ である全単射線型写像 f は，全単射 $\tilde{f}: \boldsymbol{P}_1^n\to\boldsymbol{P}_2^n$ をひきおこす．このとき $\tilde{f}$ を $\boldsymbol{P}_1^n$ から $\boldsymbol{P}_2^n$ への**射影写像**という．(したがって，$\boldsymbol{P}_1^n=\boldsymbol{P}_2^n$ のときが，上に定義した射影変換である．)

(V)　$\boldsymbol{P}^n$ の射影変換 $\tilde{f}$ は，任意の r 次元部分空間 $\boldsymbol{E}^r$ $(0\leqq r\leqq n)$ を，r 次元部分空間 $\tilde{f}(\boldsymbol{E}^r)$ にうつす．

$\boldsymbol{E}^r$ および $\tilde{f}(\boldsymbol{E}^r)$ を r 次元射影空間とみるとき，$\tilde{f}: \boldsymbol{E}^r\to\tilde{f}(\boldsymbol{E}^r)$ は r 次元射影写像である．

証明　$\boldsymbol{P}^n={}^*\boldsymbol{V}^{n+1}/\sim$，$\boldsymbol{E}^r={}^*\boldsymbol{W}^{r+1}/\sim$，$\boldsymbol{W}^{r+1}\subseteqq\boldsymbol{V}^{n+1}$ とすると，線型写像 $f: \boldsymbol{V}^{n+1}\to\boldsymbol{V}^{n+1}$ は $\boldsymbol{W}^{r+1}\to f(\boldsymbol{W}^{r+1})$，かつ $f(\boldsymbol{W}^{r+1})$ も $\boldsymbol{V}^{n+1}$ の $r+1$ 次元部分ベクトル空間である．したがって $\tilde{f}(\boldsymbol{E}^r)={}^*f(\boldsymbol{W}^{r+1})/\sim$ も $\boldsymbol{P}^n$ の r 次元部分空間となる．このとき $\tilde{f}: \boldsymbol{E}^r\to\tilde{f}(\boldsymbol{E}^r)$ は，定義5.6の意味で射影写像である．▌

b）射影変換群の自由度

(VI)　**(射影幾何の基本定理)**　n 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^n$ において，どの $n+1$ 個の点も同一射影超平面上にない $n+2$ 個の点 $(\boldsymbol{E}_0{}^0, \cdots, \boldsymbol{E}_{n+1}{}^0)$ を，同じ性質をもつ $(\boldsymbol{E}_0{}^{0\prime}, \cdots, \boldsymbol{E}_{n+1}{}^{0\prime})$ にうつす射影変換 $\tilde{f}$ は必ず存在し，しかもただ一つに限る．特に $n+2$ 個の点 $\boldsymbol{E}_0{}^0, \cdots, \boldsymbol{E}_{n+1}{}^0$ を固定する射影変換は恒等写像に限る．

上の定理を射影座標枠という言葉を用いれば，

(VI)*　n 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^n$ の任意に二つの射影座標枠 Σ_P, Σ_P' をとるとき，Σ_P を Σ_P' にうつす射影変換 $\tilde{f}$ は必ず存在して，しかもただ一つに限る．特に Σ_P を固定する射影変換は恒等写像に限る．

証明　$\tilde{f}$ の存在の証明: $n=2$ の場合と同様である．$\boldsymbol{P}^n={}^*\boldsymbol{V}^{n+1}/\sim$，$\boldsymbol{E}_i{}^0=\tilde{\boldsymbol{e}}_i$，$\boldsymbol{E}_i{}^{0\prime}=\tilde{\boldsymbol{f}}_i$ $(i=0, \cdots, n+1)$ $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{f}_i\in\boldsymbol{V}^{n+1})$ とする．仮定によって $(\boldsymbol{e}_0, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ および

$(\boldsymbol{f}_0, \cdots, \boldsymbol{f}_n)$ は $\boldsymbol{V}^{n+1}$ の基底となり，かつ

(5.23) $$\boldsymbol{e}_{n+1} = \alpha_0\boldsymbol{e}_0 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n, \quad \boldsymbol{f}_{n+1} = \beta_0\boldsymbol{f}_0 + \cdots + \beta_n\boldsymbol{f}_n,$$
$$\alpha_i \neq 0, \quad \beta_i \neq 0, \quad i = 0, \cdots, n$$

となる．そこで線型自己同型 $f: \boldsymbol{V}^{n+1} \to \boldsymbol{V}^{n+1}$ で

$$f(\boldsymbol{e}_i) = \lambda_i \boldsymbol{f}_i, \quad \lambda_i \neq 0, \quad i = 0, \cdots, n+1$$

を満足するものが存在することをいえばよい．ここで $\lambda_0, \cdots, \lambda_{n+1}$ の満足すべき必要十分条件は (5.23) の $\boldsymbol{e}_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \boldsymbol{e}_i$ に対応して

$$\lambda_{n+1}\boldsymbol{f}_{n+1} = \alpha_0\lambda_0\boldsymbol{f}_0 + \cdots + \alpha_n\lambda_n\boldsymbol{f}_n$$

と

$$\boldsymbol{f}_{n+1} = \beta_0\boldsymbol{f}_0 + \cdots + \beta_n\boldsymbol{f}_n$$

とが一致すること，すなわち

(5.24) $$\alpha_0\lambda_0 = \beta_0\lambda_{n+1}, \quad \alpha_1\lambda_1 = \beta_1\lambda_{n+1}, \quad \cdots, \quad \alpha_n\lambda_n = \beta_n\lambda_{n+1}$$

である．例えば，$\lambda_0 = \beta_0/\alpha_0$, $\cdots$, $\lambda_n = \beta_n/\alpha_n$, $\lambda_{n+1} = 1$ にとればよい．よってこのような f に対して，射影変換 $\tilde{f}$ は $\boldsymbol{E}_i^0$ を $\boldsymbol{E}_i^{0\prime}$ $(i=0, \cdots, n+1)$ にうつすことになる．

$\tilde{f}$ の一意なこと：上の証明において，(5.24) の一般解は，$\lambda_0, \cdots, \lambda_{n+1}$ に同時に或る $\rho \neq 0$ を掛けたものである．すなわち f の代りに ρf をとるだけの相違である．したがって $\tilde{f} = \widetilde{\rho f}$ であるので，求める射影変換 $\tilde{f}$ がただ一つであることがわかった．▌

c) 射影変換の特徴づけ

射影変換のより幾何学的な特徴づけを考えよう．

(VII) n 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^n$ から $\boldsymbol{P}^n$ への全単射 φ が射影変換であるための必要十分条件は

(i) $\boldsymbol{P}^n$ 上の任意の射影直線 $\boldsymbol{E}^1$ を，射影直線 $\varphi(\boldsymbol{E}^1)$ にうつす，

(ii) $\varphi: \boldsymbol{E}^1 \to \varphi(\boldsymbol{E}^1)$ は 1 次元射影写像である．

($n=2$ の場合は，定義 4.5 と一致している．)

証明 定義 5.5 で与えた射影変換 $\tilde{f}$ をかりに解析的射影変換，(VII) の (i), (ii) を満たす $\varphi: \boldsymbol{P}^n \to \boldsymbol{P}^n$ をかりに幾何的射影変換と呼ぼう．(V) において，解析的射影変換 $\tilde{f}$ は幾何的射影変換であることを証明しているので，ここでは逆の命題を証明しよう．そのために $n=2$ の場合とまったく同様に

(イ) $\boldsymbol{P}^n$ の幾何的射影変換の全体は変換群を作る，

（ロ）　どの $n+1$ 個の点も同一射影超平面上にない $n+2$ 個の点をすべて固定する幾何的射影変換は恒等写像しかない，

をいえばよい．

さて（イ）はほとんど自明である．（ロ）についても，$n=2$ の場合とまったく同様である．よって定理の成り立つことがわかる．▌

(VIII)　特に係数体 K が実数体 $\boldsymbol{R}$ である場合には，$\boldsymbol{P}^n$ から $\boldsymbol{P}^n$ への全単射 φ が射影変換であるための必要十分条件は，(VII) の (i) だけでよい．$(n\geqq 2)$

証明　(VII)(i) が成り立てば，$\boldsymbol{P}^n$ 上の任意の射影平面 $\boldsymbol{E}^2$ はまた射影平面 $\varphi(\boldsymbol{E}^2)$ にうつされる．よって，$n=2$ の場合の結果（§4.6(XVI)）を用いることができる．すなわち任意の $\boldsymbol{E}^1$ に対してこれを含む $\boldsymbol{E}^2$ をとって考えれば，(VII)(ii) が成り立つことがわかる．よって (VII) によって φ は $\boldsymbol{P}^n$ の射影変換となる．▌

d）射影変換と斉次座標

n 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^n$ の射影座標枠 $\Sigma_P=(\boldsymbol{E}_0{}^0, \cdots, \boldsymbol{E}_n{}^0 ; \boldsymbol{E}_{n+1}{}^0)$ を定めておく．$\boldsymbol{P}^n$ の射影変換 φ を

$$\varphi:\ P(\xi_0, \cdots, \xi_n) \longrightarrow P(\eta_0, \cdots, \eta_n)$$

とすれば，或る $(n+1)\times(n+1)$ 行列 (α_{ij}) $(\det(\alpha_{ij})\neq 0)$ があって

(5.25)
$$\rho\begin{bmatrix}\eta_0\\ \eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{00} & \cdots & \alpha_{0n}\\ \alpha_{10} & \cdots & \alpha_{1n}\\ & \cdots\cdots & \\ \alpha_{n0} & \cdots & \alpha_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_0\\ \xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix},\qquad \rho\neq 0$$

と表わされる．射影変換 φ に対して行列 (α_{ij}) は一意には定まらないで，(α_{ij}) の代りに

$$(\alpha_{ij}'),\qquad \alpha_{ij}'=\lambda\alpha_{ij},\qquad i, j=0, \cdots, n$$

をとっても同一の φ に対応する．この対応

$$\varphi \longrightarrow \{\lambda(\alpha_{ij})\}$$

によって，n 次元射影変換群 $\boldsymbol{G}_P{}^n$ は

(5.26)
$$\boldsymbol{G}_P{}^n \cong \boldsymbol{GL}(n+1, K)/\boldsymbol{Z}^{n+1}\ (=\boldsymbol{PGL}(n+1, K))$$

と表わされる．ここに，$\boldsymbol{GL}(n+1, K)$ は，可換体 K の元を係数とし行列式が 0 でない $(n+1)\times(n+1)$ 行列全体の作る群（K 上 $n+1$ 次の一般線型群），$\boldsymbol{Z}^{n+1}$ は $\begin{bmatrix}\lambda & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda\end{bmatrix}$ $(\lambda\neq 0,\ \lambda\in K)$ の形の行列の全体とする．（(5.26) の右辺 $\boldsymbol{PGL}(n+1,$

K) はふつう K 上の **$n+1$ 次一般射影変換群**と呼ばれる.)

例 5.10 $\boldsymbol{P}^n$ の射影座標枠 Σ_P の代りに $\Sigma_{P'}$ をとると, 点 $\boldsymbol{E}^0$ の斉次座標は $(\xi_0, \cdots, \xi_n)$ から $(\xi_0', \cdots, \xi_n')$ に, また点 $\varphi(\boldsymbol{E}^0)$ の斉次座標は $(\eta_0, \cdots, \eta_n)$ から $(\eta_0', \cdots, \eta_n')$ に代り, それらは, 或る $(n+1)\times(n+1)$ 行列 (τ_{ij}) $(\det(\tau_{ij})\neq 0)$ によって

$$\sigma_0\begin{bmatrix}\xi_0'\\ \vdots\\ \xi_n'\end{bmatrix}=(\tau_{ij})\begin{bmatrix}\xi_0\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix},\qquad \sigma_1\begin{bmatrix}\eta_0'\\ \vdots\\ \eta_n'\end{bmatrix}=(\tau_{ij})\begin{bmatrix}\eta_0\\ \vdots\\ \eta_n\end{bmatrix},\qquad \sigma_0\neq 0,\ \sigma_1\neq 0$$

と表わされる. これらを (5.25) に代入すれば

$$\rho'\begin{bmatrix}\eta_0'\\ \vdots\\ \eta_n'\end{bmatrix}=(\beta_{ij})\begin{bmatrix}\xi_0'\\ \vdots\\ \xi_n'\end{bmatrix},\qquad (\beta_{ij})=(\tau_{ij})(\alpha_{ij})(\tau_{ij})^{-1} \tag{5.27}$$

と表わされる.

例 5.11 $\boldsymbol{P}^n$ の r 次元部分空間 $\boldsymbol{E}^r$ は, 射影座標枠 Σ_P を定めると, 例 5.9 で見たように

$$\boldsymbol{E}^r=\left\{P(\xi_0, \cdots, \xi_n)\,\middle|\,\sum_{j=0}^{n}a_{ij}\xi_j=0,\ \ i=1, \cdots, n-r\right\}$$

と表わされる. ただし $(n-r)\times(n+1)$ 行列 (a_{ij}) の階数は $n-r$ である. そのとき射影変換 $\tilde{f}$ が (5.25) によって表わされるならば

$$\tilde{f}(\boldsymbol{E}^r)=\left\{P(\eta_0, \cdots, \eta_n)\,\middle|\,\sum_{j=0}^{n}b_{ij}\eta_j=0,\ \ i=1, \cdots, n-r\right\},$$

ただし $(n-r)\times(n+1)$ 行列

$$(b_{ij})=(a_{ij})(\alpha_{ij})^{-1} \tag{5.28}$$

の階数も $n-r$ である.

また $\boldsymbol{E}^r$ の任意の r 次元射影座標枠を定めて, $\boldsymbol{E}^0\in\boldsymbol{E}^r$ の r 次元斉次座標を $(\lambda_0, \cdots, \lambda_r)$ とすると, $\boldsymbol{E}^0=P(\xi_0, \cdots, \xi_n)$ との間に

$$\sigma_1\begin{bmatrix}\xi_0\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tau_{00}' & \cdots & \tau_{0r}'\\ & \cdots\cdots & \\ \tau_{n0}' & \cdots & \tau_{nr}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_0\\ \vdots\\ \lambda_r\end{bmatrix}$$

の関係にある (§4.4, 例 4.4 の場合と同様). 同じく $\tilde{f}(\boldsymbol{E}^r)$ の任意の r 次元射影座標枠による $\tilde{f}(\boldsymbol{E}^0)\in\tilde{f}(\boldsymbol{E}^r)$ の r 次元斉次座標を $(\mu_0, \cdots, \mu_r)$ とすると, $\tilde{f}(\boldsymbol{E}^0)=$

$P(\eta_0, \cdots, \eta_n)$ との間に

$$\sigma_2\begin{bmatrix}\mu_0\\ \vdots\\ \mu_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tau_{00}'' & \cdots & \tau_{0n}''\\ & \cdots\cdots & \\ \tau_{r0}'' & \cdots & \tau_{rn}''\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_0\\ \vdots\\ \eta_n\end{bmatrix}$$

の関係にある．よって(5.25)に代入すれば

$$(5.29)\qquad \rho'\begin{bmatrix}\mu_0\\ \vdots\\ \mu_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_{00} & \cdots & \beta_{0r}\\ & \cdots\cdots & \\ \beta_{r0} & \cdots & \beta_{rr}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_0\\ \vdots\\ \lambda_r\end{bmatrix},$$

ただし

$$(\beta_{ij})=(\tau_{ij}'')(\alpha_{ij})(\tau_{ij}').$$

すなわち，$\tilde{f}: \boldsymbol{E}^r \to \tilde{f}(\boldsymbol{E}^r)$ の写像は(5.29)によって与えられる．

e) 配景写像，一般の射影写像

(IX)　n 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^n$ 内に二つの m 次元部分空間 $\boldsymbol{E}_1{}^m$ および $\boldsymbol{E}_2{}^m$ をとる．次に $\boldsymbol{E}_1{}^m$ とも $\boldsymbol{E}_2{}^m$ とも共通点を持たない $n-m-1$ 次元部分空間 $\boldsymbol{E}_3{}^{n-m-1}$ を一つとる．そのとき $\boldsymbol{E}_i{}^m \vee \boldsymbol{E}_3{}^{n-m-1}=\boldsymbol{P}^n$ $(i=1,2)$ である．任意の $\boldsymbol{E}_1{}^0 \in \boldsymbol{E}_1{}^m$ に対して，$\boldsymbol{E}_1{}^0 \vee \boldsymbol{E}_3{}^{n-m-1}$ は $n-m$ 次元部分空間で

$$(5.30)\qquad \boldsymbol{E}_2{}^0=(\boldsymbol{E}_1{}^0 \vee \boldsymbol{E}_3{}^{n-m-1}) \cap \boldsymbol{E}_2{}^m$$

は0次元部分空間となる．ここで

$$\varphi:\ \boldsymbol{E}_1{}^0 \longrightarrow \boldsymbol{E}_2{}^0$$

とおくと，φ は $\boldsymbol{E}_1{}^m$ から $\boldsymbol{E}_2{}^m$ への射影写像となる．この φ を $\boldsymbol{E}_3{}^{n-m-1}$ を中心(または軸)とする $\boldsymbol{E}_1{}^m$ から $\boldsymbol{E}_2{}^m$ への**配景写像**という．

証明　$\boldsymbol{P}^n$ の射影座標枠を一つ定めておく．

$$\boldsymbol{E}_3{}^{n-m-1}=\left\{P(\xi_0, \cdots, \xi_n)\,\middle|\,\sum_{j=0}^{n}a_{ij}\xi_j=0,\ \ i=0, \cdots, m\right\}$$

と表わされる．ただし，$(m+1)\times(n+1)$ 行列 (a_{ij}) の階数は，$m+1$ である．$\boldsymbol{E}_3{}^{n-m-1}$ 上に $n-m$ 個の独立な点

$$P(\xi_{i0}, \cdots, \xi_{in}),\qquad i=1, \cdots, n-m$$

をとる．$\boldsymbol{E}_1{}^m$ 上の点 $\boldsymbol{E}_1{}^0=P(\eta_0, \cdots, \eta_n)$ に対して，(5.30)で定められる点 $\boldsymbol{E}_2{}^0=P(\eta_0', \cdots, \eta_n')$ は

$$\begin{bmatrix} \eta_0' \\ \vdots \\ \eta_n' \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \eta_0 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{n-m} \lambda_i \begin{bmatrix} \xi_{i0} \\ \vdots \\ \xi_{in} \end{bmatrix}$$

の形に表わされる．ここで $\lambda \neq 0$, したがって $\lambda=1$ とおいて差支えない．一方, $\sum_{j=0}^{n} a_{lj}\xi_{lj}=0$ $(l=1, \cdots, n-m)$ より

$$(5.31) \qquad \sum_{j=0}^{n} a_{ij}\eta_j' = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}\eta_j, \qquad i=0, \cdots, m$$

が成り立つ．この値を b_i とおく．

さて $\boldsymbol{E}_1^m$ および $\boldsymbol{E}_2^m$ 上に m 次元射影座標枠を定めて，それぞれの上の点の斉次座標を $(\lambda_0, \cdots, \lambda_m)$, $(\lambda_0', \cdots, \lambda_m')$ で表わせば，例 5.11 と同様に

$$\rho \begin{bmatrix} \eta_0 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = (\tau_{ij}) \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}, \qquad \rho' \begin{bmatrix} \eta_0' \\ \vdots \\ \eta_n' \end{bmatrix} = (\tau_{ij}') \begin{bmatrix} \lambda_0' \\ \vdots \\ \lambda_m' \end{bmatrix}$$

の形に表わされる．したがって(5.31)に代入すれば

$$(5.32) \qquad \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\lambda_j = \sum_{j=0}^{m} b_{ij}'\lambda_j' = b_i, \qquad i=0, \cdots, m$$

となり，かつ $\det(b_{ij}) \neq 0$, および $\det(b_{ij}') \neq 0$ となる．よって(5.32)をとけば

$$\sigma \begin{bmatrix} \lambda_0' \\ \vdots \\ \lambda_m' \end{bmatrix} = (\alpha_{ij}) \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}, \qquad \det(\alpha_{ij}) \neq 0$$

となり $\varphi: \boldsymbol{E}_1^m \to \boldsymbol{E}_2^m$ は射影写像となることがわかった．▌

例 5.12 3 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^3$ において，同一射影平面上にない二つの射影直線 $\boldsymbol{E}_1^1$ と $\boldsymbol{E}_2^1$ とがあるとき，任意の射影写像 $\varphi: \boldsymbol{E}_1^1 \to \boldsymbol{E}_2^1$ は，或る射影直線 $\boldsymbol{E}_3^1$ を中心(軸)とする配景写像である．

［解］ $\boldsymbol{E}_1^1$ 上に 3 点 A_1, A_2, A_3 をとり $\varphi(A_i)=B_i \in \boldsymbol{E}_2^1$ $(i=1, 2, 3)$ とする．そして三つの射影直線 $A_i \vee B_i$ $(i=1, 2, 3)$ をとる．$A_1 \vee B_1$ 上に 1 点 C_1 をとる．C_1 を通る射影直線 $\boldsymbol{E}_3^1=(C_1 \vee A_2 \vee B_2) \cap (C_1 \vee A_3 \vee B_3)$ は $A_2 \vee B_2$, および $A_3 \vee B_3$ と交わる．そのとき $\boldsymbol{E}_3^1$ を中心とする配景写像 ψ を作ると，$\psi(A_i)=B_i$ $(i=1, 2, 3)$ が成り立つ．故に φ と ψ とは共に $\boldsymbol{E}_1^1 \to \boldsymbol{E}_2^1$ の射影写像で，かつ 3 点 A_i $(i=1, 2, 3)$ で一致しているから，$\varphi=\psi$ となる．よって φ は配景写像である．▌

例 5.13 n 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^n$ から m 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^m$ への写像 $\tilde{f}$ が，$\boldsymbol{P}^n$ お

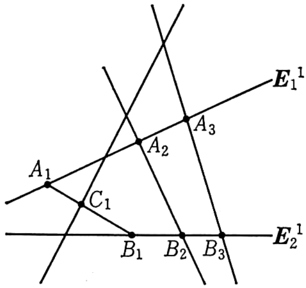


図 5・3

よび $\boldsymbol{P}^m$ の射影座標枠を定めておくとき，

$$\tilde{f}:\ P(\xi_0, \cdots, \xi_n) \longrightarrow P(\eta_0, \cdots, \eta_m),$$

$$(5.33)\qquad \rho\begin{bmatrix}\eta_0\\ \vdots\\ \eta_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{00} & \cdots & \alpha_{0n}\\ & \cdots\cdots & \\ \alpha_{m0} & \cdots & \alpha_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_0\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix},\qquad \rho\neq 0$$

で与えられるとき，$\tilde{f}$ を**一般の射影写像**という．

厳密にいうと(5.33)の写像は $(\eta_0, \cdots, \eta_m)=(0, \cdots, 0)$ となるような点 $P(\xi_0, \cdots, \xi_n)$ 全体の集合：

$$\boldsymbol{E}=\left\{P(\xi_0, \cdots, \xi_n)\,\middle|\,\sum_{j=0}^{n}\alpha_{ij}\xi_j=0,\ \ i=0, \cdots, m\right\}$$

を除いた $\boldsymbol{P}^n-\boldsymbol{E}$ で定義されている．$(m+1)\times(n+1)$ 行列 (α_{ij}) の階数を r とすると，$\boldsymbol{E}$ は $n-r$ 次元部分空間 $\boldsymbol{E}^{n-r}$ である．

このとき $\tilde{f}(\boldsymbol{P}^n-\boldsymbol{E}^{n-r})$ は $\boldsymbol{P}^m$ の $r-1$ 次元部分空間となる．

例えば $\boldsymbol{P}^n$ の $n-r$ 次元部分空間 $\boldsymbol{E}_1^{n-r}$ をとり，これと共通点を持たない

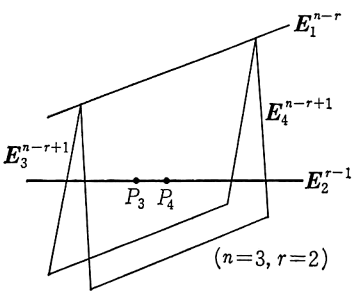


図 5・4

$\boldsymbol{E}_2{}^{r-1}$ の上に $\boldsymbol{E}_1{}^{n-r}$ を軸として $\boldsymbol{P}^n-\boldsymbol{E}_1{}^{n-r}$ を配景写像すれば，これは $\boldsymbol{P}^n\to\boldsymbol{E}_2{}^{r-1}$ の一般の射影写像である．

f) 射影幾何とアフィン幾何との関係

射影平面がアフィン平面に無限遠射影直線をつけ加えたものであったということは，n 次元においても同じである．

(X)　(i)　n 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^n$ の射影座標枠 $\Sigma_P=(\boldsymbol{E}_0{}^0, \cdots, \boldsymbol{E}_n{}^0; \boldsymbol{E}_{n+1}{}^0)$ を一つ定める．そのとき

(5.34)
$$\boldsymbol{A}^n=\{P(\xi_0, \cdots, \xi_n)\,|\,\xi_0\neq 0\},$$
$$\boldsymbol{E}_\infty{}^{n-1}=\{P(\xi_0, \cdots, \xi_n)\,|\,\xi_0=0\}$$

とおくと

(5.35)
$$\boldsymbol{P}^n=\boldsymbol{A}^n\cup\boldsymbol{E}_\infty{}^{n-1}, \qquad \boldsymbol{A}^n\cap\boldsymbol{E}_\infty{}^{n-1}=\phi$$

で，$\boldsymbol{A}^n$ は n 次元アフィン空間，$\boldsymbol{E}_\infty{}^{n-1}$ は無限遠射影超平面である．

(ii)　$\boldsymbol{P}^n$ の射影変換 φ で，$\varphi(\boldsymbol{E}_\infty{}^{n-1})=\boldsymbol{E}_\infty{}^{n-1}$，したがって $\varphi(\boldsymbol{A}^n)=\boldsymbol{A}^n$ となるものは，$\boldsymbol{A}^n$ 上で n 次元アフィン変換，$\boldsymbol{E}_\infty{}^{n-1}$ 上で $n-1$ 次元射影変換をひきおこす．逆に，$\boldsymbol{A}^n$ 上の任意のアフィン変換 $\varphi_0:\boldsymbol{A}^n\to\boldsymbol{A}^n$ は $\boldsymbol{P}^n$ 上の射影変換 φ に一意に延長される．

証明　(i)　(5.34)のように $\boldsymbol{A}^n, \boldsymbol{E}_\infty{}^{n-1}$ を定める．$P(\xi_0, \cdots, \xi_n)$ に対して $(\xi_1/\xi_0, \cdots, \xi_n/\xi_0)$ をアフィン座標とする点を対応させれば，$\boldsymbol{A}^n$ はちょうど n 次元アフィン空間となる．$n=2$ の場合と同様に，この際

$$\boldsymbol{F}_i{}^0=(\boldsymbol{E}_i{}^0\vee\boldsymbol{E}_{n+1}{}^0)\cap(\boldsymbol{E}_0{}^0\vee\cdots\vee\boldsymbol{E}_{i-1}{}^0\vee\boldsymbol{E}_{i+1}{}^0\vee\cdots\vee\boldsymbol{E}_n{}^0)\in\boldsymbol{A}^n,$$
$$i=1, \cdots, n$$

とおくと

$$\Sigma_A=(\boldsymbol{E}_0{}^0; \boldsymbol{F}_1{}^0, \cdots, \boldsymbol{F}_n{}^0)$$

が $\boldsymbol{A}^n$ のアフィン座標枠となって，$(\xi_1/\xi_0, \cdots, \xi_n/\xi_0)$ は点 $P(\xi_0, \cdots, \xi_n)\in\boldsymbol{A}^n$ のアフィン座標となっている．

(ii)　$\boldsymbol{P}^n$ の射影変換 φ を(5.25)によって表わす．$\varphi(\boldsymbol{E}_\infty{}^{n-1})=\boldsymbol{E}_\infty{}^{n-1}$ であるための条件は，$\xi_0=0$ ならば $\eta_0=0$ であることであるから

(5.36)
$$\alpha_{01}=\cdots=\alpha_{0n}=0$$

が必要十分条件である．よって $\boldsymbol{A}^n$ の点に対して $P(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n)=P(1, \xi_1/\xi_0, \cdots, \xi_n/\xi_0)$ として(5.25)を表わすと

$$(5.37)\qquad \begin{bmatrix} 1 \\ \eta_1/\eta_0 \\ \vdots \\ \eta_n/\eta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ & \cdots\cdots & & \\ \alpha_{n0} & \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \xi_1/\xi_0 \\ \vdots \\ \xi_n/\xi_0 \end{bmatrix}$$

となる．これは n 次元アフィン空間 $\boldsymbol{A}^n$ のアフィン変換を表わす式(§2.5, e))と一致する．よって $\varphi: \boldsymbol{A}^n \to \boldsymbol{A}^n$ はアフィン変換となる．

同様に $\boldsymbol{E}_\infty{}^{n-1}$ の $n-1$ 次元射影座標枠 $(\boldsymbol{E}_1{}^0, \cdots, \boldsymbol{E}_n{}^0; \boldsymbol{F}_0)$ (ただし $\boldsymbol{F}_0 = (\boldsymbol{E}_0{}^0 \vee \boldsymbol{E}_{n+1}{}^0) \cap (\boldsymbol{E}_1{}^0 \vee \cdots \vee \boldsymbol{E}_n{}^0)$ とおく)に関して，$P(0, \xi_1, \cdots, \xi_n) \in \boldsymbol{E}_\infty{}^{n-1}$ の斉次座標はちょうど $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ となる．よって $\varphi: \boldsymbol{E}_\infty{}^{n-1} \to \boldsymbol{E}_\infty{}^{n-1}$ は

$$(5.38)\qquad \rho \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ & \cdots\cdots & \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

で表わされることになる．

逆に $\boldsymbol{A}^n$ 上のアフィン変換が(5.37)の形で先に与えられれば，$\boldsymbol{E}_\infty{}^{n-1}$ 上の $n-1$ 次元射影変換を(5.38)で定義すれば，合せて $\boldsymbol{P}^n$ 上で(5.25)の形の n 次元射影変換がただ一つ定まる．▌

§5.3 双対射影空間

a) 双対射影空間の定義

射影幾何学における一つの有効な考え方として双対性(duality)の原理がある．はじめに可換体 K 上のベクトル空間の双対ベクトル空間について復習しておこう．

$\boldsymbol{V}^{n+1}$ が K 上の $n+1$ 次元ベクトル空間であるとき，$\boldsymbol{V}^{n+1}$ の双対ベクトル空間 $(\boldsymbol{V}^{n+1})^*$ とは，$\boldsymbol{V}^{n+1}$ 上の K 線型関数 φ:

$$\varphi(\lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y}) = \lambda\varphi(\boldsymbol{x}) + \mu\varphi(\boldsymbol{y}) \qquad (\lambda, \mu \in K,\ \ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}^{n+1})$$

の全体とし，

$$(\lambda\varphi + \mu\psi)(\boldsymbol{x}) = \lambda\varphi(\boldsymbol{x}) + \mu\psi(\boldsymbol{x})$$

と定義することによって $(\boldsymbol{V}^{n+1})^*$ 自身一つの K 上の $n+1$ 次元ベクトル空間となる．しばしば記号

$$(5.39)\qquad \varphi(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x}, \varphi \rangle$$

を用いる．$\langle \boldsymbol{x}, \varphi \rangle$ は $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}^{n+1}$ および $\varphi \in (\boldsymbol{V}^{n+1})^*$ に関して双線型である．$\boldsymbol{V}^{n+1}$ の $r+1$ 次元部分ベクトル空間 $\boldsymbol{W}$ に対して

$$\boldsymbol{W}^{\perp} = \{\varphi \in (\boldsymbol{V}^{n+1})^* \mid \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{W} \colon \varphi(\boldsymbol{x}) = 0\}$$

は $(\boldsymbol{V}^{n+1})^*$ の $n-r$ 次元部分ベクトル空間である．$\boldsymbol{W}^{\perp}$ を $\boldsymbol{W}$ の直交補空間と呼ぶことにする．$\boldsymbol{V}^{n+1}$ の二つの部分ベクトル空間 $\boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{W}_2$ に対して

$$\boldsymbol{W}_1 \supseteq \boldsymbol{W}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{W}_1{}^{\perp} \subseteq \boldsymbol{W}_2{}^{\perp}$$

$$(\boldsymbol{W}_1 + \boldsymbol{W}_2)^{\perp} = \boldsymbol{W}_1{}^{\perp} \cap \boldsymbol{W}_2{}^{\perp}$$

$$(\boldsymbol{W}_1 \cap \boldsymbol{W}_2)^{\perp} = \boldsymbol{W}_1{}^{\perp} + \boldsymbol{W}_2{}^{\perp}$$

である．また $(\boldsymbol{V}^{n+1})^{**} = \boldsymbol{V}^{n+1}$ と同一視する場合に

$$(\boldsymbol{W}_1{}^{\perp})^{\perp} = \boldsymbol{W}_1$$

である．

$\boldsymbol{V}^{n+1}$ の基底 $(\boldsymbol{e}_0, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ に対して $\chi_i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 0, \cdots, n)$ となる $(\chi_0, \cdots, \chi_n)$ は $(\boldsymbol{V}^{n+1})^*$ の基底を作る．これを $(\boldsymbol{e}_0, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ の双対基底という．そのとき，$\boldsymbol{x} = \sum_{i=0}^{n} \xi_i \boldsymbol{e}_i \in \boldsymbol{V}^{n+1}$, $\varphi = \sum_{i=0}^{n} a_i \chi_i \in (\boldsymbol{V}^{n+1})^*$ に対して

$$\langle \boldsymbol{x}, \varphi \rangle = \sum_{i=0}^{n} a_i \xi_i \tag{5.40}$$

となる．故に $\boldsymbol{V}^{n+1} \supseteq \boldsymbol{W}^{r+1}$, $\boldsymbol{W}^{r+1} = \sum_{i=0}^{r} K \boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{x}_i = \sum_{j=0}^{n} \xi_{ij} \boldsymbol{e}_j$ であれば

$$(\boldsymbol{W}^{r+1})^{\perp} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i \chi_i \,\middle|\, \sum_{j=0}^{n} a_j \xi_{ij} = 0, \ \ i = 0, \cdots, r \right\} \tag{5.41}$$

となる．逆に $(\boldsymbol{W}^{r+1})^{\perp} = \sum_{i=1}^{n-r} K \varphi_i$, $\varphi_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} \chi_j$ であれば

$$\boldsymbol{W}^{r+1} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \xi_i \boldsymbol{e}_i \,\middle|\, \sum_{j=0}^{n} a_{ij} \xi_j = 0, \ \ i = 1, \cdots, n-r \right\} \tag{5.42}$$

と表わされる．以上を準備として

定義 5.7 n 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^n = {}^*\boldsymbol{V}^{n+1}/\sim$ に対して，

$$\Pi^n = {}^*(\boldsymbol{V}^{n+1})^*/\sim$$

を，$\boldsymbol{P}^n$ の**双対射影空間**(dual projective space)という．

(XI) (i) $\boldsymbol{P}^n$ の双対射影空間を Π^n とするとき，Π^n の双対射影空間は $\boldsymbol{P}^n$ である．

(ii)　任意の点 $\tilde{\varphi}\in\Pi^n$ $(\varphi\in(\boldsymbol{V}^{n+1})^*)$ は，φ の直交補空間 $\boldsymbol{W}^n=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{V}^{n+1}\mid\langle\boldsymbol{x},\varphi\rangle=0\}$ より導かれる $\boldsymbol{P}^n$ の射影超平面 $\boldsymbol{E}^{n-1}={}^*\boldsymbol{W}^n/\sim$ と1対1に対応する．(このとき $\boldsymbol{E}^{n-1}$ と $\tilde{\varphi}$ とは直交すると呼ぶことにする．)

したがって，$\tilde{\varphi}\in\Pi^n$ と，それに直交する $\boldsymbol{E}^{n-1}\subseteqq\boldsymbol{P}^n$ とを同一視するならば，$\boldsymbol{P}^n$ の双対射影空間は，$\boldsymbol{P}^n$ の射影超平面全体の作る空間とみなされる．

(ii)*　任意の点 $\tilde{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{P}^n$ $(\boldsymbol{x}\in{}^*\boldsymbol{V}^{n+1})$ は，これと直交する Π^n の射影超平面と1対1に対応する．

(iii)　$\boldsymbol{P}^n$ の r 次元部分空間 $\boldsymbol{E}^r={}^*\boldsymbol{W}^{r+1}/\sim$ と，それに直交する Π^n の $n-r-1$ 次元部分空間 $\Xi^{n-r-1}={}^*(\boldsymbol{W}^{r+1})^{\perp}/\sim$ とは1対1に対応する．このとき記号で

$$\Xi^{n-r-1}=\delta(\boldsymbol{E}^r) \tag{5.43}$$

と書く．そのとき

(イ)　$\Xi^{n-r-1}=\delta(\boldsymbol{E}^r)$ ならば $\boldsymbol{E}^r=\delta(\Xi^{n-r-1})$,

(ロ)　$\boldsymbol{E}_1{}^r\supseteqq\boldsymbol{E}_2{}^s\Leftrightarrow\delta(\boldsymbol{E}_1{}^r)\subseteqq\delta(\boldsymbol{E}_2{}^s)$,

(ハ)　$\delta(\boldsymbol{E}_1{}^r\cap\boldsymbol{E}_2{}^s)=\delta(\boldsymbol{E}_1{}^r)\vee\delta(\boldsymbol{E}_2{}^s)$,

(ニ)　$\delta(\boldsymbol{E}_1{}^r\vee\boldsymbol{E}_2{}^s)=\delta(\boldsymbol{E}_1{}^r)\cap\delta(\boldsymbol{E}_2{}^s)$.

(iv)　(ii), (ii)* の対応において，$\delta(\boldsymbol{E}^0)=\Xi^{n-1}$ とすると，Ξ^{n-1} は $\boldsymbol{E}^0$ を通る $\boldsymbol{P}^n$ の射影超平面の全体と一致する．

一般に $\Xi^{n-r-1}=\delta(\boldsymbol{E}^r)$ は，$\boldsymbol{E}^r$ を含む射影超平面の全体と一致する．

証明　$\boldsymbol{P}^n={}^*\boldsymbol{V}^{n+1}/\sim$, $\Pi^n={}^*(\boldsymbol{V}^{n+1})^*/\sim$ より，双対ベクトル空間の性質を用いれば，ほとんど自明である．▌

例 5.14　$\boldsymbol{P}^n={}^*\boldsymbol{V}^{n+1}/\sim$, $\Pi^n={}^*(\boldsymbol{V}^{n+1})^*/\sim$ において，$\boldsymbol{V}^{n+1}$ の基底 $(\boldsymbol{e}_0,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$ および $(\boldsymbol{V}^{n+1})^*$ の双対基底 $(\chi_0,\cdots,\chi_n)$ を用いて，$\boldsymbol{P}^n$ および Π^n の点を斉次座標で表わして $P(\xi_0,\cdots,\xi_n)$ および $P^*(a_0,\cdots,a_n)$ とする．$\boldsymbol{P}^n$ の射影超平面 $\boldsymbol{E}^{n-1}$ は，或る $(a_0,\cdots,a_n)\neq(0,\cdots,0)$ によって

$$\boldsymbol{E}^{n-1}=\left\{P(\xi_0,\cdots,\xi_n)\,\middle|\,\sum_{i=0}^{n}a_i\xi_i=0\right\}$$

と表わされる．そのとき，$\boldsymbol{E}^{n-1}$ に対応する Π^n の点は

$$P^*(a_0,\cdots,a_n)$$

である．このことは(5.42)で $r+1=n$ の場合に相当する．同じく $\boldsymbol{E}^0=\{P(\xi_0,\cdots,$

$\xi_n)\}$ に対して

$$\delta(\boldsymbol{E}^0) = \left\{P(a_0, \cdots, a_n) \,\middle|\, \sum_{i=0}^{n} a_i \xi_i = 0\right\}$$

と表わされる.

b) 双対性の原理

(XII) **(双対性の原理)** n 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^n$ においてそのいくつかの部分空間 $\boldsymbol{E}_1^{i_1}, \cdots, \boldsymbol{E}_t^{i_t}$ の間に, $\vee$ および $\cap$ で結ばれる関係があれば, 双対射影空間 Π^n において $\delta(\boldsymbol{E}_1^{i_1}), \cdots, \delta(\boldsymbol{E}_t^{i_t})$ の間に $\vee$ の代りに $\cap$, $\cap$ の代りに $\vee$ とした関係が成り立つ.

これは(XI)の(iii)より明らかなことである.

例 5.15 ($\boldsymbol{P}^2$ 上の Desargues の定理) 射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ 上に 6 点 $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ があって, $A_1 \vee B_1$, $A_2 \vee B_2$, $A_3 \vee B_3$ が 1 点で交われば, $(A_1 \vee A_2) \cap (B_1 \vee B_2)$, $(A_2 \vee A_3) \cap (B_2 \vee B_3)$, $(A_3 \vee A_1) \cap (B_3 \vee B_1)$ は一直線上にある.

これを $\cap$ と $\vee$ のみを用いて表わせば

$$\begin{aligned}(5.44)\quad (A_1 \vee B_1) \cap (A_2 \vee B_2) &= (A_2 \vee B_2) \cap (A_3 \vee B_3) = (A_3 \vee B_3) \cap (A_1 \vee B_1) \\ \Longrightarrow ((A_1 \vee A_2) \cap (B_1 \vee B_2)) &\vee ((A_2 \vee A_3) \cap (B_2 \vee B_3)) \\ = ((A_2 \vee A_3) \cap (B_2 \vee B_3)) &\vee ((A_3 \vee A_1) \cap (B_3 \vee B_1)) \\ = ((A_3 \vee A_1) \cap (B_3 \vee B_1)) &\vee ((A_1 \vee A_2) \cap (B_1 \vee B_2))\end{aligned}$$

と表わされる. この命題の双対を(XII)に従って作れば, $\delta(A_i) = l_i$, $\delta(B_i) = m_i$ $(i=1, 2, 3)$ として

$$\begin{aligned}(5.45)\quad (l_1 \cap m_1) \vee (l_2 \cap m_2) &= (l_2 \cap m_2) \vee (l_3 \cap m_3) = (l_3 \cap m_3) \vee (l_1 \cap m_1) \\ \Longrightarrow ((l_1 \cap l_2) \vee (m_1 \cap m_2)) &\cap ((l_2 \cap l_3) \vee (m_2 \cap m_3)) \\ = ((l_2 \cap l_3) \vee (m_2 \cap m_3)) &\cap ((l_3 \cap l_1) \vee (m_3 \cap m_1)) \\ = ((l_3 \cap l_1) \vee (m_3 \cap m_1)) &\cap ((l_1 \cap l_2) \vee (m_1 \cap m_2))\end{aligned}$$

である. ここで $l_1 = A_2 \vee A_3$, $l_2 = A_3 \vee A_1$, $l_3 = A_1 \vee A_2$, $m_1 = B_2 \vee B_3$, $\cdots$ とすれば, $l_1 \cap l_2 = A_3$, $l_2 \cap l_3 = A_1$, $l_3 \cap l_1 = A_2$ となって, (5.45)は(5.44)の命題の逆となる.

よって Desargues の定理が証明されれば, その逆命題も正しいことは双対性の原理よりわかる.

例 5.16 射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ において, 1 点 P を通る四つの射影直線 $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3, \bar{l}_4$ をと

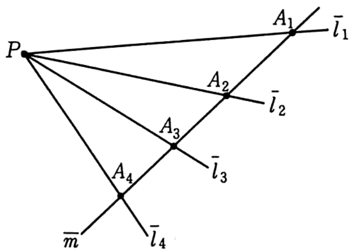


図 5・5

る．$\boldsymbol{P}^2$ の双対射影平面 Π^2 上で，$\delta(\bar{l}_i)\,(i=1,2,3,4)$ は Π^2 上の射影直線 $\delta(P)$ 上の4点である．そのとき複比を

$$(\bar{l}_1, \bar{l}_2\,;\bar{l}_3, \bar{l}_4)=(\delta(\bar{l}_1), \delta(\bar{l}_2)\,;\delta(\bar{l}_3), \delta(\bar{l}_4))$$

によって定義する．

いま $\boldsymbol{P}^2$ 上任意の射影直線 $\bar{m}$ $(P\notin\bar{m})$ をとり，$\bar{l}_i\cap\bar{m}=A_i$ $(i=1,2,3,4)$ とするとき

$$(\bar{l}_1, \bar{l}_2\,;\bar{l}_3, \bar{l}_4)=(A_1, A_2\,;A_3, A_4) \tag{5.46}$$

となる．

証明　$\boldsymbol{P}^2$ の射影座標枠 Σ_P を $P=P(1,0,0)$，$\bar{m}$: $\xi_0=0$ であるようにとる．$\bar{l}_i$ の方程式を

$$a_{i1}\xi_1+a_{i2}\xi_2=0, \qquad i=1,2,3,4$$

とすれば $\delta(\bar{l}_i)$ の斉次座標は $(0, a_{i1}, a_{i2})\,(i=1,2,3,4)$ となり

$$(\delta(\bar{l}_1), \delta(\bar{l}_2)\,;\delta(\bar{l}_3), \delta(\bar{l}_4))=\frac{a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}}{a_{11}a_{42}-a_{12}a_{41}}\cdot\frac{a_{21}a_{42}-a_{22}a_{41}}{a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}}$$

となる．一方 $A_i=P(0, a_{i2}, -a_{i1})\,(i=1,2,3,4)$ となるから $(A_1, A_2\,;A_3, A_4)$ は，上の式で a_{i1} の代りに a_{i2}，a_{i2} の代りに $-a_{i1}$ とおきかえたものとなる．したがって(5.46)が成立する．▌

注意　この結果は，$\boldsymbol{P}^n$ において，或る $\boldsymbol{E}^{n-2}$ を含む四つの射影超平面 $\boldsymbol{E}_1{}^{n-1}$, $\boldsymbol{E}_2{}^{n-1}$, $\boldsymbol{E}_3{}^{n-1}$, $\boldsymbol{E}_4{}^{n-1}$ について，まったく同様に成り立つ．

c）相反写像

定義 5.8　n 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^n$ からその双対射影空間 Π^n への射影写像 $\boldsymbol{f}$ を**相反写像**(correlation)という．Π^n の点は $\boldsymbol{P}^n$ の射影超平面と同一視されるから，$\boldsymbol{f}$ によって $\boldsymbol{P}^n$ の点 $\boldsymbol{E}^0$ は $\boldsymbol{P}^n$ の射影超平面 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}^0)$ にうつされる．逆に相反写像 $\boldsymbol{f}$ によって $\boldsymbol{P}^n$ の射影超平面 $\boldsymbol{E}^{n-1}$ は Π^n の射影超平面 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}^{n-1})$ にうつされるが，

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}^{n-1})$ は $\boldsymbol{P}^n$ 上の1点と同一視される．すなわち，点と超平面とが $\boldsymbol{f}$ によって入れかわる．かつ

$$(5.47)\qquad \boldsymbol{E}^0 \in \boldsymbol{E}^{n-1} \Longrightarrow \text{点}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}^0) \in \text{超平面}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}^{n-1}) \quad (\Pi^n \text{ において})$$
$$\Longleftrightarrow \text{超平面}\ \delta(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}^0)) \ni \text{点}\ \delta(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}^{n-1})) \quad (\boldsymbol{P}^n \text{ において})$$

という包含関係が成り立つ．

相反写像によって $\boldsymbol{P}^n$ は Π^n にうつされ，したがって Π^n は $\boldsymbol{P}^n$ にうつされる．よって二つの相反写像を結合すれば，$\boldsymbol{P}^n$ の射影変換となる．

例 5.17 n 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^n$ の射影座標枠 Σ_P を定め，双対射影空間 Π^n に例 5.14 のように双対射影座標枠を定めておく．すなわち，$\boldsymbol{E}^{n-1}=\left\{P(\xi_0,\cdots,\xi_n)\,\middle|\,\sum_{i=0}^{n}a_i\xi_i=0\right\}$ に対して $\delta(\boldsymbol{E}^{n-1})=P^*(a_0,\cdots,a_n)$ とする．そのとき相反写像 $\boldsymbol{f}$ によって

$$\boldsymbol{f}(P(\xi_0,\cdots,\xi_n)) = P^*(a_0,\cdots,a_n)$$

とすれば，$\boldsymbol{f}$ が射影写像であるので

$$(5.48)\qquad \rho\begin{bmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_{00} & \cdots & \alpha_{0n}\\ & \cdots\cdots & \\ \alpha_{n0} & \cdots & \alpha_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_0\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}, \qquad \rho \neq 0$$

の関係にある．ただし，$\det(\alpha_{ij})\neq 0$ である．$(\alpha_{ij})^{-1}=(\beta_{ij})$ とおくと，(5.48) を解いて

$$(5.49)\qquad \sigma\begin{bmatrix}\xi_0\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix} = (\beta_{ij})\begin{bmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}$$

となる．$\boldsymbol{P}^n$ において点 $P(\xi_0,\cdots,\xi_n)$ が与えられた射影超平面 $\sum_{i=0}^{n}b_i\xi_i=0$ の上を動けば，$P^*(a_0,\cdots,a_n)$ は (5.49) より

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}b_i\beta_{ij}a_j = 0,$$

すなわち，Π^n 上の超平面 $\sum_{j=0}^{n}\eta_ja_j=0$ の上を動く．ただし

$$(5.50)\qquad \eta_j = \sum_{i=0}^{n}\beta_{ij}b_i, \qquad j=0,\cdots,n$$

とする．すなわち $\boldsymbol{P}^n$ において超平面 $\delta(P^*(a_0,\cdots,a_n))$ は (5.50) で与えられる $P(\eta_0,\cdots,\eta_n)$ を通る．したがって，斉次座標を用いれば (5.47) は

$$P(\xi_0, \cdots, \xi_n) \in \boldsymbol{E}^{n-1} = \left\{P(\xi_0, \cdots, \xi_n) \,\middle|\, \sum_{i=0}^{n} b_i \xi_i = 0\right\}$$

$$\Leftrightarrow \delta(\boldsymbol{f}(P(\xi_0, \cdots, \xi_n))) = \left\{P(\eta_0, \cdots, \eta_n) \,\middle|\, \sum_{i=0}^{n} a_i \eta_i = 0\right\}$$

$$\ni \delta(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}^{n-1})) = P(\eta_0, \cdots, \eta_n),$$

ただし $(a_0, \cdots, a_n)$ は(5.48)によって $(\xi_0, \cdots, \xi_n)$ より定められ，$(\eta_0, \cdots, \eta_n)$ は(5.50)によって $(b_0, \cdots, b_n)$ より定められる.

逆に Π^n において $P^*(a_0, \cdots, a_n) = \boldsymbol{f}(P(\xi_0, \cdots, \xi_n))$ が超平面 $\sum_{i=0}^{n} a_i \eta_i = 0$ の上を動けば，すなわち $\boldsymbol{P}^n$ において超平面 $\delta(P^*(a_0, \cdots, a_n))$ が1点 $P(\eta_0, \cdots, \eta_n)$ を通れば：

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \eta_i = 0,$$

(5.48)を代入して

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} \xi_j \eta_i = 0$$

となる．すなわち点 $P(\xi_0, \cdots, \xi_n)$ は超平面 $\sum_{i=0}^{n} b_i \xi_i = 0$，ただし

(5.51) $$b_i = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ji} \eta_j, \qquad i = 0, \cdots, n$$

の上を動く.

定義 5.9 (i) n 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^n$ の相反写像 $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{P}^n \to \Pi^n$ が**対合的相反写像** (involutive correlation) とは $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{P}^n$ の恒等写像であることをいう.

(ii) 相反写像 $\boldsymbol{f}$ が**極系** (polar system) であるとは(5.48)において行列 (α_{ij}) が対称行列：

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}, \qquad i, j = 0, \cdots, n$$

であることをいう.

(iii) 相反写像 $\boldsymbol{f}$ が**零系** (null system) であるとは，(5.48)において行列 (α_{ij}) が歪対称行列：

$$\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}, \qquad i, j = 0, \cdots, n$$

であることをいう.

さて，(5.48)で与えられた相反写像 $\boldsymbol{f}$ に対して，逆写像 $\boldsymbol{f}^{-1}$ は，$\boldsymbol{f}^{-1}(P(\eta_0, \cdots,$

$\eta_n)) = P^*(b_0, \cdots, b_n)$ (ただし $(b_0, \cdots, b_n)$ は $(\eta_0, \cdots, \eta_n)$ より (5.51) で導かれる) によって与えられる．よって $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{f}$＝恒等写像，すなわち $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}^{-1}$ であるための必要十分条件は，(5.48) と (5.51) とを比べて

$$\alpha_{ij} = \lambda \alpha_{ji}, \quad i, j = 0, \cdots, n, \ \lambda \neq 0$$

である．これから

$$\lambda^2 = 1$$

となり，$\lambda \in \boldsymbol{R}$ は $\lambda = +1$ または $\lambda = -1$ である．$\lambda = +1$ であれば $\boldsymbol{f}$ は極系であり，$\lambda = -1$ であれば $\boldsymbol{f}$ は零系となる．故に次が成り立つ．

(XIII) n 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^n$ の対合的相反写像は，極系であるか，または零系である．

例 5.18 射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ の極系．$\boldsymbol{P}^2$ 上に射影座標枠 Σ_P を定めておく．$\boldsymbol{P}^2$ 上の 2 次曲線 $\boldsymbol{Q}$:

$$\sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} \alpha_{ij} \xi_i \xi_j = 0, \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji} \tag{5.52}$$

を一つ定める．ただし $\det(\alpha_{ij}) \neq 0$ とする．$\boldsymbol{P}^2$ 上の点 $P(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ に対して，点 P の $\boldsymbol{Q}$ に関する**極線** (polar line) $\bar{l}$ を

$$\bar{l}: \ a_0 \xi_0 + a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 = 0, \tag{5.53}$$

ただし

$$a_i = \sum_{j=0}^{2} \alpha_{ij} \lambda_j, \quad i = 0, 1, 2 \tag{5.54}$$

と定義する．逆に (5.54) を解けば，$\bar{l}$ を極線とする点 $P(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ はただ一つ定ま

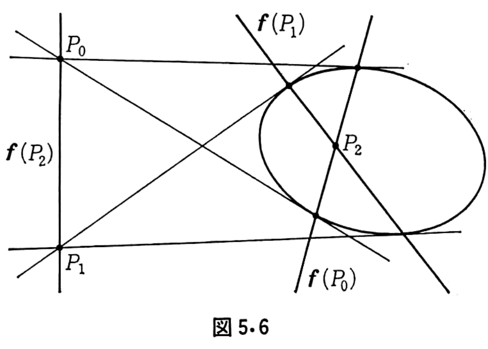


図 5・6

る．$P(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ を $\bar{l}$ の**極**(pole)という．

さて $\boldsymbol{P}^2$ において $\boldsymbol{Q}$ を定めれば，点 $P(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ に $\boldsymbol{Q}$ に関する極線 $\bar{l}$ を対応させると，(5.54)で見るように

$$\boldsymbol{f}(P(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)) = \bar{l} \ \ (P\text{ の極線})$$

は，$\boldsymbol{P}^2$ の一つの対合的相反写像である．直線 $\bar{l}$ に対して，$\boldsymbol{f}(\bar{l})=P$ ($\bar{l}$ の極) とおくとき，次が成り立つ．

(i)　$\bar{l} = \boldsymbol{f}(P) \iff \boldsymbol{f}(\bar{l}) = P.$

(ii)　$P \in \boldsymbol{f}(Q) \iff \boldsymbol{f}(P) \ni Q.$

(iii)　$\boldsymbol{f}(P \vee Q) = \boldsymbol{f}(P) \cap \boldsymbol{f}(Q),$

　　$\boldsymbol{f}(\bar{l} \cap \bar{m}) = \boldsymbol{f}(\bar{l}) \vee \boldsymbol{f}(\bar{m}).$

(iv)　$P \in \boldsymbol{f}(P) \iff P$ は $\boldsymbol{Q}$ 上にあって $\boldsymbol{f}(P)$ は $\boldsymbol{Q}$ の P における接線である．

　　$\boldsymbol{f}(\bar{l}) \in \bar{l} \iff \boldsymbol{f}(\bar{l})$ は $\boldsymbol{Q}$ 上にあって $\bar{l}$ は $\boldsymbol{Q}$ の $\boldsymbol{f}(\bar{l})$ における接線である．

以上は n 次元の場合にそのまま拡張される．

例 5.19　$\boldsymbol{f}$ を n 次元射影空間の一つの零系とする．$\alpha_{ij}=-\alpha_{ji}$ かつ $\det(\alpha_{ij}) \neq 0$ より n は奇数でなければならない．点 $P(\xi_0, \cdots, \xi_n) \in \boldsymbol{P}^n$ に対して $\boldsymbol{f}(P(\xi_0, \cdots, \xi_n)) = P^*(a_0, \cdots, a_n)$ とすれば，

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \xi_i = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij}\xi_i\xi_j = 0$$

である．すなわち，つねに

$$P(\xi_0, \cdots, \xi_n) \in \delta(\boldsymbol{f}(P(\xi_0, \cdots, \xi_n))) \qquad (5.55)$$

である．逆に，(5.55)がつねに成り立つ相反写像は零系である．何となれば，$(\xi_0, \cdots, \xi_n) = (1, 0, \cdots, 0)$ とすれば $\alpha_{00}\xi_0{}^2=0$ より $\alpha_{00}=0$，また $(\xi_0, \cdots, \xi_n) = (1, 1, 0, \cdots, 0)$ とすれば $\alpha_{01}+\alpha_{10}=0$．以下同様にして $\alpha_{ij}=-\alpha_{ji}$ でなければならない．

d）テンソル積射影空間，p 重外積ベキ射影空間

定義 5.10　二つの射影空間 $\boldsymbol{P}^m = {}^*\boldsymbol{V}^{m+1}/\!\sim$ および $\boldsymbol{P}^n = {}^*\boldsymbol{W}^{n+1}/\!\sim$ に対して，それらの**テンソル積射影空間**

$$\boldsymbol{P}^m \otimes \boldsymbol{P}^n = {}^*(\boldsymbol{V}^{m+1} \otimes \boldsymbol{W}^{n+1})/\!\sim$$

を作ることができる．$\boldsymbol{P}^m \otimes \boldsymbol{P}^n$ は $(m+1)(n+1)-1$ 次元射影空間である．このとき，$\boldsymbol{P}^m$ と $\boldsymbol{P}^n$ との**積空間**

$$(\boldsymbol{P}^m, \boldsymbol{P}^n) = \{(P_1, P_2) \mid P_1 \in \boldsymbol{P}^m,\ \ P_2 \in \boldsymbol{P}^n\}$$

から $\boldsymbol{P}^m \otimes \boldsymbol{P}^n$ の中への写像 $\boldsymbol{\Phi}$ を次のように定めることができる：

$$P_1 = \tilde{\boldsymbol{x}}, \quad P_2 = \tilde{\boldsymbol{y}} \qquad (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}^{m+1},\ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{W}^{n+1})$$

に対して

(5.56) $$\boldsymbol{\Phi}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) = \widetilde{\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}} \qquad (\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}^{m+1} \otimes \boldsymbol{W}^{n+1})$$

となる．もしも $\boldsymbol{V}^{m+1}$, $\boldsymbol{W}^{n+1}$ の基底 $(\boldsymbol{e}_0, \cdots, \boldsymbol{e}_m)$ および $(\boldsymbol{f}_0, \cdots, \boldsymbol{f}_n)$ を定めれば，$\boldsymbol{V}^{m+1} \otimes \boldsymbol{W}^{n+1}$ の基底として $\{\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_j \mid i=0, \cdots, m,\ j=0, \cdots, n\}$ をとることができる．これらの基底に基づいて，$\boldsymbol{P}^m, \boldsymbol{P}^n$ および $\boldsymbol{P}^m \otimes \boldsymbol{P}^n$ の点の斉次座標が定められる．そのとき $\boldsymbol{\Phi}$ は

(5.57) $$\boldsymbol{\Phi}((\xi_0, \cdots, \xi_m), (\eta_0, \cdots, \eta_n)) = (\xi_i \eta_j)_{\substack{i=0,1,\cdots,m \\ j=0,1,\cdots,n}}$$

で与えられる．

(5.57) よりわかるように写像 $\boldsymbol{\Phi}$ は $(\boldsymbol{P}^m, \boldsymbol{P}^n)$ から $\boldsymbol{P}^m \otimes \boldsymbol{P}^n$ への単射である．

いま

$$\zeta_{ij} = \xi_i \eta_j, \quad i = 0, \cdots, m,\ j = 0, \cdots, n$$

とおくとき

(5.58) $$\zeta_{ik}\zeta_{jl} - \zeta_{il}\zeta_{jk} = 0, \quad i \neq j,\ k \neq l$$

という関係がある．

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{P}^m, \boldsymbol{P}^n) = \boldsymbol{P}^{m,n} \subseteqq \boldsymbol{P}^m \otimes \boldsymbol{P}^n$$

とおくとき，$\boldsymbol{P}^{m,n}$ は $mn(m+1)(n+1)/4$ 個の 2 次方程式(5.58)で定義される $\boldsymbol{P}^m \otimes \boldsymbol{P}^n$ の代数多様体である．

特に $m=n=1$ であれば，$\boldsymbol{P}^1 \otimes \boldsymbol{P}^1$ は 3 次元射影空間で，$\boldsymbol{P}^{1,1}$ はただ一つの 2 次方程式

(5.59) $$\zeta_{00}\zeta_{11} - \zeta_{01}\zeta_{10} = 0$$

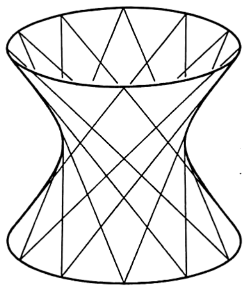


図 5・7

で定義される2次曲面である．逆に任意の重複点をもたない2次曲面は，適当な射影変換によってつねに(5.59)の形の2次曲面にうつされる．したがって，このような2次曲面は $P^{1,1}$ にうつすことができる．

定義 5.11　n 次元射影空間 $P^n={}^*V^{n+1}/\sim$ より

$$\wedge^p P^n = {}^*(\wedge^p V^{n+1})/\sim$$

(ただし $\wedge^p V^{n+1}$ は V^{n+1} の p 重外積べキ空間とする)を作ることができる．$\wedge^p P^n$ を P^n の **p 重外積べキ射影空間**(p-fold exterior power projective space)という．これは $s=\binom{n+1}{p+1}-1$ 次元射影空間である．(ただし $1\leqq p\leqq n+1$.)

n 次元射影空間 $P^n={}^*V^{n+1}/\sim$ の p 次元部分空間全体の集合を $\mathcal{L}^p$ とする．$\mathcal{L}^p$ から $\wedge^p P^n$ への写像 Φ を次のように定める．

P^n の p 次元部分空間 $E^p={}^*W^{p+1}/\sim$ に対して，E^p の任意の $p+1$ 個の独立な点 $P_i=\tilde{x}_i$ $(i=0,\cdots,p)$ $(x_i\in V^{n+1})$ をとる．

$$x_0\wedge x_1\wedge\cdots\wedge x_p\in\wedge^p V^{n+1}$$

であるが，左辺は E^p の $p+1$ 個の独立な点 $\{P_i\}$ の選び方をかえてもたかだかスカラー倍しか変らない．したがって左辺の属す同値類は $\wedge^p P^n={}^*(\wedge^p V^{n+1})/\sim$ の一定の点を定める．この値を E^p に対応させる写像 Φ を考えよう：

$$\Phi(E^p)=(x_0\wedge\cdots\wedge x_p)^\sim\in\wedge^p P^n.$$

この写像 $\Phi:\mathcal{L}^p\to\wedge^p P^n$ は単射である．

いま P^n の射影座標枠 Σ_P を定め，対応する V^{n+1} の基底を $(e_0,\cdots,e_n)$ とする．$\wedge^p P^n={}^*(\wedge^p V^{n+1})/\sim$ で，$\wedge^p V^{n+1}$ の基底を

$$\wedge^p V^{n+1}=\sum_{i_0<\cdots<i_p} R\cdot e_{i_0}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$$

にとる．これによって $\wedge^p P^n$ の点の斉次座標

$$(\xi_{i_0\cdots i_p}\mid i_0<\cdots<i_p)$$

が定まる．

定義 5.12　P^n の p 次元部分空間 $E^p={}^*W^{p+1}/\sim$ に対して，W^{p+1} の基底 $(x_0,\cdots,x_p)$ を任意にとり

$$x_i=\sum_{j=0}^n \xi_{ij}e_j,\qquad i=0,\cdots,p$$

とする．そのとき

$$x_0\wedge\cdots\wedge x_p=\sum_{i_0<\cdots<i_p}\pi_{i_0\cdots i_p}e_{i_0}\wedge\cdots\wedge e_{i_p},$$

ただし

$$\pi_{i_0\cdots i_p}=\begin{vmatrix}\xi_{0i_0} & \cdots & \xi_{0i_p}\\ & \cdots\cdots & \\ \xi_{pi_0} & \cdots & \xi_{pi_p}\end{vmatrix},\qquad i_0<\cdots<i_p \tag{5.60}$$

とおく．この $(\pi_{i_0\cdots i_p}\,|\,i_0<\cdots<i_p)$ は $\Phi(\boldsymbol{E}^p)$ の $\wedge^p\boldsymbol{P}^n$ における上記射影座標枠の斉次座標となっている．これを $\boldsymbol{E}^p$ の **Plücker 座標**という．

(**XIV**)　$\Phi(\mathscr{L}^p)$ は s 次元射影空間 $\wedge^p\boldsymbol{P}^n$ 内の代数多様体で，それは

$$\pi_{i_0\cdots i_p}\cdot\pi_{j_0\cdots j_p}-\sum_{k=0}^{n}\pi_{i_0\cdots i_{k-1}j_0i_{k+1}\cdots i_p}\cdot\pi_{i_kj_1\cdots j_p}=0 \tag{5.61}$$
$$(i_0<\cdots<i_p,\ j_0<\cdots<j_p)$$

によって定義される．ただし，$i_0<\cdots<i_p$ でない場合には

$$\pi_{i_0\cdots i_p}=\begin{cases}0 & (\text{或る } j\neq k \text{ に対して } i_j=i_k \text{ の場合})\\ \varepsilon\pi_{j_0\cdots j_p} & \left(\varepsilon=\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}i_0 & \cdots & i_p\\ j_0 & \cdots & j_p\end{pmatrix},\ j_0<\cdots<j_p\right)\end{cases}$$

と定める．

証明は，ここでは省略する．

特に $n=3,\ p=1$ の場合は $s=5$ で，(5.61)はただ一つの方程式

$$\pi_{01}\pi_{23}+\pi_{02}\pi_{31}+\pi_{03}\pi_{12}=0 \tag{5.62}$$

で与えられる．すなわち，3次元射影空間 $\boldsymbol{P}^3$ 上の射影直線 $\boldsymbol{E}^1$ の全体の集合 $\mathscr{L}^1$ に対して $\Phi(\mathscr{L}^1)$ は5次元射影空間内の一つの2次超曲面となる．

問　題

1　有限体 $\boldsymbol{F}_q$ を係数体とする n 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^n$ 上の点，射影直線，射影超曲面の個数を求めよ．また n 次元射影変換群 $\boldsymbol{G}_P{}^n$ の元の個数を求めよ．

2　n 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^n$ 上の二つの射影直線 $\boldsymbol{E}_1{}^1,\boldsymbol{E}_2{}^1$ において，任意の射影写像 $\varphi:\boldsymbol{E}_1{}^1\to\boldsymbol{E}_2{}^1$ は，有限回の配景写像 $f_1,\cdots,f_m$ の結合として表わされることを示せ．

3　第4章問題2の完全四角形に対して，$\boldsymbol{P}^2$ 上でその双対概念である**完全四辺形**が定義される．これについて第4章問題2と類似の性質を考察せよ．（図5.8参照.）

4　射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ 上の2定点 O,O' を通る射影直線の集合 $L(O),L(O')$ は，$\boldsymbol{P}^2$ の双対射影平面 Π^2 上の射影直線を作る．任意の射影写像 $\Phi:L(O)\to L(O')$ に対して，$\boldsymbol{P}^2$ 上で

$$\boldsymbol{Q}=\{l\cap\Phi(l)\,|\,l\in L(O)\}$$

は2次曲線を作る．$\boldsymbol{Q}$ は O,O' を通る．また $\boldsymbol{Q}$ が2直線に分解されるのは，Φ が配景写

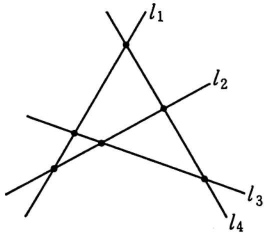


図 5・8

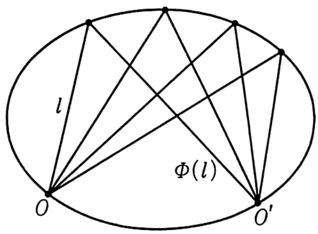


図 5・9

像の場合である.

逆に2次曲線 $\boldsymbol{Q}$ 上に2点 O, O' をとり, $\boldsymbol{Q}$ 上の任意の点 P に対して $\Phi: P\vee O \to P\vee O'$ は $\Phi: L(O)\to L(O')$ の射影写像を与える.

5　(**Pascal の定理**)　$\boldsymbol{P}^2$ 上の2次曲線 $\boldsymbol{Q}$ 上に6点 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ をとると,

$Q=(A_1\vee A_2)\cap(A_4\vee A_5)$, $R=(A_2\vee A_3)\cap(A_5\vee A_6)$, $S=(A_3\vee A_4)\cap(A_6\vee A_1)$

は同一直線上にある. ($\boldsymbol{Q}$ が2直線の場合が Pappus の定理である.) 逆にこの条件があれば, 6点 $A_1, \cdots, A_6$ は或る2次曲線上にある.

[ヒント]　問題4によって $L(A_1)\to L(A_3)$ となる射影写像が定まる. これから $L(A_1)$ および $L(A_3)$ をそれぞれ $A_4\vee A_5$, $A_5\vee A_6$ できると, $\varphi: A_4\vee A_5 \to A_5\vee A_6$ の射影写像が得られ, $\varphi: (Q, A_4, A_5, M)\to(R, N, A_5, A_6)$ となる. φ は実際 S を中心とする配景写像となることを言えばよい.

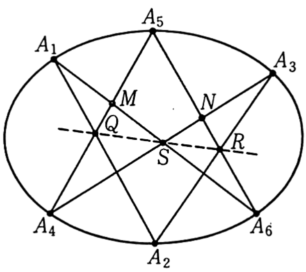


図 5・10

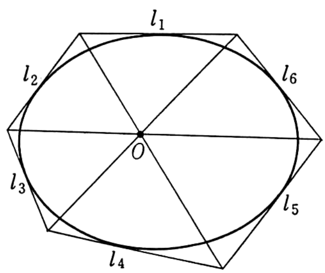


図 5・11

6　(**Brianchon の定理**) (Pascal の定理の双対)　$\boldsymbol{P}^2$ 上の2次曲線に接する6本の直線 $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$ があるとき, 3点

$$(l_1\cap l_2)\vee(l_4\cap l_5),\qquad (l_2\cap l_3)\vee(l_5\cap l_6),\qquad (l_3\cap l_4)\vee(l_6\cap l_1)$$

は1点で交わる. 逆に6本の直線 $l_1, \cdots, l_6$ がこの条件をみたせば, これらは或る2次曲線 $\boldsymbol{Q}$ の接線となっている.

付　　記

双曲的非 Euclid 幾何については，参考書 [2], [4], [5], [6], [7] にそれぞれ簡単に説明がついている．

$\boldsymbol{n}$ 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^n$ で，一つの射影座標枠をとり，点 P の斉次座標を $(x_0, \cdots, x_n)$ とおく．2 次超曲面 $\boldsymbol{Q}$ を定め，その方程式を

$$-x_0^2+x_1^2+\cdots+x_n^2=0$$

とする．この左辺を $Q(x_0, \cdots, x_n)$ とおく．これを用いて

$$\boldsymbol{P}^n=\boldsymbol{H}^n\cup\boldsymbol{Q}^{n-1}\cup\boldsymbol{H}_*{}^n,$$

ただし

$$\boldsymbol{Q}^{n-1}=\{(x_0, \cdots, x_n)\,|\,Q(x_0, \cdots, x_n)=0\},$$
$$\boldsymbol{H}^n=\{(x_0, \cdots, x_n)\,|\,Q(x_0, \cdots, x_n)>0\},$$
$$\boldsymbol{H}_*{}^n=\{(x_0, \cdots, x_n)\,|\,Q(x_0, \cdots, x_n)<0\}$$

と射影空間は分割される．また

$$\boldsymbol{G}_H{}^n=\{f\in\boldsymbol{G}_P{}^n\,|\,f(\boldsymbol{Q}^{n-1})=\boldsymbol{Q}^{n-1}\}$$

とおく．$\boldsymbol{G}_H{}^n$ は $\boldsymbol{G}_P{}^n$ の部分群である．$f\in\boldsymbol{G}_H{}^n$ に対して $f(x_0, \cdots, x_n)=(x_0', \cdots, x_n')$ とするとき，$Q(x_0', \cdots, x_n')=c^2Q(x_0, \cdots, x_n)$ となるので，$f\in\boldsymbol{G}_H{}^n$ は $\boldsymbol{H}^n$ 上の変換群となり，かつ可移に作用することが証明される．こうして得られる

$$\text{幾何}\quad(\boldsymbol{H}^n, \boldsymbol{G}_H{}^n)$$

を**双曲幾何**(または双曲的非 Euclid 幾何)といい，$\boldsymbol{H}^n$ を **$\boldsymbol{n}$ 次元双曲空間**という．$\boldsymbol{P}^n$ の r 次元部分空間 $\boldsymbol{E}^r$ に対して，$\boldsymbol{E}^r\cap\boldsymbol{H}^n\neq\phi$ のとき，これを $\boldsymbol{H}^n$ の‘r 次元部分空間’という．$\boldsymbol{E}^r\cap\boldsymbol{H}^n$ は $r-1$ 次元 2 次曲面 $\boldsymbol{E}^r\cap\boldsymbol{Q}^{n-1}$ に関して，r 次元双曲空間となる．

特に $\boldsymbol{H}^n$ 上の点を通る射影直線 l は $\boldsymbol{Q}$ と 2 点 I, J で交わる．$\boldsymbol{H}^n$ 上の任意の 1 点 P (ただし $P\notin I\vee J$) をとれば，$\boldsymbol{E}^2=P\vee I\vee J$ 上で 2‘直線’ $\boldsymbol{H}^n\cap(P\vee I)$ および $\boldsymbol{H}^n\cap(P\vee J)$ は，$\boldsymbol{H}^n$ において‘直線’ $l=\boldsymbol{H}^n\cap(I\vee J)$ に‘平行’である．すなわち $\boldsymbol{H}^n$ 上の‘平面’ $\boldsymbol{H}^n\cap(P\vee I\vee J)$ 上で点 P を通り‘直線’ $l=\boldsymbol{H}^n\cap(I\vee J)$ に平行な‘直線’は，P がこの‘直線’ l 上にないとき 2 本あり，しかも‘直線’ $\boldsymbol{H}^n\cap(P$

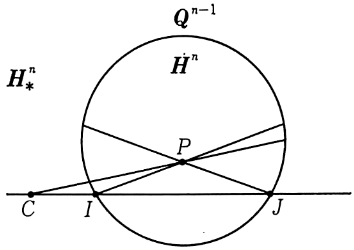


図1

$\vee C)$ (ただし $C \in (I \vee J) \cap H_*{}^n$ にとる) はすべて‘直線’l と交わらない．この意味で，双曲幾何は Euclid の公理を満足していないので非 Euclid 的幾何である．

H^n 上の 2 点 P, Q に対して，P, Q を通る射影‘直線’$\bar{l}$ は Q と 2 点 I, J で交わる．そのとき，複比 $(I, J; P, Q) > 0$ であるので，2 点 P, Q 間の距離を

$$\rho(P, Q) = |\log(I, J; P, Q)|$$

と定義する．$\rho(P, Q) = \rho(Q, P)$ である．また 3 点 P, Q, R に対しては

$$\rho(P, R) \leqq \rho(P, Q) + \rho(Q, R)$$

が成り立つ．特に P, Q, R が同一直線上にあって，Q が P, R の間にあれば，上で等号が成り立つ．

特に $f \in G_H{}^n$ であれば，$P, Q \in H^n$ に対して $\rho(P, Q) = \rho(f(P), f(Q))$ となる．このことは，f に対して，$f(\bar{l})$ は射影直線のこと，したがって $f(\bar{l})$ と Q との交点は $f(I), f(J)$ となること，および複比の不変性 $(I, J; P, Q) = (f(I), f(J); f(P), f(Q))$ よりわかる．

H^n 上の 1 点 P で交わる 2‘直線’$\bar{l}, \bar{g}$ のなす角 θ も，複比を用いて定義される．すなわち射影平面 $P^2 = \bar{l} \vee \bar{g}$ 上で，P から 2 次曲線 $Q^1 = P^2 \cap Q^{n-1}$ に引いた 2 本の虚の接線を $\bar{u}, \bar{v}$ とするとき，$L(P)$ に属する 4 本の直線の複比によって

$$\theta = \frac{1}{2i} \log(\bar{u}, \bar{v}; \bar{l}, \bar{g})$$

で与えられる．ただし，$i = \sqrt{-1}$ とする．

双曲幾何においては，Euclid 幾何と比べられて，それと同じ性質のものや異なる結果を与える多くの定理が証明されている．

以上が Klein による双曲幾何の射影幾何による表示であるが，別に Poincaré による表示もある．

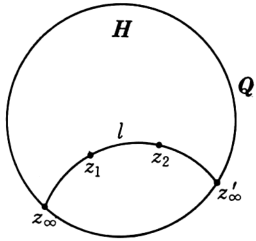


図 2

複素平面 $\boldsymbol{C}$ 上に原点を中心とする単位円 $\boldsymbol{H}=\{z\in\boldsymbol{C}\,|\,|z|<1\}$ および単位円周 $\boldsymbol{Q}=\{z\in\boldsymbol{C}\,|\,|z|=1\}$ をとる．そのとき，基礎集合を $\boldsymbol{H}$ とし，また変換群 $\boldsymbol{G_H}$ として，$\boldsymbol{Q}$ を $\boldsymbol{Q}$ にうつす複素 1 次分数変換

$$f(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},\qquad \alpha\delta-\beta\gamma=1$$

の全体をとれば，幾何 $(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{G_H})$ が得られる．これは 2 次元双曲幾何の一つの表示となる．ここで‘直線’は単位円 $\boldsymbol{Q}$ と直交する直線または円(の $\boldsymbol{H}$ との共通部分)とし，2 点 $z_1, z_2\in\boldsymbol{H}$ の距離 $\rho(z_1, z_2)$ は

$$\rho(z_1, z_2)=|\log(z_\infty, z_\infty{}'; z_1, z_2)|$$

で表わされる．ここで $z_\infty, z_\infty{}'$ は，z_1, z_2 を通る‘直線’と $\boldsymbol{Q}$ との交点である．$\rho(z_1, z_2)$ は $f\in\boldsymbol{G_H}$ に対して不変である．

Poincaré の表示においては，2‘直線’ l, g のなす角 θ は，Euclid 平面内で直線または円 l, g のなす Euclid の角 θ に等しいと定めればよい．

参　考　書

手近く得られる邦文のものをあげる.

[1] 寺阪英孝: 射影幾何学の基礎, 共立出版(1948).

[2] 彌永昌吉・平野鉄太郎: 射影幾何学, 朝倉書店(1959).

[3] 寺阪英孝: 綜合初等幾何学, 共立出版(1958).

[4] 皆川多喜造: 射影幾何, 至文堂(1966).

[5] 滝沢精二: 幾何学入門, 朝倉書店(1967).

[6] 彌永昌吉: 幾何学序説, 岩波書店(1970).

[7] 寺阪英孝: 幾何とその構造, 筑摩書房(1971).

[8] 寺阪英孝: 初等幾何学(第2版), 岩波書店(1973).

訳書としては

[9] 寺阪英孝・大西正男訳, 解説: D. Hilbert, 幾何学の基礎, F. Klein, Erlangen プログラム, 共立出版(1970).

本選書に入れるにあたり，章末の問題の解答・ヒントと本文の二,三の誤りの指摘について中島匠一氏の協力を得た. ここに感謝する.

解答・ヒント

計算問題は省いた

線型空間

第1章

1 §1.1, d)参照((1) $x+y+z=3$, (2) $2x+y-72=4$).

2 §1.1, d)参照.

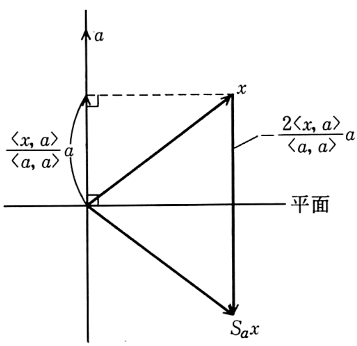
3 定義(1.9)により直接示すのがわかりやすい.

4 §1.1, e)参照.

5 Q の座標を (η_1, η_2, η_3) とすれば $a_1\eta_1+a_2\eta_2+a_3\eta_3=b$, $(\overrightarrow{PQ})={}^t(\xi_1-\eta_1, \xi_2-\eta_2, \xi_3-\eta_3)$. 一方 $\boldsymbol{a}={}^t(a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}/\|\boldsymbol{a}\|$ とすれば $(\overrightarrow{PQ})=\pm d\cdot\boldsymbol{u}$ だから

$$d^2=\langle(\overrightarrow{PQ}), (\overrightarrow{PQ})\rangle=\langle(\overrightarrow{PQ}), \pm d\boldsymbol{u}\rangle=d|\langle(\overrightarrow{PQ}), \boldsymbol{a}\rangle|/\|\boldsymbol{a}\|.$$

6 (1)明らか. (2)図1参照. この図の印象により S_a はベクトル a に関する鏡映変換



(reflection)とよばれる. 明らかに $S_a{}^2=I$(恒等変換). (3) $S_ab=b+ma$ より $2\langle b, a\rangle=-m\|a\|^2$——①, $S_ba=a+b$ より $2\langle a, b\rangle=-\|b\|^2$——②. 一方 a, b 間の角を θ $(0\leq\theta\leq\pi)$ とすれば $\langle a, b\rangle=\langle b, a\rangle=\|a\|\,\|b\|\cos\theta$. このときたとえば②により $\cos\theta<0\left(\theta>\dfrac{\pi}{2}\right)$にも注意しておく. ①, ②の両辺を掛け合わせて $4\cos^2\theta=m$ が得られる. m は正整数で $\cos^2\theta\leq1$ だから $m=1, 2, 3, 4$ の場合しかあり得ない. したがって以下のどれかとなる.

$$m=1,\ \theta=2\pi/3=120°,\ \|a\|:\|b\|=1:1.$$

$$m=2,\ \theta=3\pi/4=135°,\ \|a\|:\|b\|=1:\sqrt{2}.$$

$$m=3,\ \theta=5\pi/6=150°,\ \|a\|:\|b\|=1:\sqrt{3}.$$
$$m=4,\ \theta=\pi=180°,\ \|a\|:\|b\|=1:2.$$

7　$\boldsymbol{R}^3$ の標準底を $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ とし，A を列ベクトルを用いて $A=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ と表すとき，$A\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{a}_j$ $(j=1,2,3)$ となることに注意すれば容易にわかる．

8　例 1.8 参照．

9　$x=x_1+n_1t$ $(t\in\boldsymbol{Z})$ とおく．t を適当にとれば $x\equiv x_2(n_2)$ となること，すなわち $n_1t\equiv x_2-x_1(n_2)$ となることをいえばよい．$n_1t+n_2s=x_2-x_1$ が整数解 (t,s) をもつための必要十分条件は $d\mid x_2-x_1$ であるから，これは明らか．

10　(1) 問 9 による．(2) 正整数 a,b が互いに素であるとき，$\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$ であることをいえばよい．$x\in\boldsymbol{Z}$ に対して G.C.D. $(x,ab)=1\Leftrightarrow$ G.C.D. $(x,a)=$ G.C.D. $(x,b)=1$ であることから容易にわかる．(3) (1.41) をくり返し用いる (p^{λ_i-1} による商と剰余をとることから始めればよい.) (4) p を素数とするとき，$1,2,\cdots,p^\lambda$ のうちで p^λ と互いに素ではないものは $1\cdot p, 2\cdot p,\cdots,p^{\lambda-1}\cdot p$ の $p^{\lambda-1}$ 個．したがって $\varphi(p^\lambda)=p^\lambda-p^{\lambda-1}$．以下 (2) より明らか．

11　$k\neq 0,p$ ならば $\binom{p}{k}\equiv 0(p)$ より．

第2章

1　(1) まず結合則が成立することを確かめよ．逆元の存在は次のようにしてわかる：$x=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k\neq 0$ に対して $\bar{x}$ を (2) のように定めれば $x\bar{x}=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2\neq 0$．(3) の記法によれば $x\bar{x}=N(x)\neq 0$．ゆえに $x^{-1}=N(x)^{-1}\bar{x}\in H^\times$．(2) 両辺をそれぞれ計算して比較する．(3) $N(xy)=xy\cdot\overline{xy}=xy\bar{y}\bar{x}=N(x)N(y)$．(4) $x\in H_{\boldsymbol{R}}$ ならば $N(x)\in R$ である．$x\in H_{\boldsymbol{R}}$ が正則元 $\Leftrightarrow \exists y\in H_{\boldsymbol{R}}: xy=yx=1$．このとき $N(x)N(y)=N(y)N(x)=1$．したがって $N(x)\in R^\times$ であり，$N(y)=N(x)^{-1}$ となる．逆に $N(x)\in R^\times$ ならば，$y=N(x)^{-1}\bar{x}\in H_{\boldsymbol{R}}$ が $x\in H_{\boldsymbol{R}}$ の逆元．

2　F が単射 $\Leftrightarrow F(x)=O$ ならば $x=o$．$F(xy)=F(x)F(y)$ を示すためには，F は線型写像だから，F が問 1 (1) の関係式を保つことを試すだけでよい．$A=(a_{ij})\in\operatorname{Im}F$ ならば $\exists x=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k\in H, F(x)=A$ (つまり A の成分は $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ を用いて表せる)．このとき $A\neq O\Leftrightarrow x\neq o$ であり，$A^{-1}=F(x^{-1})=N(x)^{-1}F((\bar{x})$．これより容易に計算できる．

3　例 2.60 参照．

4　(5) $t^3-4t^2+5t-2=(t-1)^2(t-2)$，$t^4-4t^3+3t^2+4t-4=(t+1)(t-1)(t-2)^2$ より考えよ．

5　$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$ を用いて帰納法による．

7　例 2.49 参照．

8　(4)最小多項式は $X^n+a_1X^{n-1}+\cdots+a_n$.

9　§2.4, c)の諸例参照.

10　V の底として $E_{ii}-E_{i+1i+1}$ $(1\leq i\leq n-1)$, E_{ij} $(i\neq j)$ からなるものをとり，任意の V の元を考えるかわりに，これ等に対してだけ条件を考えればよい.

11　§2.1, c)参照.

12　例2.72, 例2.73等で得られた感触をもとにして，第3章で行なわれる一般的な議論を特殊な場合について先取りすることを要求している.

13　例2.81参照.

14　(1)$\Leftarrow$ は明らか. $\Rightarrow$ を示す. $\alpha+\alpha^\sigma=2a\in\boldsymbol{Z}$, $\alpha\alpha^\sigma=a^2-b^2d\in\boldsymbol{Z}$ だから $4b^2d\in\boldsymbol{Z}$ となるが，d は平方因数を持たない整数だから $2b\in\boldsymbol{Z}$ でなければならない．このとき $4a^2-4b^2d=4(a^2-b^2d)\equiv 0\,(4)$. (2)上の(1)において $2a=p, 2b=q\in\boldsymbol{Z}$ とすれば, $\alpha=(p+q\sqrt{d})/2\in\mathfrak{o}\Leftrightarrow p^2\equiv q^2d\,(4)$. $d\equiv 2\,(4)$ のとき：p は偶数だから p^2 は4の倍数となり，したがって q も偶数となる. $d\equiv 3\,(4)$ のとき：p が奇数とすると q は偶数ではありえず，$p^2\equiv q^2\equiv 1\neq 3$ (4)となり矛盾．したがってこの場合も p, q は同時に偶数となる. $d\equiv 1\,(4)$ のとき：$p^2\equiv q^2$ (4)と $p\equiv q\,(2)$ とは同値である．以下(3), (4), (5)は2次元の線型代数.

第3章

1　(1), (2)とも連立1次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ を解けばすべて明らかであるが，ここではまだその解法を仮定していない．例3.4，例3.5を参照されたい. (2)は a, b, c が相異なるか，2つが等しいか，3つとも等しいかにより，3通りにわかれる.

2　例3.8，例3.9参照.

3　I を恒等変換として条件の式を変形すれば $(T_1-I)(T_2-I)=I$ が得られる．したがって T_1-I, T_2-I は正則であり，互に他の逆変換である(例3.7参照)．ゆえに $(T_1-I)(T_2-I)=(T_2-I)(T_1-I)$. これより $T_1T_2=T_2T_1$ が得られる.

4　(1)　$X^2-2\cos\theta\cdot X+1, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\cos\theta \end{bmatrix}$.

(2)　$(X-c)((X-c)^2-2), \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c^3-2c & -3c^2+2 & 3c \end{bmatrix}$.

(3)　$X^2+1, \left.\begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}\right\}2n$

5　例3.21，例3.22，例3.23参照.

6 最小多項式は(1)$(X-\alpha)(X-\beta)$, (2)$(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$であり，仮定によりこれ等は重根をもたないことに注意せよ．定理3.9参照．あとは単純な計算問題となる．

7 $\mathrm{Ker}(T-\alpha I)^2 \neq \{o\} \Leftrightarrow \det(T-\alpha I)^2=0 \Leftrightarrow \det(T-\alpha I)=0$.

8 特性根はすべて$\varphi_T=0$の根であるから，定理3.7(および(3.37))より容易にわかる．

9 例3.22参照．

10 Gで生成される$L(V, V)$の部分空間の底を考え，これについて例3.28と同様の考え方をすればよい．

11 $n=1$の場合に証明すれば十分．

12, 13, 14, 15：いずれも代数学の初等的な問題である．解答に決った表現形式があるわけではないから読者自身で工夫せよ．

第4章

5 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1{}^{k-1} & x_2{}^{k-1} & \cdots & x_n{}^{k-1} \end{bmatrix}$, $B={}^tA$として例4.15参照．

6 左辺の行列式はx, y, zの多項式として1次以下であり，しかも$(x, y, z)=(a_i, b_i, c_i)$ $(i=1, 2, 3)$とおけばたしかに0となる．したがってこの行列式が実際にx, y, zに関する1次式(つまり問題の方程式が平面の方程式)であることだけ示せばよい．左辺の第1行に関する2項展開によりx, y, zの係数を求め，これ等がすべて0であるものとして矛盾を示せ．

7 $P_1, \cdots, P_5$が同一直線上にない場合，たとえばP_1, P_2, P_3が同一直線上にないものとするとき，$a=(\overrightarrow{P_1P_2})$, $b=(\overrightarrow{P_1P_3})$として，標準座標系$\Sigma=\{0\,;e_1, e_2\}$のかわりにアフィン座標系$\Sigma'=\{P_1\,;a, b\}$を取る．各$P_i$の座標を$\Sigma'$に関する座標によって$A$を変形して考えれば結果は容易に得られる．ただしその前に上述の変形によってAの階数が変らないことを示さなければならない．$P_1, \cdots, P_5$が同一直線上にある場合にも$a=(\overrightarrow{P_1P_2})$として，$b$は適当に取り，アフィン座標系$\Sigma'=\{P_1\,;a, b\}$を用いて$A$を変形する．以上の手順で考えれば難しいところは何もない問題であるが，解答を完全に記述するのはやや煩雑となる．御健闘を祈る．

8 $ABC=(AB)C$として例4.15参照．

9 (1) $\det X=\det({}^tX)=\det(-X)=(-1)^n\det X$より．(2) $\begin{vmatrix} 0 & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ -x_{12} & 0 & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_{1n} & -x_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$の第1列の$(-x_{2j}/x_{12})$倍および第2列の$(x_{1j}/x_{12})$倍を第$j$列から引いて整理せよ．(3) $n=2m$として，mに関する数学的帰納法による．実際$m=1$のときは$\det X=(x_{12})^2$．以下(2)のYが${}^tY=-Y$をみたすことに注意すればよい．

10　まずはじめに行列式は本来有理整係数の多項式として定義されたものであり，(4.29)等もその意味で成立していることに注意する(例4.22参照)．(1) (4.29)により $AB\cdot\operatorname{adj}(AB)=\det(AB)I$．この両辺に左から $\operatorname{adj} A$ を掛ければ $\det A\cdot B\operatorname{adj}(AB)=\det(AB)\cdot\operatorname{adj} A$．したがって

$$\det A\cdot(B\operatorname{adj}(AB)-\det B\cdot\operatorname{adj} A)=O.$$

一般に(整係数の多項式として) $\det A\neq 0$ だからこれより $B\operatorname{adj}(AB)=\det B\cdot\operatorname{adj} A$ が得られる．この両辺に左から $\operatorname{adj} B$ をかけて同様に考えればよい．(2) $AB=BA$ の両辺に右から $\operatorname{adj} A$ を掛ければ $AB\operatorname{adj} A=\det A\cdot B$．この両辺に左から $\operatorname{adj} A$ を掛けて，両辺の差から $\det A$ をくくり出す．(3) (4.29)より $\det(\operatorname{adj} A)=(\det A)^{n-1}$．$B=\operatorname{adj} A$ とおけば $B\operatorname{adj} B=\det B\cdot I=(\det A)^{n-1}I$．この両辺に左から A を掛ければ $\det A\cdot\operatorname{adj} B=(\det A)^{n-1}A$．これより $\operatorname{adj} B=(\det A)^{n-2}A$．(4) $rk\,A=n\iff\det A\neq 0$．このとき $\det(\operatorname{adj} A)=(\det A)^{n-1}\neq 0$．ゆえに $rk(\operatorname{adj} A)=n$．$rk\,A=n-1$ のとき，A の $(n-1)$ 次小行列式で $\neq 0$ となるものがあるから $rk(\operatorname{adj} A)\geq 1$ は明らか．一方例4.26を $r=2$ の場合に適用すれば

$$\begin{vmatrix}\Delta_{i_1j_1} & \Delta_{i_1j_2}\\ \Delta_{i_2j_1} & \Delta_{i_2j_2}\end{vmatrix}=\pm\det A\cdot\Delta^{(n-2)}.$$

ここで $\Delta^{(n-2)}$ は $\det A$ から第 i_1, i_2 行，第 j_1, j_2 列を除いて得られる $(n-2)$ 次の小行列式である．したがって $\det A=0$ のときは $\operatorname{adj} A$ の2次の小行列式はすべて0であり，$rk(\operatorname{adj} A)\leq 1$ となることがわかる．

アフィン幾何・射影幾何

第2章

1　X の点の個数 $=q^n$，X の直線の数 $=q^{n-1}(q^n-1)/(q-1)$，X 上の超平面の数 $=q(q^n-1)/(q-1)$．

2　Menelaus の定理を示す．$\overrightarrow{BP}=p\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CQ}=q\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AR}=r\overrightarrow{AB}$ $(p,q,r\in K)$ とすると，P,Q,R が一直線上にあるという条件と(2.46)は共に $pq+qr+rp-p-q-r+1=0$ と同値である事がわかる．

3　$\overrightarrow{\sigma(P)\sigma(Q)}=\lambda\overrightarrow{PQ}$ となる $\lambda\in K$ がとれるが，この λ が P,Q によらないことが例2.9 (ii)を使ってわかる(ここで $n\geqq 2$ が必要)．よって σ は，平行移動＋スカラー倍となる．また，σ が全単射 $\iff\lambda\neq 0$．

4　(i)　例えば，部分空間とその平行性の定義，空間の間の写像の定義，性質は同じ．(ii)　例えば，例2.4と同様の設定で考える時，$\dim W\leqq r$ は必ずしも成立しない．特に，2点を結ぶ直線(1次元部分トーラス空間)は存在するとは限らない．

5 ヒントに従って証明する．但し図 4.11 において，$P_{011}, P_{001}, P_{010}$ は無限遠点であるからその点で交わる 2 直線はアフィン平面では平行になることに注意．

第3章

1 $V_E{}^n$ の正規直交基底を一組固定して $V_E{}^n=\boldsymbol{R}^n$ と同一視しておく．$A_1=(\boldsymbol{a}_0, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1})$, $A_2=(\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1})$, $B_1=(\boldsymbol{b}_0, \cdots, \boldsymbol{b}_{n-1})$, $B_2=(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_{n-1})$（すべて $n\times n$ 行列）とおく．$|{}^tA_1A_2|=(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{b}_0)\alpha$, $|{}^tB_1B_2|=(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_0)\beta$, $|{}^tA_1B_2|=(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_0)\gamma$, $|{}^tB_1A_2|=(\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_0)\gamma$ が成立する．但し，${}^tX$ は X の転置を表わし，

$$\alpha=\begin{vmatrix}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_{n-1})\\ \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}_{n-1})\end{vmatrix},\quad \beta=\begin{vmatrix}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) & \cdots & (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_{n-1})\\ \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{b}_{n-1}, \boldsymbol{b}_1) & \cdots & (\boldsymbol{b}_{n-1}, \boldsymbol{b}_{n-1})\end{vmatrix},$$

$$\gamma=\begin{vmatrix}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_{n-1})\\ \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{b}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{b}_{n-1})\end{vmatrix}$$

とおいた．これから $\cos\theta=\pm\gamma/\sqrt{\alpha\beta}$ がわかる．（$\pm$ の符号は $\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{b}_0$ の向きによる．）

2 相似幾何：$\Sigma_S=(O\,;\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ において $O\in X$ で $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)=0\ (i\neq j)$ かつ $\|\boldsymbol{e}_1\|=\|\boldsymbol{e}_2\|=\cdots=\|\boldsymbol{e}_n\|$．等積幾何：$\Sigma_{SP}=(O\,;\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ において，$O\in X$ で

$$\begin{vmatrix}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) & \cdots & (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_n)\\ \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_1) & \cdots & (\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_n)\end{vmatrix}=1.$$

3 E^3 については，$E^3\wedge E^3$（E^3 の外積）が E^3 の双対と同型になることからわかる．

一般の n, r ($r\leqq n-1$) についての解答は次のようにできる．$(l+1)$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_{l-1}$ に対して，行列

$$\begin{bmatrix}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}_{l-1})\\ (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_1) & \cdots & (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_{l-1})\\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{c}_{l-1}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{c}_{l-1}, \boldsymbol{c}_1) & \cdots & (\boldsymbol{c}_{l-1}, \boldsymbol{c}_{l-1})\end{bmatrix}$$

を $C^l(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\,; \boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_{l-1})$ とおく．$|C^l(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\,; \boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_{l-1})|=V^l(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_{l-1})$ であり，更に $|C^l(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\,; \boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_{l-1})|=\dfrac{1}{2}\Bigl(V^l(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_{l-1})-V^l(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_{l-1})-V^l(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_{l-1})\Bigr)$ となっている．さて φ を $2r$ 面体の体積を保つ $V_E{}^n$ の変換とする．1 次独立な $r+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r+1}$ ($r\leqq n-1$ であるから存在）に対して行列 $A(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r+1})=C^{r+1}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1\,; \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{r+1})$ を考える．（$|A(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r+1})|=V^{r+1}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r+1})\neq 0$ である．）$A(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r+1})$ の (i,j) 余因子は（符号を除いて）$|C^r(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j\,; \boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_{r-1})|$（$i\neq j$ の時）または $V^r(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{r+1})$（$i=j$ の時）という形をしている（但し $\boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_{r-1}$ は $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r+1}$ から $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j$ を除いたもの）．よって φ の性質から $A(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r+1})^{-1}$ と $A(\varphi(\boldsymbol{a}_1), \cdots, \varphi(\boldsymbol{a}_{r+1}))^{-1}$ が定数倍（行列式の比）しか違わぬことがわかる．従って，$A(\varphi(\boldsymbol{a}_1), \cdots, \varphi(\boldsymbol{a}_{r+1}))=\lambda A(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r+1})$ (λ

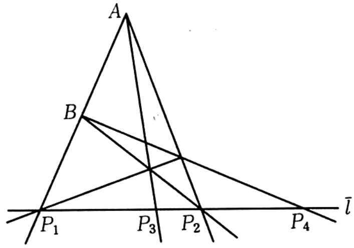
は定数)となっている．つまり，$(\varphi(\boldsymbol{a}_i),\varphi(\boldsymbol{a}_j))=\lambda(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)\ (i,j=1,2,\cdots,r+1)$が成り立っているが，$\varphi$が$r$次元体積を保つことから$\lambda=1$でなくてはならない．$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{r+1}$は1次独立であれば任意に選べるから，これより$\varphi$が直交変換であることがわかる．

4 ヒントに従って計算する．

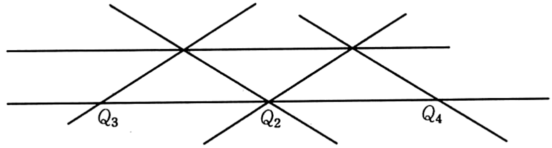
5 $\mathfrak{o}(3)$と$\mathfrak{gl}(3,\boldsymbol{R})$の中間にあるLie代数は$\mathfrak{sl}(3,\boldsymbol{R})$と$\mathfrak{o}(3)+\mathfrak{z}(3)$だけである．

第4章

1 下図において直線AP_1を無限遠直線にうつす射影変換を行い，その時のP_iの行き先をQ_iとする．($i=1,\cdots,4$. Q_1は無限遠点.)



この時，アフィン平面では下のようになっている．(A,B,P_1を共通点とする直線は平行線にうつることに注意.)



この時，$\overrightarrow{Q_3Q_2}=\overrightarrow{Q_2Q_4}$となっていることがわかるから，射影変換で複比が不変であることを使うと，$(P_1,P_2;P_3,P_4)=(Q_1,Q_2;Q_3,Q_4)=-1$となる．

2 (i) この性質は射影変換によって不変であることに注意する．そこで図4.15における直線$\bar{l}$(つまり，5個の交点が乗っている直線)を無限遠直線にうつして考える．すると次の事実を証明すればよいことになる:「2つの完全四角形において頂点の対応が定まっているとする．その時，対応する6組の辺のうち5組が平行なら残りの1組も平行である.」そしてこの事実はベクトルの計算(または相似幾何学)によって簡単に示せる．(ii) φを$\boldsymbol{P}^2$の射影変換に延長して考えればよい．(iii) 図4.11は4点P_{011},R,S,P_{001}に関する四角形性6点のうち1点がP_{100}, 2点がP_{010}になる場合である．図4.12は4点T,S,R,P_{011}に関する四角形性6点において3点がP_{100},P_{110},P_{101}になっている場合である．(iv)

例えば交換律は性質(i)を用いて示される．詳細は省略．

3 $G_P{}^2$ は次の(i)(ii)で特徴付けられる．(i) $\boldsymbol{P}^2$ 内の2直線 l_1, l_2 とその間の射影写像 $\varphi: l_1 \to l_2$ に対して，φ の延長となる $G_P{}^2$ の元が存在する．(ii) $\boldsymbol{P}^2$ の無限遠直線 l_∞ を全体として不変にする $G_P{}^2$ の元全体は $\boldsymbol{A}^2$ のアフィン変換群 $G_A{}^2$ と一致する．

第5章

1 点の個数$=(q^{n+1}-1)/(q-1)$．射影直線の個数$=(q^{n+1}-1)(q^n-1)/(q^2-1)(q-1)$．射影超平面の個数$=(q^{n+1}-1)/(q-1)$．$G_P{}^n$ の元の個数$=q^k(q^{n+1}-1)(q^n-1)\cdots(q^2-1)$但し $k=n(n+1)/2$.

2 $E_1{}^1 \vee E_2{}^1$ の次元を r とする($r=2$ 又は 3)．問題は $n=r$ の場合に帰着されることがすぐにわかる．$r=2$ の場合には§4.6の(XIII)から，また $r=3$ の場合には例5.12から主張が正しいことがわかる．

3 §5.3(XII)にある双対性を使って，完全四角形の性質を言い換えてみればよい．

4 $\boldsymbol{P}^2$ の斉次座標を (ξ_0, ξ_1, ξ_2), Π^2 の斉次座標を (a_0, a_1, a_2) で表す．$a_0\xi_0+a_1\xi_1+a_2\xi_2=0$ が成り立っているとする．適当に $\boldsymbol{P}^2$ の射影変換を施して，$O=(0,1,0), O'=(0,0,1)$ であるとしておく．この時 $L(O)=\{(a_0, 0, a_2) \in \Pi^2 \mid a_0, a_2 \in K\}$, $L(O')=\{(a_0', a_1', 0) \in \Pi^2 \mid a_0', a_1' \in K\}$ となる．射影写像 $\Phi: L(O) \to L(O')$ が $\begin{bmatrix} a_0' \\ a_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_2 \end{bmatrix}$ $(\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0)$ で与えられているとする．この時 Q の定義方程式は $a_0\xi_0+a_2\xi_2=0$ と $a_0'\xi_0+a_1'\xi_1=0$ から a_0, a_2, a_0', a_1' を消去して得られるが，それは $\beta\xi_0{}^2+\delta\xi_0\xi_1-\alpha\xi_0\xi_2-\gamma\xi_1\xi_2=0$ となり Q が2次曲線であることがわかる．定義方程式から Q が2直線に分解される条件は $\gamma=0$ であることがわかるが，一方で $\gamma=0$ は Φ が配景写像となる事と同値である．(その中心は点 $(\beta, \delta, -\alpha) \in \boldsymbol{P}^2$ である.) 逆の主張については上の計算を逆にたどればよい．

5 ヒントに従って考える．S を中心とする配景写像を $\psi: A_4 \vee A_5 \to A_5 \vee A_6$ とする時，$\psi: (A_4, A_5, M) \to (N, A_5, A_6)$ となっているので§4.2(III)から $\psi=\varphi$ がわかる．よって $\psi(Q)=R$ が成り立つ．つまり，Q, S, R は同一直線上にある．

6 Pascal の定理の状況を，例5.18の対合的相反写像でうつしてみれば Brianchon の定理が得られる．

欧文索引

和文索引

サ 行

タ 行

ナ　行

ハ　行

マ 行

ヤ 行

ラ 行

ワ 行

線型空間・アフィン幾何　岩波基礎数学選書

1990 年 10 月 8 日　第 1 刷発行 ©
1997 年 9 月 9 日　第 4 刷発行

著　者　伊原信一郎（いはらしんいちろう）　河田敬義（かわだゆきよし）

発行者　大塚信一

発行所　株式会社　岩波書店
〒101-02 東京都千代田区一ツ橋 2-5-5
電　話　案内 03-5210-4000

印刷・精興社　製本・三水舎

ISBN 4-00-007801-1　　Printed in Japan

小平邦彦監修

岩波基礎数学選書